**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1978**

УДК 539.3

ВНУТРЕННИЙ КОНТАКТ УПРУГОЙ ШАЙБЫ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКОЙ, ИМЕЮЩЕЙ КРУГОВОЙ ВЫРЕЗ И РАДИАЛЬНУЮ ТРЕЩИНУ

В. Ф. КОМОГОРЦЕВ, Г. Я. ПОПОВ, М. В. РАДИОЛЛО

(Одесса)

Рассматривается плоская задача контакта упругой шайбы с поверхностью кругового отверстия в бесконечной пластинке, содержащей радиальную трещину, входящую в зону контакта. Способом [1] названная задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных контактного давления и производной раскрытия трещины. Установлено, что искомые функции в окрестности устья трещины ограничены. С учетом этого методом ортогональных многочленов построено эффективное приближенное решение задачи. Приведены результаты численных расчетов.

Плоские контактные задачи теории упругости о внутреннем соприкосновении тел с круговыми границами близких радиусов при отсутствии разреза (трещины) исследовались ранее многими авторами. Контактная задача, учитывающая влияние разреза (вдавливание штампа в полуплоскость с краевой трещиной), рассматривалась в [2, 3].

1. Пусть в круговое отверстие в упругой плоскости радиуса R с выходящим на ее край разрезом длины l вложена с небольшим зазором (или натягом) δ упругая шайба, загруженная центральной сосредоточенной силой P, направленной по линии разреза. Будем считать, что трение в области контакта и напряжения в плоскости на бесконечности отсутствуют, а к берегам разреза нормально к их поверхности приложена заданная одинаковая на противоположных берегах разрывающая нагрузка. Шайба и плоскость выполнены из различных материалов. Требуется найти контактное напряжение, величину зоны контакта и коэффициент интенсивности напряжений у острия трещины.

Условимся все величины, относящиеся к шайбе, в дальнейшем отмечать нулевым индексом. Введем полярную систему координат с полюсом в центре отверстия и осью вдоль линии разреза.

При решении задачи будем исходить из уравнений Ламе плоской теории упругости в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1-\nu}{2r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\frac{1+\nu}{2r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial\varphi}-\frac{3-\nu}{2r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\varphi}+\frac{3-\nu}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r^2}+\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2}=0 \tag{1.1}$$

Напряжения σ_r, σ_φ, $\tau_{r\varphi}$ определяются через перемещения u_r, u_φ с помощью формул

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\nu\frac{u_r}{r}\right] \tag{1.2}$$

$$\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\nu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right]$$

Здесь имеется в виду плоское напряженное состояние; для перехода к плоской деформации нужно заменить ν на $\nu/(1-\nu)$, E на $E/(1-\nu^2)$.

Уравнения (1.1) следует рассмотреть для шайбы и для полуплоскости в отдельности. Их решения должны удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_\varphi(r,\varphi)\,|_{\varphi=\pm0}=-q(r),\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi)\,|_{\varphi=\pm0}=0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_{0r}(R,\varphi)=\sigma_r(R,\varphi)=\begin{cases}p(\varphi) & (|\varphi|\leqslant\alpha)\\ 0 & (\alpha\leqslant|\varphi|\leqslant\pi)\end{cases} \tag{1.4}$$

$$\tau_{0r\varphi}(R,\varphi)=\tau_{r\varphi}(R,\varphi)=0\quad(|\varphi|\leqslant\pi)$$

$$u_{0r}(R,\varphi)-u_r(R,\varphi)=\begin{cases}\delta_1(1-\cos\varphi)\\ -\delta_2\end{cases}\quad(|\varphi|\leqslant\alpha) \tag{1.5}$$

$$\{\sigma_r(r,\varphi),\ \sigma_\varphi(r,\varphi),\ \tau_{r\varphi}(r,\varphi)\}\to0 \text{ при } r\to\infty \tag{1.6}$$

Здесь $q(r)$ — заданная нормальная нагрузка на берега разреза, $p(\varphi)$ — искомое контактное давление, α — угол контакта, δ_1 — зазор, δ_2 — натяг.

Анализ соотношений (1.2) и учет симметрии задачи позволяет установить непрерывность напряжения $\sigma_r(r,\varphi)$ при переходе через разрез (непрерывность напряжений $\sigma_\varphi(r,\varphi)$ и $\tau_{r\varphi}(r,\varphi)$ следует из условий (1.3)). При этом перемещения и их первые производные по полярному углу на разрезе $R<r<R+l$ претерпевают скачки

$$u_\varphi(r,-0)-u_\varphi(r,+0)=-2\chi(r),\quad u_r(r,-0)-u_r(r,+0)=0 \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=-0}-\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=+0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=-0}-\left.\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=+0}=-2\chi(r)+2r\chi'(r)$$

где $\chi(r)$ — неизвестная функция, описывающая смещения берегов разреза и равная нулю при $r\geqslant R+l$.

Применим [1] к уравнениям (1.1) и (1.2) с учетом (1.7) конечное интегральное преобразование Фурье по полярному углу φ (поперек разреза), определяемое формулами

$$f_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)e^{in\varphi}\,d\varphi,\quad f(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{-in\varphi}$$

В результате приходим к одномерной системе дифференциальных уравнений

$$r^2\frac{d^2u_r^{(n)}}{dr^2}+r\frac{du_r^{(n)}}{dr}-\left(1+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)u_r^{(n)}-\frac{1+\nu}{2}in\frac{du_\varphi^{(n)}}{dr}+$$
$$+\frac{3-\nu}{2}inu_\varphi^{(n)}=2\nu r\chi'(r)-2\chi(r)$$

$$r^2\frac{d^2u_\varphi^{(n)}}{dr^2}+r\frac{du_\varphi^{(n)}}{dr}-\left(1+\frac{2}{1-\nu}n^2\right)u_\varphi^{(n)}-\frac{1+\nu}{1-\nu}inr\frac{du_r^{(n)}}{dr}- \tag{1.8}$$

$$-\frac{3-\nu}{1-\nu} inu_r^{(n)} = -\frac{4in}{1-\nu}\chi(r), \quad (R<r<\infty)\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и соотношениям

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(n)}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{du_r^{(n)}}{dr} + \frac{\nu}{r}u_r^{(n)} - \frac{in\nu}{r}u_\varphi^{(n)} - \frac{2\nu}{r}\chi(r)\right] \\
\sigma_\varphi^{(n)}(r) &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{du_r^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r}u_r^{(n)} - \frac{in}{r}u_\varphi^{(n)} - \frac{2}{r}\chi(r)\right] \\
\tau_{r\varphi}^{(n)}(r) &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{du_\varphi^{(n)}}{dr} - \frac{1}{r}u_\varphi^{(n)} - \frac{in}{r}u_r^{(n)}\right] \quad (R<r<\infty)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

При этом соотношения (1.4) и (1.6) для соответствующих трансформант будут иметь вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{0r}^{(n)}(R) = \sigma_r^{(n)}(R) = p_n, \quad \tau_{0r\varphi}^{(n)}(R) = \tau_{r\varphi}^{(n)}(R) = 0 \\
\{\sigma_r^{(n)}(r), \sigma_\varphi^{(n)}(r), \tau_{r\varphi}^{(n)}(r)\} \to 0 \text{ при } r\to\infty
\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$p_n = \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\varphi)e^{in\varphi}d\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\varphi)\cos n\varphi d\varphi \tag{1.11}$$

Для построения частного решения $v_r^{(n)}(r)$, $v_\varphi^{(n)}(r)$ системы (1.8) доопределим ее уравнения на интервал $0<r<R$, полагая на этом интервале правые части равными нулю. Применяя к полученным соотношениям интегральное преобразование Меллина, определяемое формулами

$$f_\lambda = \int_0^\infty f(r)r^{\lambda-1}dr, \quad f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f_\lambda r^{-\lambda}d\lambda$$

получим следующие зависимости:

$$v_r^{(n)}(r) = \int_R^{R+l} G_1^{(n)}(r,\xi)\chi(\xi)d\xi, \quad v_\varphi^{(n)}(r) = \int_R^{R+l} G_2^{(n)}(r,\xi)\chi(\xi)d\xi \tag{1.12}$$

$$G_1^{(0)}(r,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1+\nu}{\xi}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-1} & (r>\xi) \\ \dfrac{1-\nu}{\xi}\left(\dfrac{r}{\xi}\right) & (r<\xi) \end{cases}$$

$$G_1^{(1)}(r,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi}\dfrac{3(1+\nu)}{4}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-2} & (r>\xi) \\ \dfrac{1}{\xi}\left[\dfrac{1-\nu}{2} + \dfrac{1-3\nu}{4}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^2\right] & (r<\xi) \end{cases}$$

$$G_1^{(n)}(r,\xi)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{4\xi}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-n}\left\{[2(1-\nu)+n(1+\nu)]\dfrac{r}{\xi}-(1+\nu)(2+n)\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-1}\right\} & (r>\xi)\\ \dfrac{1}{4\xi}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{n}\left\{[2(1-\nu)-n(1+\nu)]\dfrac{r}{\xi}-(1+\nu)(2-n)\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-1}\right\} & (r<\xi)\end{cases}$$

$$G_2^{(0)}(r,\xi)=0,\quad G_2^{(1)}(r,\xi)=\begin{cases}\dfrac{i}{\xi}\dfrac{3(1+\nu)}{4}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-2} & (r>\xi)\\ -\dfrac{i}{\xi}\left[\dfrac{1-\nu}{2}-\dfrac{5+\nu}{4}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{2}\right] & (r<\xi)\end{cases}\tag{1.13}$$

$$G_2^{(n)}(r,\xi)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{i}{4\xi}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-n}\left\{[4-(1+\nu)n]\dfrac{r}{\xi}+(1+\nu)(2+n)\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-1}\right\} & (r>\xi, n\geqslant2)\\ \dfrac{i}{4\xi}\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{n}\left\{[4+(1+\nu)n]\dfrac{r}{\xi}+(1+\nu)(2-n)\left(\dfrac{r}{\xi}\right)^{-1}\right\} & (r<\xi)\end{cases}$$

$$G_1^{(-n)}(r,\xi)=G_1^{(n)}(r,\xi),\quad G_2^{(-n)}(r,\xi)=G_2^{(n)}(r,\xi)\quad(n=1,2,\ldots)$$

Разыскивая общее решение однородной системы (1.8) в виде

$$w_r^{(n)}(r)=\gamma_1^{(n)}r^k,\quad w_\varphi^{(n)}(r)=\gamma_2^{(n)}r^k\quad(n=0,\pm1,\ldots)\tag{1.14}$$

после некоторых преобразований получим

$$w_r^{(0)}(r)=c_1^{(0)}r+c_2^{(0)}\frac{1}{r},\quad w_\varphi^{(0)}(r)=c_3^{(0)}r+c_4^{(0)}\frac{1}{r}$$

$$w_r^{(1)}(r)=-i\frac{1-3\nu}{5+\nu}c_1^{(1)}r^2-ic_2^{(1)}r^{-2}+ic_3^{(1)}-i\frac{1+\nu}{3-\nu}c_4^{(1)}+ic_4^{(1)}\ln r$$

$$w_\varphi^{(1)}(r)=c_1^{(1)}r^2+c_2^{(1)}r^{-2}+c_3^{(1)}+c_4^{(1)}\ln r$$

$$w_r^{(n)}(r)=i[q_nc_1^{(n)}r^{1-n}+c_2^{(n)}r^{-1+n}-q_{-n}c_3^{(n)}r^{1+n}-c_4^{(n)}r^{-1-n}]\quad(n\geqslant2)\tag{1.15}$$

$$w_\varphi^{(n)}(r)=c_1^{(n)}r^{1-n}+c_2^{(n)}r^{-1+n}+c_3^{(n)}r^{1+n}+c_4^{(n)}r^{-1-n}\quad(n\geqslant2)$$

$$w_r^{(-n)}(r)=\overline{w_r^{(n)}(r)},\quad w_\varphi^{(-n)}(r)=\overline{w_\varphi^{(n)}(r)}\quad(n\geqslant1)$$

$$q_n=[2(1-\nu)+n(1+\nu)]/[4-(1+\nu)n]\quad(n\geqslant2)$$

Подставляя сумму общего (1.15) и частного (1.12) решений системы (1.8) в граничные условия (1.10), для постоянных $c_i^{(n)}$ будем иметь

$$c_1^{(0)}=0,\quad c_2^{(0)}=(1+\nu)R^2\int_R^{R+l}\frac{1}{\xi^2}\chi(\xi)\,d\xi-\frac{1+\nu}{E}R^2p_0,\quad c_4^{(0)}=0\tag{1.16}$$

$$c_1^{(1)}=0,\quad c_2^{(1)}=\frac{i(1+\nu)}{4}R^4\int_R^{R+l}\frac{1}{\xi^3}\chi(\xi)\,d\xi-\frac{i(1-\nu^2)}{8E}R^3p_1$$

$$c_4^{(1)}=\frac{-i(1+\nu)(3-\nu)}{4E}Rp_1,\quad c_2^{(n)}=c_3^{(n)}=0\quad(n\geqslant 2)$$

$$c_1^{(n)}=\frac{4-(1+\nu)n}{4}iR^{2n}\left[(n+1)\int_R^{R+l}\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\xi^{n+2}}-\frac{n-2}{R^2}\int_R^{R+l}\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\xi^n}\right]+$$

$$+\frac{i[4-(1+\nu)n]}{2(n-1)E}R^n p_n$$

$$c_4^{(n)}=\frac{1+\nu}{4}iR^{2n}\left[n^2R^2\int_R^{R+l}\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\xi^{n+2}}-(n-1)(n-2)\int_R^{R+l}\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\xi^n}\right]+$$

$$+\frac{i(1+\nu)n}{2(n+1)E}R^{n+2}p_n\qquad(n\geqslant 2)$$

Константы $c_3^{(0)}$ и $c_3^{(1)}$, не вошедшие в выражения для напряжений, остаются неопределенными — они характеризуют жесткое перемещение плоскости.

Рассмотрим, далее, шайбу. Применим, как и выше, к уравнениям (1.1) и (1.2) конечное преобразование Фурье по φ. Учитывая, что перемещения и напряжения в шайбе всюду непрерывны, относительно их трансформант Фурье придем снова к системе (1.8) и соотношениям (1.9), но уже при $\chi(r)=0$.

Используя решение (1.15) однородной системы (1.8), а также учитывая условия (1.10) для трансформант напряжений на контуре шайбы и необходимость особенности $1/r$ для напряжений [4] в центре шайбы (точка приложения сосредоточенной силы P), получим в итоге следующие выражения для трансформант Фурье $u_{0r}^{(n)}(r)$, $u_{0\varphi}^{(n)}(r)$ перемещений в шайбе:

$$u_{0r}^{(0)}(r)=D_1^{(0)}r,\quad u_{0\varphi}^{(0)}(r)=D_3^{(0)}r$$

$$u_{0r}^{(1)}(r)=-i\frac{1-3\nu_0}{5+\nu_0}D_1^{(1)}r^2+iD_3^{(1)}-i\frac{1+\nu_0}{3-\nu_0}D_4^{(1)}+iD_4^{(1)}\ln r\qquad(1.17)$$

$$u_{0\varphi}^{(1)}(r)=D_1^{(1)}r^2+D_3^{(1)}+D_4^{(1)}\ln r$$

$$u_{0r}^{(n)}(r)=i[D_2^{(n)}r^{-1+n}-q_{-n}D_3^{(n)}r^{1+n}]\quad(n\geqslant 2)$$

$$u_{0\varphi}^{(n)}(r)=D_2^{(n)}r^{-1+n}+D_3^{(n)}r^{1+n}\quad(n\geqslant 2)$$

$$u_{0r}^{(-n)}(r)=u_{0r}^{(n)}(r),\quad u_{0\varphi}^{(-n)}(r)=u_{0\varphi}^{(n)}(r)\quad(n\geqslant 1)$$

$$D_1^{(0)}=\frac{1-\nu_0}{E_0}p_0,\quad D_1^{(1)}=\frac{i(1-\nu_0)(5+\nu_0)}{8RE_0}p_1,\quad D_4^{(1)}=\frac{-i(1+\nu_0)(3-\nu_0)}{4E_0}Rp_1$$

$$D_2^{(n)}=-\frac{i(1+\nu_0)n}{2(n-1)E_0}p_nR^{2-n},\quad D_3^{(n)}=\frac{i[4+n(1+\nu_0)]}{2(n+1)E_0}p_nR^{-n}\quad(n\geqslant 2)\qquad(1.18)$$

Константы $D_3^{(0)}$ и $D_3^{(1)}$, остающиеся неопределенными, характеризуют жесткое перемещение шайбы.

Заменим всюду величины p_n их выражениями, согласно (1.11), и перейдем интегрированием по частям от функции $\chi(r)$ к ее производной $\chi'(r)$.

Применяя к трансформантам $\sigma_\varphi^{(n)}(r)$, $u_{0r}^{(n)}(r)$ и $u_r^{(n)}(r)$ обратное преобразование Фурье, суммируя в полученных выражениях ряды с помощью формул из [5] и реализуя оставшиеся два условия (1.3) и (1.5) (второе из условий (1.3) выполняется автоматически), придем к системе сингулярных интегральных уравнений относительно функций $\chi'(r)$ и $p(\varphi)$, которая после замены

$$g'(x)=\chi'(R+lx),\quad \sigma(\varphi)=p(\varphi)/E,\quad Q(x)=q(R+lx)/E \tag{1.19}$$

и интегрирования обеих частей первого уравнения по x от 0 до x приводится к виду

$$\int_0^1\left[\ln\left|\frac{t+x}{t-x}\right|+G(t,x)\right]g'(t)\,dt+\int_{-\alpha}^{\alpha}L(\varphi,x)\sigma(\varphi)\,d\varphi=f(x)\quad(0<x<1) \tag{1.20}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[A\ln\frac{1}{2|\sin{}^1/_2(\varphi-\psi)|}+\Phi(\varphi,\psi)\right]\sigma(\psi)\,d\psi+\int_0^1K(\varphi,t)g'(t)\,dt=$$
$$=C\cos\varphi+\pi\frac{\Delta}{R}\quad(|\varphi|<\alpha) \tag{1.21}$$

$$G(t,x)=\ln\left(1+\frac{\lambda tx}{t+x}\right)-$$
$$-\frac{2+\lambda t}{2(1+\lambda t)}xt\left[\frac{2+\lambda t}{(x+t+\lambda xt)^2}-\frac{\lambda(3+2\lambda t)}{x+t+\lambda xt}+\frac{2\lambda^2}{1+\lambda x}\right]$$

$$L(\varphi,x)=-\frac{x}{1+\lambda x}-\left[\frac{1-\nu}{2\lambda}\ln(1+\lambda x)+\frac{3-\nu}{4}\frac{x(2+\lambda x)}{(1+\lambda x)^2}\right]\cos\varphi+$$
$$+\frac{\lambda x^2(1+\cos\varphi)}{\lambda^2x^2+2(1+\lambda x)(1-\cos\varphi)}-\frac{\pi}{\lambda}\sin|\varphi|+\frac{2}{\lambda}\sin\varphi\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\lambda x}{\lambda x}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\Phi(\varphi,\psi)={}^1/_2[F(\varphi-\psi)+F(\varphi+\psi)]\qquad F(y)=-\frac{E}{E_0}+\frac{a+6(E+E_0)}{4E_0}\cos y+$$
$$+\frac{a}{2E_0}y\sin y-\frac{a\pi}{2E_0}\sin|y|-\frac{4(E+E_0)}{E_0}\sin^2\frac{y}{2}\ln\frac{1}{2|\sin{}^1/_2y|}$$

$$K(\varphi,t)=\lambda\left\{\frac{\lambda t(2+\lambda t)}{2(1+\lambda t)^2}\cos\varphi+\frac{2+\lambda t}{1+\lambda t}\left[\frac{\lambda t(1-\cos\varphi)}{\lambda^2t^2+2(1+\lambda t)(1-\cos\varphi)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\lambda^2t^2\cos\varphi}{\lambda^2t^2+2(1+\lambda t)(1-\cos\varphi)}\right]+\pi\sin|\varphi|-2\sin\varphi\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\lambda t}{\lambda t}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \tag{1.22}$$

$$A=\frac{2(E+E_0)}{E_0},\qquad a=(1-\nu)E_0-(1-\nu_0)E,\quad \lambda=\frac{l}{R},\quad f(x)=-2\pi\int_0^x Q(t)\,dt$$

где $\Delta=\delta_1>0$, если имеет место зазор δ_1, и $\Delta=-\delta_2<0$, если имеет место натяг δ_2.

Содержащиеся в уравнениях (1.20) неизвестный угол контакта α и неизвестная константа C должны быть определены из условий

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma(\varphi)\cos\varphi d\varphi = -\frac{P}{RE}, \quad \sigma(\pm\alpha)=0 \tag{1.23}$$

представляющих собой условие равновесия шайбы и условие обращения в нуль контактного давления на концах области контакта. Система уравнений (1.20), (1.21) и (1.23) полностью формулирует рассматриваемую задачу.

2. Возможные особенности функций $\sigma(\varphi)$ и $g'(t)$ при нулевых значениях аргументов (точка выхода разреза в зону контакта) определяются поведением ядер уравнений (1.20) и (1.21) в точке (0, 0), где они имеют разрыв непрерывности.

Очевидно, что характер искомых особенностей не зависит (ср., например, [6]) от величины зоны контакта, что позволяет ограничиться исследованием случая $\alpha=\pi$ (полный контакт). При этом уравнение (1.21) может быть разрешено относительно функции $\sigma(\varphi)$. Для этого следует ядра указанного уравнения и функцию $\sigma(\varphi)$ разложить в косинус-ряды Фурье по полярному углу и воспользоваться в первом интеграле ортогональностью косинусов. Приравнивая коэффициенты при $\cos n\varphi$ в обеих частях, получим коэффициенты Фурье σ_n искомой функции, что после применения формулы обратного преобразования дает

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sigma_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n\cos\varphi\right] = \frac{E_0}{(1-\nu_0)E+(1+\nu)E_0}\frac{\Delta}{R} - \\ &-\frac{P}{\pi RE}\cos\varphi - \frac{\lambda}{\pi}\frac{E_0}{E+E_0}g(0)\ln\frac{1}{2|\sin{}^1/_2\varphi|}+ \\ &+\frac{\lambda}{\pi}\frac{E_0}{E+E_0}\int_0^1\left\{\frac{\lambda t}{\lambda^2t^2+2(1-\cos\varphi)} - \right.\\ &\left.-\frac{4\lambda t(1-\cos\varphi)}{[\lambda^2t^2+2(1-\cos\varphi)]^2}+M^*(\varphi,t)\right\}g'(t)\,dt\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и далее звездочкой будем отмечать ограниченные функции.

При получении формулы (2.1) учтено вытекающее из условия равновесия (1.23) равенство $\sigma_1=-P/(RE)$.

Подставляя полученное выражение для $\sigma(\varphi)$ в (1.20), придем к интегральному уравнению, содержащему только функцию $g'(t)$. Дифференцируя обе части этого уравнения по x и выделяя в его ядре члены, содержащие особенности, получим

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left\{\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}+\left(1-\frac{E_0}{E+E_0}\right)\left[\frac{2t}{(x+t)^2}-\frac{4t^2}{(x+t)^3}\right]+\right.\\ &\left.+2\lambda\frac{E_0}{E+E_0}\ln(x+t)+N^*(x,t)\right\}g'(t)\,dt= \\ &=-2\lambda\frac{E_0}{E+E_0}g(0)\ln x-2\pi Q(x) \quad (0<x<1)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Покажем, что $g'(t)$ при $t\to 0$ ограничена. Для этого предположим вначале, что $g'(t)$ при $t\to 0$ представима в виде

$$g'(t)=t^{-\beta}\psi(t) \quad (0<\beta<1,\ \psi(0)=c\neq 0) \tag{2.3}$$

где $\psi(t)$ при $t=0$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем, большим β. Подставляя (2.3) в (2.2) и пользуясь асимптотическими формулами [7]:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\beta(t-x)}=\frac{\pi\operatorname{ctg}\beta\pi}{x^\beta}+I_1^*(x),\quad \int_0^1\frac{dt}{t^\beta(t+x)}=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\frac{1}{x^\beta}+I_2^*(x)$$

приходим к следующему соотношению:

$$\frac{c\pi}{\sin\beta\pi}\frac{1}{x^\beta}\left[\cos\beta\pi+1-2(\beta-1)^2\left(1-\frac{E_0}{E+E_0}\right)\right]+I^*(x)=$$
$$=-\lambda\frac{2E_0}{E+E_0}g(0)\ln x-2\pi Q(x)$$

Очевидно, что асимптотическое поведение обеих частей записанного равенства при $x\to 0$ не совпадает ни при каких значениях параметра $0<\beta<1$. Это означает, что особенность $g'(t)$, если таковая имеется, слабее степенной[1]. Изложенным выше приемом можно показать, что представление $g'(t)=\psi(t)\ln t$ $(\psi(0)=c\neq 0)$ также несправедливо. Переходя к случаю

$$g'(t)=\psi(t) \quad (\psi(0)=c\neq 0) \tag{2.4}$$

где $\psi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера при $t=0$, аналогичным путем приведем уравнение (2.2) к виду

$$-c\frac{2E_0}{E+E_0}\ln x+I^*(x)=-\lambda\frac{2E_0}{E+E_0}g(0)\ln x-2\pi Q(x)$$

Деля обе части полученного уравнения на $\ln x$ и переходя затем к пределу при $x\to 0$, получим

$$g'(0)=c=\lambda g(0) \tag{2.5}$$

Это соотношение подтверждает ограниченность функции $g'(t)$ при $t\to 0$ и дает, кроме того, ее значение в указанной точке.

Отметим, что подобный анализ поведения функции $g'(t)$ на другом конце трещины приводит к обычной корневой особенности.

Перейдем к выяснению асимптотики $\sigma(\varphi)$ при $\varphi\to 0$. Для этого подставим (2.4) в формулу (2.1). Учитывая (2.5) и асимптотику $2|\sin{}^1/_2\varphi|\sim\varphi$, $2(1-\cos\varphi)\sim\varphi$ при $\varphi\to+0$, получим

$$\sigma(\varphi)=g(0)\frac{\lambda}{\pi}\frac{E_0}{E+E_0}\left\{\ln\varphi+\lambda\int_0^1\left[\frac{\lambda t}{\lambda^2t^2+\varphi^2}-\frac{2\lambda t\varphi^2}{(\lambda^2t^2+\varphi^2)^2}\right]dt\right\}+I^*(\varphi) \tag{2.6}$$

Фигурирующий здесь интеграл равен $-(1/\lambda)\ln\varphi+I_1^*(\varphi)$. Таким образом, из формулы (2.6) следует, что искомое контактное напряжение при $\varphi\to 0$ также есть функция ограниченная.

---

[1] Особенность сильнее указанной степенной не рассматривается ввиду ее физической несостоятельности.

3. Приближенное решение системы интегральных уравнений (1.20), (1.21), (1.23) будем строить методом ортогональных многочленов, опираясь на следующие [8] спектральные соотношения для полиномов Чебышева [1] первого рода $T_m(x)$:

$$\int_0^1 \ln\left|\frac{t+x}{t-x}\right| \frac{T_{2m+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2m+1} T_{2m+1}(x) \tag{3.1}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2|\sin {}^1/_2(\varphi-\psi)|} \frac{T_{2m}(\eta^*)}{\sqrt{\sin^2 {}^1/_2\alpha - \sin^2 {}^1/_2\psi}} \cos\frac{1}{2}\psi d\psi = \sigma_m T_{2m}(\xi^*)$$

$$0<x<1,\ |\varphi|<\alpha,\ m=0,1,\ldots;\ \sigma_m=\pi/m\ (m=1,2,\ldots)$$

$$\eta^*=\sin {}^1/_2\psi/\sin {}^1/_2\alpha,\ \xi^*=\sin {}^1/_2\varphi/\sin {}^1/_2\alpha,\ \sigma_0=-2\pi\ln\sin {}^1/_2\alpha$$

В соответствии с этими соотношениями, а также имея в виду результаты проведенного выше исследования, неизвестные функции разыскиваем в виде рядов

$$\sigma(\varphi) = \frac{\cos {}^1/_2\varphi}{\sqrt{\sin^2 {}^1/_2\alpha - \sin^2 {}^1/_2\varphi}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_{2m}(\xi^*) \tag{3.2}$$

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left[\lambda g(0) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m T_{2m+1}(t)\right] \tag{3.3}$$

Учитывая вытекающие из представлений (1.22) свойства ядер $G(0, x)=G(t, 0)=L(\varphi, 0)=K(\varphi, 0)=0$, аппроксимируем их следующим образом:

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix} G(t,x) \\ L(\varphi,x) \end{matrix}\right\} &\approx \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} T_{2i+1}(x) \left\{\begin{matrix} G_{ij}T_{2j+1}(t) \\ L_{ij}T_{2j}(\xi^*) \end{matrix}\right\} \\
\left\{\begin{matrix} K(\varphi,t) \\ \Phi(\varphi,\psi) \end{matrix}\right\} &\approx \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} T_{2j}(\xi^*) \left\{\begin{matrix} K_{ij}T_{2i+1}(t) \\ \Phi_{ij}T_{2i}(\eta^*) \end{matrix}\right\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Коэффициенты этих разложений могут быть вычислены методом, приведенным в [9].

Применяя известные [10] приемы метода ортогональных многочленов, приходим к конечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^2}{4(2n+1)} b_n + \frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\mu_m L_{nm} a_m + \frac{\pi}{4} G_{nm} b_m\right) = F_n \quad (n=0,1,\ldots,N-1) \\
&A\sigma_n\mu_n a_n + \mu_n \sum_{m=0}^{N-1}\left(\mu_m \Phi_{mn} a_m + \frac{\pi}{4} K_{mn} b_m\right) = \Psi_n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$F_n = f_n - \lambda g(0)\rho_n, \quad \Psi_n = C\psi_n - \lambda g(0)\varkappa_n + 2\pi^2\delta_{0n}\frac{\Delta}{R}$$

[1] В соотношении (2.5) работы [8] имеется опечатка: вместо $[\cos\eta, \cos\xi]$ следует читать $[\sin {}^1/_2\eta, \sin {}^1/_2\xi]$.

$$\varkappa_n=\mu_n\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(-1)^i}{2i+1}K_{in},\quad f_n=\int_0^1 f(x)\frac{T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\rho_n=\frac{(-1)^n\pi}{(2n+1)^2}+\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}G_{nk}$$

$$\psi_n=\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\frac{T_{2n}(\xi^*)\cos{}^1/_2\varphi}{\sqrt{\sin^2{}^1/_2\alpha-\sin^2{}^1/_2\varphi}}d\varphi$$

$\psi_n=\pi(1+\cos\alpha)$ при $n=0$, $\psi_n=-{}^1/_2\pi(1-\cos\alpha)$ при $n=1$

где δ_{mn} — символ Кронекера (при $n\geqslant2$ величина $\psi_n=0$).

Систему (3.5) следует дополнить равенствами

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{4(2n+1)}{\pi^2}\left[f_n-\lambda g(0)\frac{(-1)^n\pi}{(2n+1)^2}\right]\quad(n\geqslant N)\tag{3.6}$$

Для отыскания неизвестных постоянных C и α служат вытекающие из условий (1.23) равенства

$$\sum_{m=0}^{N-1}a_m\psi_m=-\frac{P}{RE},\quad \sum_{m=0}^{N-1}a_m=0\tag{3.7}$$

Неизвестное раскрытие трещины под шайбой определяется по формуле

$$g(0)=-\frac{2}{2+\lambda\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}b_m\tag{3.8}$$

полученной интегрированием соотношения (3.3) на интервале с учетом равенства $g(1)=0$.

Отметим, что для вычисления $g(0)$ в сумме (3.8) следует удержать первые N слагаемых. Тогда искомые коэффициенты a_m, b_m $(m=0, 1,\ldots$ $\ldots, N-1)$ находятся путем совместного решения системы уравнений (3.5), (3.7), (3.8). Неизвестный параметр α входит в указанные уравнения нелинейно, поэтому целесообразно при решении системы углом контакта α задаться. При этом первое из условий (3.7) позволит определить соответствующую прижимающую силу P. Остальные коэффициенты разложений (3.2), (3.3) определяются согласно равенству (3.6).

Следует подчеркнуть, что второе из условий (3.7) позволяет получить для контактного давления $\sigma(\varphi)$ качественно отличное от (3.2) представление

$$\sigma(\varphi)=-2\frac{\cos{}^1/_2\varphi}{\sin^2{}^1/_2\alpha}\sqrt{\sin^2{}^1/_2\alpha-\sin^2{}^1/_2\varphi}\sum_{m=1}^{N-1}a_mU_{m-1}^2(\xi^*)\quad(|\varphi|<\alpha)\tag{3.9}$$

устранив тем самым кажущееся противоречие между поведением функции (3.2) в концевых точках области контакта и условием $\sigma(\pm\alpha)=0$.

Справедливость формулы (3.9) подтверждается следующими тождественными преобразованиями ($x=\cos\varphi$, $\varphi=\arccos x$):

$$\sum_{m=0}^{N-1}a_mT_{2m}(x)=\sum_{m=0}^{N-1}a_m[T_{2m}(x)-1]=\sum_{m=0}^{N-1}a_m(\cos 2m\varphi-1)=$$

$$=-2\sin^2\arccos x\sum_{m=1}^{N-1}a_m\left(\frac{\sin m\arccos x}{\sin\arccos x}\right)^2=-2(1-x^2)\sum_{m=1}^{N-1}a_mU_{m-1}^2(x)$$

где $U_m(x)$ — полиномы Чебышева второго рода. Таким образом, для вычисления контактного давления вместо (3.2) следует пользоваться эквивалентной ей формулой (3.9).

Коэффициент интенсивности напряжений у острия трещины находится [11] из равенства

$$K_I=-E\sqrt{\frac{l}{2}}\lim_{t\to1}[\sqrt{1-t}\,g'(t)]=-\frac{E\sqrt{l}}{2}\left[\lambda g(0)+\sum_{m=0}^{\infty}b_m\right]\tag{3.10}$$

а перемещения ее берегов определяются с помощью разложения

$$\chi(R+lx)=lg(x)=l\left\{\lambda g(0)\left(\arcsin x-\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}b_m\cos[(2m+1)\arcsin x]\right\}\tag{3.11}$$

4. Анализ уравнений (3.5), (3.7), (3.8) в случае отсутствия нагрузки на берега трещины и при равенстве радиусов шайбы и отверстия $\Delta=0$ позволяет сделать следующий вывод. Величина соответствующего угла контакта $\alpha=\alpha_*$ не зависит от величины приложенной к шайбе силы P. Если же имеется некоторый зазор (натяг) δ, то угол контакта α, изменяясь вместе с силой P, тем не менее при всяком ее значении всегда меньше (больше) угла α_*, приближаясь к этому значению с увеличением P. Эти факты, известные в случае отсутствия трещины (в [12] угол α_* назван критическим), оказываются справедливыми и при ее наличии.

λ	$\alpha=30$	$\alpha=60$	α_*	$\alpha=90$	$\alpha=120$	$\alpha=150$	$\alpha=180$
			вариант 1				
0.0	0.126	0.937	84.8°	−9.06	−2.17	−1.68	−1.57
0.1	0.125 −0.353 0.879	0.939 0.105 1.040	84.7°	−8.86 0.281 1.073	−2.16 0.383 1.069	−1.67 0.451 1.061	−1.56 0.477 1.058
1.0	0.123 −0.050 0.862	0.993 0.131 1.084	83.0°	−6.59 0.227 1.219	−2.02 0.289 1.263	−1.60 0.330 1.268	−1.50 0.346 1.266
10.0	0.129 0.053 1.035	1.204 0.154 1.185	78.0°	−3.66 0.218 1.301	−1.69 0.260 1.332	−1.41 0.287 1.321	−1.34 0.297 1.311
			вариант 2				
0.0	0.230	1.738	82.4°	−10.03	−3.26	−2.58	−2.41
0.1	0.228 −0.328 0.792	1.746 0.106 1.076	82.2°	9.79 0.273 1.135	−3.24 0.372 1.126	−2.56 0.438 1.112	−2.40 0.464 1.107
1.0	0.221 −0.40 0.765	1.926 0.126 1.140	79.7°	−7.32 0.212 1.358	−2.98 0.268 1.428	−2.40 0.305 1.436	−2.26 0.319 1.434
10.0	0.242 0.053 1.069	2.849 0.150 1.339	72.3°	−4.00 0.203 1.524	2.36 0.237 1.558	−2.04 0.259 1.530	−1.95 0.267 1.513

В таблице даны некоторые результаты полученного на ЭЦВМ решения при отсутствии внешней нагрузки на берегах трещины. Рассматривались два характерных случая: материалы шайбы и полуплоскости одинаковы $E=E_0$, $\nu=\nu_0=0.3$ (вариант 1) и шайба абсолютно жесткая $E_0=\infty$, $\nu=0.3$ (вариант 2). Для указанных в таблице значений $\lambda=l/R$ и задаваемых углов контакта α в соответствующих ее строках приведены, последовательно сверху вниз, безразмерные величины приведенной силы $P_*=P/(\Delta E)$, приведенного коэффициента интенсивности $K_*=K_{\mathrm{I}}R/(P\sqrt{l})$, а также отношения ρ величины наибольшего контактного напряжения под шайбой (при $\varphi=0$) к таковому в случае отсутствия трещины. В отдельном столбце приведены величины критических углов α_*. Результаты, расположенные в таблице правее этого столбца, соответствуют задачам с натягом ($\Delta<0$), а левее – с зазором ($\Delta>0$).

Вычисления проводились для значений $N=4$, 8, 12, 16 и подтвердили эффективность полученного приближенного решения. Например, при $\lambda=1$ в обоих вариантах все результаты, соответствующие $N=12$ и $N=16$, отличаются менее чем на 1%. Это справедливо для величин P_*, α_* и ρ и при других значениях λ. Сходимость K_* при этом несколько ухудшается (различие в двух последних приближениях составляет около 5%).

Вычисление формы трещины по формуле (3.11) показало, что в случае отсутствия нормальной нагрузки на берегах разреза с уменьшением угла контакта ($\alpha=30°$ и меньше) происходит смыкание и последующее внедрение берегов трещины на участках, прилегающих к ее концам (при небольших длинах трещины эти участки могут смыкаться).

Физическая некорректность этих результатов отразилась, в частности, на значениях коэффициента интенсивности в острие трещины – соответствующие значения K_* отрицательны (см. таблицу). Для того чтобы задача была корректной и при малых углах контакта, к берегам разреза следует приложить разрывающую нагрузку (либо подвергнуть пластинку растяжению на ∞).

Поступила 13 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
2. *Мелкумян С. А.* Контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Докл. АН АрмССР, 1972, т. 58, № 2.
3. *Тоноян В. С., Минасян А. Ф.* Несимметричная контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Докл. АН АрмССР, 1975, т. 61, № 5.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. *Ворович И. И., Копасенко В. В.* Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., «Наука», 1977.
8. *Попов Г. Я.* По поводу одной плоской контактной задачи для упругой полуполосы. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4.
9. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
10. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
11. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976.
12. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К теории контактных задач для цилиндрических тел с учетом сил трения. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.