

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШТАМПОВ  
С ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМ РАДИУСОМ

И. В. АНАНЬЕВ, В. А. БАБЕШКО

(Ростов-на-Дону)

Метод факторизации, разработанный для решения динамических контактных задач в [1, 2], позволяет изучить все режимы колебания слоистой среды при всех частотах. Однако его эффективность падает, если размеры штампа уменьшаются.

Метод Кука [3], применявшийся для решения задач о вибрации полупространства, оказывается малоэффективным. В связи с этим необходима модификация этого метода, свободная от указанного недостатка. В данной работе предлагается метод, позволяющий эффективно, с использованием факторизации решать задачи о вибрации на слоистой среде круглого в плане штампа с малым относительным радиусом. Этот метод основан на развитии подхода, предложенного в [4], для построения асимптотического решения статической задачи. Приводятся результаты численного анализа ряда конкретных задач.

1. Интегральное уравнение задачи о вибрации штампа радиуса  $a$  на упругой слоистой среде или среде с переменными по глубине модулями принимает следующий вид:

$$\int_0^a k(r, \rho) q(\rho) \rho d\rho = f(r) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1.1)$$

$$k(r, \rho) = \int_0^\infty K^*(u) J_0(ur) J_0(u\rho) u du$$

Четная, аналитическая в комплексной плоскости функция  $K^*(u)$  может иметь на вещественной оси полюсы и точки ветвления с разрезом в первом и третьем квадрантах. Полюсы могут оказываться кратными как в начале координат, так и в произвольных точках вещественной оси. В этом случае решение отыскивается на подпространствах, ортогональных функциям  $J_0(\xi_k r)$ ,  $\xi_k$  — кратный полюс.

Это уравнение с помощью преобразований [3] приводится к виду

$$\int_{-a}^a k(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x), \quad |x| \leq a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u| K^*(u) e^{iux} du = k(x) \quad (1.2)$$

при этом имеют место следующие формулы перехода:

$$q(\rho) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^a \frac{t\varphi(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \quad (1.3)$$

$$\psi(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho \frac{rf(r)dr}{(\rho^2 - r^2)^{1/2}}$$

Изучим свойства решения уравнения (1.2). Введенная в рассмотрение функция  $K(u)$  имеет вид

$$K(u) = \frac{|u|}{\sqrt{u^2 + B^2}} R(u), \quad K(\infty) = 1$$

Здесь радикал определен в плоскости с разрезом, соединяющим точки  $\pm iB$  через бесконечность, и положителен в нуле;  $R(u)$  — рациональная функция — отношение двух четных полиномов одинакового порядка.

Справедливы следующие теоремы:

*Теорема 1.* Пусть  $\psi(x) \in C_1^\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Тогда интегральное уравнение (1.2) однозначно разрешимо в  $C_1$  если для уравнения (1.1) справедлива теорема единственности относительно теорем единственности для уравнения (1.1) [5, 6].

*Теорема 2.* Пусть  $K(u)$  удовлетворяет условию

$$|1 - K(u)| |u|^{-1} / |K^*(u)| (1 + |u|)^\alpha < \varepsilon, \quad \alpha > 1/2$$

Тогда  $\max_{x \in [-a, a]} |\varphi(x) - \varphi_1(x)| < M\delta \|\psi\|_{C_1^\lambda}$  ( $\lambda > 0$ )

Здесь  $\varphi_1(x)$  — решение интегрального уравнения (1.2) с функцией  $K(u)$ . Приведенные теоремы являются основанием для решения вместо интегрального уравнения (1.1) с функцией  $K^*(u)$  соответствующего уравнения (1.2) с функцией  $K(u)$ .

2. Уравнение (1.2) представимо в виде

$$K(u) \Phi(u) = L_1^*(u) + \Psi^*(u) + L_2^*(u)$$

где  $L_1^*(u)$  и  $L_2^*(u)$  — интегральные преобразования продолжения функции  $\psi(x)$  в области  $-\infty \leq r \leq a$  и  $a \leq r \leq \infty$  соответственно, с сохранением гладкости. При этом продолжение построено таким образом, что  $\Psi(0) = 0$ . В частном случае, если выбрать  $\psi(x)$  в виде  $\psi(x) = e^{i\eta x}$ , получим

$$\Psi^*(u) = \frac{1}{iu} (e^{iua} - e^{-iua}), \quad \eta = 0$$

Сделаем преобразование

$$\Psi(u) = \Psi^*(u) + \Psi_1(u), \quad \Psi_1(u) = \frac{1}{iu} (e^{iua} - e^{-iua} - e^{2iua} + e^{-2iua})$$

Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$K(u) \Phi(u) = L_1(u) + \Psi(u) + L_2(u) \quad (2.1)$$

$$L_1(u) = L_1^*(u) - e^{-2iau} - e^{iau}, \quad L_2(u) = L_2^*(u) + e^{-iau} + e^{2iau}$$

Очевидно, что теперь  $\lim_{u \rightarrow 0} (\Psi(u)/K(u)) = 0$ .

Сведем интегральное уравнение (1.2) с помощью преобразования Фурье к интегральным уравнениям второго рода [2, 7]:

$$X^+(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_-(u) e^{-2iau}}{K_+(u) (u+z)} X^+(u) du + v^+(z)$$

$$v^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi_+(u) du}{K_-(u) (u-z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi_-(u) du}{K_+(u) (u+z)} \quad (2.2)$$

Изучим свойства функций  $X^+(u)$ . Последняя является регулярной в верхней полуплоскости и непрерывной вплоть до контура  $\Gamma$  (фиг. 1). На вещественной оси она имеет положительные полюсы. При приближении к началу координат она обладает следующим поведением:

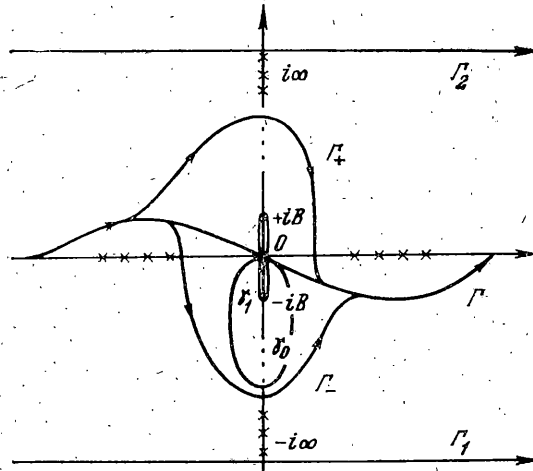
$$X^+(u) = cu^{1/2} \ln u \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln u}\right) \right], \quad u \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Это свойство устанавливается в результате обращения интегрального оператора

$$SX = X(\sigma) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(\tau)}{\tau + \sigma} d\tau$$

являющегося регуляризатором для (2.2), поскольку в отличие от случаев, рассмотренных в [7], оператор в правой части не является вполне непрерывным.

Пусть  $z_k$  — нули  $K(u)$ , причем если  $\text{Im}(z_k) = 0$ , то  $\text{Re}(z_k) > 0$ , иначе  $\text{Im}(z_k) > 0$ . Функция  $K_+(u)$  регулярна в верхней полуплоскости, в ниж-



Фиг. 1

ней полуплоскости  $K_+(u)$  имеет нули  $(-z_k)$ , полюсы  $(-\xi_k)$  и разрез  $(0, -iB)$ . Если исходный контур  $\Gamma$  продеформировать в контур  $\Gamma_1$  (фиг. 1), то уравнение (2.2) приведем к виду

$$X^+(z) = + \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{z - z_k} X^+(-z_k) + v^{++}(z), \quad t_k = - \frac{K_+(z_k) e^{2iaz_k}}{[K_-(z_k)]'} \quad (2.4)$$

$$v^{++}(z) = v^+(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{K_-(u) e^{-2iau} X^+(u)}{K_+(u) (u+z)} du -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{K_-(u) e^{-2iau}}{K_+(u) (u+z)} X^+(u) du$$

Определим  $X^+(-z_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Для этого в (2.4) положим  $z = -z_i$ , тогда матрица  $M^+$  системы (2.4) примет вид

$$M^+ = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{t_1}{z_1 + z_1}\right) \dots \left(\frac{t_n}{z_1 + z_n}\right) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \left(\delta_{ik} + \frac{t_k}{z_i + z_k}\right) \dots \\ \dots \\ \left(\frac{t_1}{z_n + z_1}\right) \dots \left(1 + \frac{t_n}{z_n + z_n}\right) \end{pmatrix}$$

Если  $N^+$  — матрица, обратная к  $M^+$ , то

$$X^+(-z_i) = \sum_{j=1}^n N_{ij}^+ v^{++}(-z_j)$$

Следовательно

$$X^+(z) = \sum_{h=1}^n \frac{t_h}{z - z_h} \sum_{j=1}^n N_{hj} v^{++}(-z_j) + v^{++}(z), \quad \text{Im } z < 0$$

Поскольку  $L_1^-(u)$ ,  $L_2^-(u)$  имеют вид

$$L_1^-(u) = K_-(u) \frac{X^+(u)}{2}, \quad L_2^-(u) = K_+(u) \frac{X^+(-u)}{2}$$

то в полосе регулярности (2.1) представимо в форме

$$\Phi(u) = \frac{\Psi(u)}{K(u)} + \frac{X^+(-u)}{2K_-(u)} e^{iau} + \frac{X^+(u)}{2K_+(u)} e^{-iau} \quad (2.5)$$

Существование полосы регулярности следует из того, что  $K_-(u)$  регулярна на контуре  $\Gamma$  и ниже, а  $K_+(u)$  регулярна на контуре  $\Gamma$  и выше, следовательно,  $K(u) = K_+(u)K_-(u)$  регулярна в  $\varepsilon$ -полосе относительно  $\Gamma$ .

Применяя в полосе регулярности преобразование Фурье к (2.5), получим

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Psi(u)}{K(u)} e^{-iuy} du + T(y) + A_1(y) + A_2(y) \quad (2.6)$$

$$T(y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{h=1}^n a_h^- \int_{\Gamma} \frac{e^{iu(a-y)}}{K_-(u)(u+z_h)} du + \frac{1}{4\pi} \sum_{h=1}^n a_h^+ \int_{\Gamma} \frac{e^{-iu(a+y)}}{K_+(u)(u-z_h)} du$$

$$A_1(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{v^{++}(-u)}{K_-(u)} e^{iu(a-y)} du, \quad A_2(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{v^{++}(u)}{K_+(u)} e^{-iu(a+y)} du$$

$$a_h^{\pm} = t_h \sum_{j=1}^n (\pm N_{hj}^+ v^{++}(-z_j))$$

Для вычисления  $v^+(u)$  рассмотрим интегралы

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi_+(u) du}{K_-(u)(u-z)}, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Psi_-(u) du}{K_+(u)(u+z)}$$

## Функция

$$K_-(u) \approx [P_n^-(u) \sqrt{iu}] / [\sqrt{B+iu} Q_n^-(u)]$$

регулярна в нижней полуплоскости, поэтому можно деформировать  $\Gamma$  в  $\Gamma_-$  (фиг. 1), причем  $|u| \gg B$ ,  $u \in \Gamma$ . Следовательно

$$\lim_{|u| \gg B} \frac{\sqrt{B+iu}}{\sqrt{iu}} \approx 1 + \frac{B}{2iu} + O\left(\frac{B^2}{u^2}\right)$$

$$I_1 \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} \frac{\Psi_+(u) du}{K_-(u)(u-z)} = \frac{1}{2\pi i} \left[ 2 \int_{\Gamma_-} \frac{e^{2iau} du}{iK_-(u)u(u-z)} - \right. \\ \left. - 2 \int_{\Gamma_-} \frac{du}{iK_-(u)u(u-z)} - \int_{\Gamma_-} \frac{e^{3iau} du}{iK_-(u)u(u-z)} + \int_{\Gamma_-} \frac{e^{-iau} du}{iK_-(u)u(u-z)} \right]$$

Поднимаем  $\Gamma_-$  в первом и третьем слагаемом до  $\Gamma_2$  и опускаем  $\Gamma_-$  во втором и четвертом слагаемом до  $\Gamma_1$ , получим

$$I_1 \approx - \sum_{h=1}^n \frac{ie^{2iaz_k}(2-e^{iaz_k})}{[K_-(z_h)]' z_h(z_h-z)} + \frac{i}{K_-(0)z} - \frac{i}{K_-(z)z} (2-e^{-iaz}), \quad K_{\pm} = K_{\pm}^{\circ} \frac{\sqrt{\mp iu}}{\sqrt{B \mp iu}}$$

где  $z$  лежит ниже  $\Gamma_-$ . Деформируем  $\Gamma$  в  $\Gamma_+$  (фиг. 1) и действуя аналогично, найдем

$$I_2 \approx - \sum_{h=1}^n \frac{ie^{2iaz_k}(2-e^{iaz_k})}{[K_-(z_h)]' z_h(z_h-z)} + \frac{i}{K_-(0)z} - \frac{i}{K_-(z)z} (2-e^{-iaz})$$

Следовательно,  $v^+(z) = 2I_1$ ,  $\text{Im } z < 0$ , поскольку интеграл вдоль  $\Gamma_1$  может быть сделан сколь угодно малым в нижней полуплоскости, а интеграл вдоль  $\gamma_1$ , согласно (2.3), стремится к нулю при  $B \rightarrow 0$ .

Для  $A_1(y)$ ,  $A_2(y)$ ,  $T(y)$  можно получить следующие выражения:

$$A_1(y) = \sum_{h=1}^n \frac{e^{2iaz_k}(2-e^{iaz_k})}{[K_-(z_h)]' z_h} \sum_{j=1}^n \frac{e^{iz_j(a-y)}}{[K_-(z_j)]'(z_j+z_h)} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{e^{iz_j(a-y)}}{[K_-(z_j)]' z_j} \left( \frac{1}{K_-(0)} - \frac{2-e^{iaz_j}}{K_+(z_j)} \right)$$

$$A_2(y) = \sum_{h=1}^n \frac{e^{2iaz_k}(2-e^{iaz_k})}{[K_-(z_h)]' z_h} \sum_{j=1}^n \frac{e^{iz_j(a+y)}}{[K_-(z_j)]'(z_j+z_h)} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{e^{iz_j(a+y)}}{[K_-(z_j)]' z_j} \left( \frac{1}{K_-(0)} - \frac{2-e^{iaz_j}}{K_+(z_j)} \right)$$

$$T(y) = \sum_{h=1}^n t_h \left[ \left( \sum_{j=1}^n \frac{e^{iaz_j}(e^{iyz_j} + e^{-iyz_j})}{[K_-(z_j)]'(z_h+z_j)} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \sum_{i=1}^n N_{ki} + \left( - \sum_{m=1}^n \frac{e^{2iaz_m}(2-e^{iaz_m})}{[K_-(z_m)]' z_m(z_m+z_i)} - \frac{1}{K_-(0)z_i} + \frac{2-e^{iaz_i}}{K_+(z_i)z_i} \right) \right) \right]$$

Далее рассмотрим первое слагаемое в (2.6). Деформируем контур  $\Gamma$  в  $\Gamma_-$  (фиг. 1), тогда

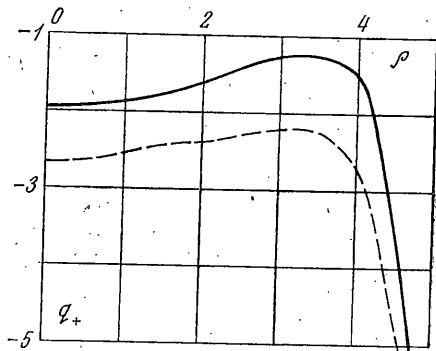
$$I_3 = \int_{\Gamma} \frac{\Psi(u)}{K(u)} e^{-iuv} du = \int_{\Gamma_-} \frac{\Psi(u)}{K(u)} e^{-iuv} du + \int_{\Gamma_1} \frac{\Psi(u)}{K(u)} e^{-iuv} du \quad (2.7)$$

Поскольку между контурами  $\gamma_1$  и  $\gamma_0$  нет особых точек  $K(u)$ , раздвинем контур  $\gamma_1$  до  $\gamma_0$ , т. е. теперь  $|u| \gg B$ , и можно произвести разложение  $(u^2 + B^2)^{1/2} / (u^2 + \lambda^2)^{1/2}$  по степеням  $B^2/u^2$ ,  $|u| \gg B \gg \lambda \rightarrow 0$  (четность ядра сохраняется):

$$I_3 \approx \int_{\Gamma_-} \frac{\Psi(u) e^{-iuv}}{K^{\circ}(u)} du + \int_{\Gamma_0} \frac{\Psi(u) e^{-iuv}}{K^{\circ}(u)} du + O\left(\frac{B^2}{u^2}\right), \quad |u| \gg B$$

Во втором интеграле, поскольку между контурами  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  нет особенностей, контур  $\gamma_0$  можно вернуть в исходный контур  $\gamma_1$ ; тогда

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\Psi(u) e^{-iuv}}{K^{\circ}(u)} du = \int_{\Gamma_1} \frac{\Psi(u) e^{-iuv}}{K^{\circ}(u)} du \approx \approx BO \left( \frac{2\sin(Ba) - \sin(2Ba)}{B} \right), \quad B \rightarrow 0$$



Фиг. 2

В первом слагаемом правой части формулы (2.7) опускаем контур  $\Gamma_-$  вниз, пересекая при этом полюса подынтегральной функции

$$\frac{1}{2\pi i} I_3 = \sum_{k=1}^n (2 - e^{iaz_k}) \frac{e^{iaz_k} (e^{ivz_k} + e^{-ivz_k})}{z_k K_+^{\circ}(z_k) [K_-^{\circ}(z_k)]'} + \frac{1}{K^{\circ}(0)}$$

Таким образом

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} I_3(y) + A_1(y) + A_2(y) + T(y) \quad (2.8)$$

где все слагаемые в правой части вычислены.

Преобразуем формулы (1.3) к виду

$$\begin{aligned} q(\rho) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^a \frac{t\varphi(t) dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^s \varphi(\sqrt{b^2 + \rho^2}) db, \quad s = \sqrt{a^2 - \rho^2}, \quad b^2 = t^2 - \rho^2 \quad (2.9) \end{aligned}$$

В результате получим

$$q(\rho) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \int_0^s \frac{\varphi'(\sqrt{b^2 + \rho^2})}{\sqrt{b^2 + \rho^2}} db - \frac{\varphi(a)}{s} \right) \quad (2.10)$$

$$\varphi'(\sqrt{b^2 + \rho^2}) = \frac{\partial \varphi(\sqrt{b^2 + \rho^2})}{\partial (\sqrt{b^2 + \rho^2})}$$

Подставляя (2.9) в (2.10), можно вычислить значения контактных напряжений при различных значениях  $\rho$ .

Ниже приведены для сравнения значения безразмерных контактных напряжений статической задачи о действии круглого в плане плоского штампа на слой, лежащий без трения на жестком основании ( $\lambda=5$ ). В первой строке приводятся значения функции  $q(\rho)/\Delta\delta$ , рассчитанные по методу «больших  $\lambda \gg [8]$ ». Поскольку этот метод хорошо апробирован, то он может служить критерием правильности и эффективности нового метода, так как статические задачи являются частным случаем динамических задач, и в литературе имеется большое количество соответствующих численных результатов.

$\rho/a=0$	$\rho/a=0.2$	$\rho/a=0.4$	$\rho/a=0.6$	$\rho/a=0.8$	$\rho/a=0.9$
3.747	3.824	4.084	4.671	6.214	8.543
3.573	3.650	3.915	4.509	6.056	8.374

На фиг. 2 приведены для сравнения результаты решения  $q_+ = \operatorname{Re} q(\rho) \cdot 10^{-4}$  динамической контактной задачи для слоя с заземленным основанием, полученные методом [2] (сплошная линия) и предлагаемым методом (пунктирная линия).

Отметим, что количественное расхождение результатов объясняется тем, что данный радиус ( $A=5$ ) принадлежит границе области применимости предлагаемого метода. Произвести стыковку результатов для меньших радиусов не позволяют возможности метода [2]. Сравнение результатов, полученных методом больших  $\lambda$  и методом факторизации, показывает, что для малых радиусов метод факторизации работает достаточно эффективно.

Поступила 19 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.
2. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
3. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 1.
4. Александров В. М., Чебаков М. И. Об одном методе решения парных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
5. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
6. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1974, т. 35, вып. 1.
7. Бабешко В. А., Ворович И. И., Селезнев М. Г. Вибрация штампа на двуслойном основании. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
8. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.