

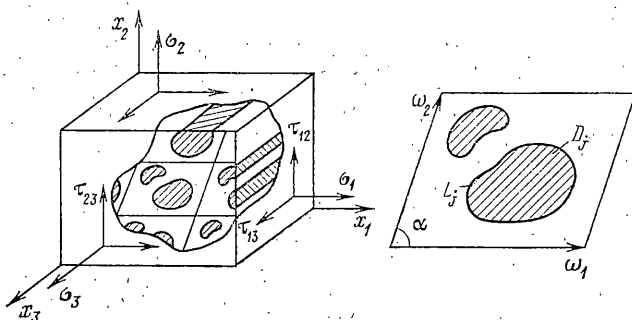
ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО
МАТЕРИАЛА С АНИЗОТРОПНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ
СТРУКТУРЫ

В. Н. ДОЛГИХ, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Сумы)

Теория регулярных упругих структур с изотропными компонентами развита в [1-4]. В предлагаемой статье дается теоретическое описание регулярной упругой структуры с анизотропными компонентами. Строится макроскопическая модель структуры, приводятся результаты расчетов напряжений и эффективных упругих параметров среды. Дается строгое обоснование полученных алгоритмов.

1. Постановка основных задач. При изучении упругих и жесткостных свойств армированной среды будем предполагать, что матрица армирована регулярной (двоякопериодической) системой групп прямолинейных инородных волокон (фиг. 1), контакт матрицы и волокна осуществляется



Фиг. 1

по всей поверхности волокна без натяга, материалы волокон и матрицы имеют плоскость упругой симметрии, нормальную к оси волокна.

Все построения будут проводиться в предположении, что линии раздела компонентов структуры — простые замкнутые непересекающиеся контуры, имеющие в каждой точке ограниченную кривизну.

В этих предположениях напряженное состояние структуры, не изменяющееся вдоль оси волокна, можно свести к двум независимым состояниям — обобщенной плоской деформации (задача А) и продольному сдвигу (задача В) [1].

Для задачи А напряжения и смещения запишем в виде [5]:

$$\sigma_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \mu_m^2 \varphi_m'(z_m), \quad \sigma_2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \varphi_m'(z_m) \quad (1.1)$$

$$\tau_{12} = -2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \mu_m \varphi_m'(z_m), \quad \sigma_3 = \frac{1}{a_{33}} [c - (a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{36}\tau_{12})]$$

$$u = 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 p_m \varphi_m(z_m) + \frac{c}{a_{33}} \left(a_{13}x_1 + \frac{1}{2} a_{36}x_2 \right)$$

$$v = 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 q_m \varphi_m(z_m) + \frac{c}{a_{33}} \left(\frac{1}{2} a_{36}x_1 + a_{23}x_2 \right), \quad c = \operatorname{const} = e_3$$

$$w = cx_3, \quad p_m = \beta_{11}\mu_m^2 - \beta_{16}\mu_m + \beta_{12}, \quad q_m = \beta_{12}\mu_m - \beta_{26} + \frac{\beta_{22}}{\mu_m}$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad z_m = x_1 + \mu_m x_2 \quad (m = 1, 2)$$

Для задачи *B* имеем [5]:

$$\tau_{13} = 2 \operatorname{Re} \mu_3 \varphi_3'(z_3), \quad \tau_{23} = -2 \operatorname{Re} \varphi_3'(z_3), \quad w = 2 \operatorname{Re} r_3 \varphi_3(z_3) \quad (1.2)$$

$$r_3 = \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_3}, \quad \beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 4, 5)$$

Здесь μ_1, μ_2, μ_3 — комплексные корни соответствующих характеристических уравнений; u, v, w — компоненты вектора смещения; a_{ij} — коэффициенты деформации материала среды; $\varphi_m(z_m)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов.

При описании армированной среды ограничимся лишь структурой фундаментальной ячейки, так как она полностью определяет геометрию среды в целом.

Пусть ω_1, ω_2 ($\operatorname{Im} \omega_1 = 0; \operatorname{Im} \omega_2 / \omega_1 > 0$) — основные периоды армирования, D_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — область, занятая j -м включением в параллелограмме периодов, L_j — граница D_j , $l = \cup L_j$. Область, занятую средой, обозначим через D . Области и контуры в плоскостях z_m ($m = 1, 2, 3$), находящиеся в аффинном соответствии с D, D_j, L_j, l , обозначим через $D^{(m)}, D_j^{(m)}, L_j^{(m)}, l^{(m)}$.

Будем предполагать, что внешнее нагружение реализуется в виде средних напряжений $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \tau_{12}^0, \tau_{13}^0, \tau_{23}^0$, действующих в D , и деформации $e_3 = \operatorname{const} = c$.

При наличии идеального механического контакта волокон с матрицей систему краевых условий, выражающих условия сопряжения компонентов среды по усилиям и смещениям, для задач *A* и *B* представим в виде

$$\varphi_1(t_1) + A_2^{(n)} \varphi_2(t_2) + B_2^{(n)} \overline{\varphi_2(t_2)} = \quad (1.3)$$

$$= \sum_{m=1}^2 [A_{mj}^{(n)} \varphi_m^j(t_m^j) + B_{mj}^{(n)} \overline{\varphi_m^j(t_m^j)}] + M_j^{(n)} \quad (n=1, 2; j=1, 2, \dots, k)$$

$$t_m = \operatorname{Re} t + \mu_m \operatorname{Im} t, \quad t_m^j = \operatorname{Re} t + \mu_m^j \operatorname{Im} t \quad (m=1, 2), \quad t \in L_j$$

$$A_2^{(1)} = \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1}, \quad B_2^{(1)} = \frac{\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1}, \quad A_{mj}^{(1)} = \frac{\mu_m^j - \bar{\mu}_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1}, \quad B_{mj}^{(1)} = \frac{\bar{\mu}_m^j - \bar{\mu}_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1}$$

$$A_2^{(2)} = \frac{p_2 \bar{q}_1 - q_2 \bar{p}_1}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1}, \quad B_2^{(2)} = \frac{\overline{p_2 q_1 - q_2 p_1}}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1}$$

$$A_{mj}^{(2)} = \frac{p_m^j \bar{q}_1 - q_m^j \bar{p}_1}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1}, \quad B_{mj}^{(2)} = \frac{\overline{p_m^j q_1 - q_m^j p_1}}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1} \quad (m=1,2)$$

$$M_j^{(4)} = 0, \quad M_j^{(2)} = \frac{c}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1} \left\{ \bar{q}_1 \left[\left(\frac{a_{13}^j}{a_{33}^j} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \right) x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_{36}^j}{a_{33}^j} - \frac{a_{36}}{a_{33}} \right) x_2 \right] - \right. \\ \left. - \bar{p}_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_{36}^j}{a_{33}^j} - \frac{a_{36}}{a_{33}} \right) x_1 + \left(\frac{a_{23}^j}{a_{33}^j} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \right) x_2 \right] \right\}$$

$$A_j^{(3)} \varphi_3(t_3) + B_j^{(3)} \overline{\varphi_3(t_3)} = \varphi_3^j(t_3^j) \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (1.4)$$

$$t_3 = \operatorname{Re} t + \mu_3 \operatorname{Im} t, \quad t_3^j = \operatorname{Re} t + \mu_3^j \operatorname{Im} t, \quad t \in L_j$$

$$A_j^{(3)} = (r_3^j + r_3) / (2r_3^j), \quad B_j^{(3)} = (r_3^j - r_3) / (2r_3^j)$$

$$r_3^j = i \sqrt{\beta_{44}^j \beta_{55}^j - (\beta_{45}^j)^2}, \quad r_3 = i \sqrt{\beta_{44} \beta_{55} - (\beta_{45})^2}$$

2. Обобщенная плоская деформация композиционного материала. Опираясь на результаты [6, 7], запишем

$$\varphi_m(z_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(m)}} \sum_{n=1}^2 [c_{mn} \omega_n(t) + d_{mn} \overline{\omega_n(t)}] \zeta(t - z_m) dt_m + A_m z_m, \quad z_m \in D^{(m)} \quad (2.1)$$

$$\varphi_m^j(z_m^j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(m)}} \sum_{n=1}^2 c_{mn}^j \omega_n^j(t) \frac{dt_m^j}{t_m^j - z_m^j}, \quad z_m^j \in D_j^{(m)} \quad (m=1,2; j=1,2,\dots,k)$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [8], $\omega_n(t) = \{\omega_n^j(t), t \in L_j, n=1, 2\}$ — подлежащие определению функции.

Комплексные постоянные c_{mn}, d_{mn}, c_{mn}^j ($m, n=1, 2; j=1, 2, \dots, k$) выбираются таким образом, чтобы разрешающая система интегральных уравнений была фредгольмовой.

Постоянные A_1 и A_2 определяем из статических условий. Вычисляя компоненты главного вектора усилий, действующих на гранях параллелограмма периодов, получаем [7]:

$$A_1 = i\beta_1 K_0 + K_1 + K_2, \quad A_2 = i\beta_2 K_0 + K_1^* + K_2^*, \quad \operatorname{Im}(B_1 + B_2) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь K_0 — вещественная константа, которая определяется из условия отсутствия вращения основного параллелограмма периодов. Постоянные β_j, K_j, K_j^* ($j=1, 2$) в зависимости от соотношения параметров

$$\mu_1 = \mu_1' + i\mu_1'', \quad \mu_2 = \mu_2' + i\mu_2'' \quad (\mu_j' = \operatorname{Re} \mu_j, \mu_j'' = \operatorname{Im} \mu_j)$$

имеют вид

$$\beta_1 = -\frac{\mu_2''}{\mu_1''}, \quad \beta_2 = 1, \quad K_1^* = \frac{1}{\mu_1''^2 - \mu_2''^2} [\Delta_3 - 2\mu_1' \Delta_2 + |\mu_1|^2 \Delta_1] \quad (2.3)$$

$$K_1 = -\frac{1}{\mu_1''^2 - \mu_2''^2} [\Delta_3 - 2\mu_1' \Delta_2 + |\mu_2|^2 \Delta_1] + \frac{1}{\mu_1''} (\mu_1' \Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\begin{aligned}
 K_2^* &= \frac{1}{2(\mu_1'^2 - \mu_2'^2)} [\sigma_1^\circ + 2\mu_1' \tau_{12}^\circ + |\mu_1|^2 \sigma_2^\circ] \\
 K_2 &= -\frac{1}{2(\mu_1''^2 - \mu_2''^2)} [\sigma_1^\circ + 2\mu_1' \tau_{12}^\circ + |\mu_2|^2 \sigma_2^\circ] + \frac{i}{2\mu_1''} (\mu_1' \sigma_2^\circ + \tau_{12}^\circ) \\
 \Delta_1 &= \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} (\delta_1^{(1)} B_1 + \delta_1^{(2)} B_2), \quad \Delta_2 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} (\mu_1 \delta_1^{(1)} B_1 + \mu_2 \delta_1^{(2)} B_2) \\
 \Delta_3 &= \frac{1}{\omega_1} \left\{ \operatorname{Re} (\mu_1^2 \delta_1^{(1)} B_1 + \mu_2^2 \delta_1^{(2)} B_2) + \frac{2\pi}{\operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Im} (\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) \right\} \\
 B_m &= \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{(n)}^2 [c_{mn} \omega_n(t) + \overline{d_{mn} \omega_n(t)}] dt \\
 \delta_n^{(m)} &= 2\zeta(\omega_n^{(m)}/2), \quad \omega_n^{(m)} = \operatorname{Re} \omega_n + \mu_m \operatorname{Im} \omega_n \quad (n, m=1, 2) \\
 \delta_1^{(m)} \omega_2^{(m)} - \delta_2^{(m)} \omega_1^{(m)} &= 2\pi i \quad \text{при } \mu_2' = \mu_1' \\
 \beta_1 &= i \left\{ 1 - \frac{i}{2\mu_1''} \left[\mu_2' - \mu_1' + \frac{\mu_1'^2 - \mu_2'^2}{\mu_1' - \mu_2'} \right] \right\} \\
 \beta_2 &= -i \left\{ 1 - \frac{i}{2\mu_2''} \left[\mu_1' - \mu_2' + \frac{\mu_1'^2 - \mu_2'^2}{\mu_1' - \mu_2'} \right] \right\} \\
 K_1^* &= \frac{i}{2\mu_2''(\mu_1' - \mu_2')} [\Delta_3 - 2\mu_1' \Delta_2 + |\mu_1|^2 \Delta_1] \\
 K_1 &= \Delta_1 - \frac{i}{2\mu_1''(\mu_1' - \mu_2')} [\Delta_3 - 2\mu_2' \Delta_2 + (\mu_1''^2 - \mu_1'^2 + 2\mu_1' \mu_2') \Delta_1] \\
 K_2 &= \frac{1}{2} \sigma_2^\circ - \frac{i}{4\mu_1''(\mu_1' - \mu_2')} [\sigma_1^\circ + 2\mu_2' \tau_{12}^\circ + (\mu_1''^2 - \mu_1'^2 + 2\mu_1' \mu_2') \sigma_2^\circ] \\
 K_2^* &= \frac{i}{4\mu_2''(\mu_1' - \mu_2')} (\sigma_1^\circ + 2\mu_1' \tau_{12}^\circ + |\mu_1|^2 \sigma_2^\circ) \quad \text{при } \mu_2' \neq \mu_1'
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, представления (2.1) обеспечивают двоякопериодичность напряжений и существование средних напряжений в D . В силу этого, выполнение краевых условий (1.3) в пределах фундаментальной ячейки влечет за собой выполнение краевых условий во всех остальных ячейках.

Переходя в (2.1) к граничным значениям и подставляя их в (1.3), получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно искомых функций $\omega_m(t)$ ($m=1, 2$):

$$\sum_{m=1}^2 \{ R_m^{(n)} \omega_m(t_0) + Q_m^{(n)} \overline{\omega_m(t_0)} + N_{mj}^{(n)} [\omega_1(t), \omega_2(t), t_0] \} + \Omega^{(n)}(B_1, B_2, t_0) = P_j^{(n)}(t_0)$$

($n=1, 2$; $j=1, 2, \dots, k$)

(2.5)

$$\begin{aligned}
 N_{mj}^{(n)} = & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \overline{\omega_m(t)} d \ln \left\{ \left[\frac{\sigma(t_1 - t_{10})}{t_2^j - t_{20}^j} \right]^{-d_{1m}} \left[\frac{\sigma(t_2 - t_{20})}{t_2^j - t_{20}^j} \right]^{B_2^{(n)} c_{2m}} \left[\frac{t_2^j - t_{20}^j}{t_1^j - t_{10}^j} \right]^{B_{1j}^{(n)} c_{1m}} \right. \\
 & \times \left. \left[\frac{t_2^j - t_{20}^j}{\sigma(t_2 - t_{20})} \right]^{A_2^{(n)} d_{2m}} \right\} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \omega_m(t) d \ln \left\{ \left[\frac{\sigma(t_1 - t_{10})}{t_2^j - t_{20}^j} \right]^{c_{1m}} \left[\frac{\sigma(t_2 - t_{20})}{t_2^j - t_{20}^j} \right]^{A_2^{(n)} c_{2m}} \right. \\
 & \times \left. \left[\frac{t_2^j - t_{20}^j}{t_1^j - t_{10}^j} \right]^{A_{1j}^{(n)} c_{1m}} \left[\frac{t_2^j - t_{20}^j}{\sigma(t_2 - t_{20})} \right]^{B_2^{(n)} d_{2m}} \right\} + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \overline{\omega_m(t)} d \ln \left\{ \frac{[\sigma(t_1 - t_{10})]^{-d_{1m}} [\sigma(t_2 - t_{20})]^{B_2^{(n)} c_{2m}}}{[\sigma(t_2 - t_{20})]^{A_2^{(n)} d_{2m}}} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \omega_m(t) d \ln \left\{ \frac{[\sigma(t_1 - t_{10})]^{c_{1m}} [\sigma(t_2 - t_{20})]^{A_2^{(n)} c_{2m}}}{[\sigma(t_2 - t_{20})]^{B_2^{(n)} d_{2m}}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$R_m^{(n)} = c_{1m} + A_2^{(n)} c_{2m}, \quad Q_m^{(n)} = B_2^{(n)} c_{2m}$$

$$\Omega^{(1)}(B_1, B_2, t_0) = \frac{2}{\mu_1 - \bar{\mu}_1} [(\Delta_1 \bar{\mu}_1 - \Delta_2) \operatorname{Re} t_0 - (\Delta_3 - \Delta_2 \bar{\mu}_1) \operatorname{Im} t_0]$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(2)}(B_1, B_2, t_0) = & - \frac{2}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1} \left\{ \left[\left(\beta_{11} \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \beta_{16} \bar{p}_1 \right) \Delta_3 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\beta_{16} \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \beta_{66} \bar{p}_1 \right) \Delta_2 + \left(\beta_{12} \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \beta_{26} \bar{p}_1 \right) \Delta_1 \right] \operatorname{Re} t_0 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \left[\left(\frac{1}{2} \beta_{16} \bar{q}_1 - \beta_{12} \bar{p}_1 \right) \Delta_3 - \left(\frac{1}{2} \beta_{66} \bar{q}_1 - \beta_{26} \bar{p}_1 \right) \Delta_2 + \left(\frac{1}{2} \beta_{26} \bar{q}_1 - \beta_{22} \bar{p}_1 \right) \Delta_1 \right] \operatorname{Im} t_0 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} (\bar{p}_1 \operatorname{Re} t_0 + \bar{q}_1 \operatorname{Im} t_0) T(B_1, B_2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$T(B_1, B_2) = \frac{1}{\omega_1} 2 \operatorname{Re} [(q_1 - \mu_1 p_1) \delta_1^{(1)} B_1 + (q_2 - \mu_2 p_2) \delta_1^{(2)} B_2] -$$

$$- \frac{4\pi}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Im} (p_1 B_1 + p_2 B_2)$$

$$P_j^{(1)}(t_0) = - \frac{1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1} [(\sigma_2^\circ \bar{\mu}_1 + \tau_{12}^\circ) \operatorname{Re} t_0 - (\sigma_1^\circ + \tau_{12}^\circ \bar{\mu}_1) \operatorname{Im} t_0]$$

$$\begin{aligned}
 P_j^{(2)}(t_0) = & \frac{1}{p_1 \bar{q}_1 - q_1 \bar{p}_1} \left\{ \left[\left(\beta_{11} \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \beta_{16} \bar{p}_1 \right) \sigma_1^\circ + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\beta_{16} \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \beta_{66} \bar{p}_1 \right) \tau_{12}^\circ + \left(\beta_{12} \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \beta_{26} \bar{p}_1 \right) \sigma_2^\circ \right] \operatorname{Re} t_0 + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{1}{2} \beta_{16} \bar{q}_1 - \beta_{12} \bar{p}_1 \right) \sigma_1^\circ + \left(\frac{1}{2} \beta_{66} \bar{q}_1 - \beta_{26} \bar{p}_1 \right) \tau_{12}^\circ + \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{1}{2} \beta_{26} \bar{q}_1 - \beta_{22} \bar{p}_1 \right) \sigma_2^\circ \right] \operatorname{Im} t_0 \right\} - M_j^{(2)}
 \end{aligned}$$

Здесь $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса [8]. Постоянные c_{nm}^j, c_{nm}, d_{nm} ($n, m = 1, 2; j = 1, 2, \dots, k$) определяются из громоздкой системы алгебраических уравнений, которую здесь не выписываем.

3. Продольный сдвиг композиционного материала. Потенциалы $\varphi_3(z_3)$ и $\varphi_3^j(z_3^j)$, обеспечивающие двоюкопериодическое распределение напряжений в D , представим в виде

$$\varphi_3(z_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(3)}} \omega_3(t) \zeta(t_3 - z_3) dt_3 + A_3 z_3, \quad z_3 \in D^{(3)} \quad (3.1)$$

$$\varphi_3^j(z_3^j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(3)}} [A_j^{(3)} \omega_3(t) - B_j^{(3)} \overline{\omega_3(t)}] \frac{dt_3^j}{t_3^j - z_3^j}, \quad z_3^j \in D_j^{(3)} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Здесь $\omega_3(t) = \{\omega_3^j(t), t \in L_j\}$ — подлежащие определению из системы краевых условий (1.4) функции. Постоянную A_3 найдем из статических условий.

Вычисляя компоненты главного вектора усилий, действующих на грани основного параллелограмма периодов, получаем

$$\operatorname{Re} A_3 = -\frac{1}{2} \tau_{23}^\circ + \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} (\delta_1^{(3)} B_3) \quad (3.2)$$

$$\operatorname{Im} A_3 = -\frac{1}{2\mu_3''} (\tau_{13}^\circ + \mu_3' \tau_{23}^\circ) + \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Im} (\delta_1^{(3)} B_3) - \frac{2\pi}{\mu_3'' \omega_1} \operatorname{Im} \omega_2$$

$$B_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(3)}} \omega_3(t) dt_3, \quad \delta_1^{(3)} = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \mu_3' = \operatorname{Re} \mu_3, \quad \mu_3'' = \operatorname{Im} \mu_3$$

Система краевых условий (1.4) с учетом представлений (3.1) преобразуется в систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\omega_3(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \omega_3(t) d \ln \frac{\sigma(t_3 - t_{30})}{t_3^j - t_{30}^j} + \frac{B_j^{(3)}}{A_j^{(3)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \overline{\omega_3(t)} d \ln \frac{\overline{\sigma(t_3 - t_{30})}}{t_3^j - t_{30}^j} - \quad (3.3)$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(3)} \setminus L_j} \omega_3(t) d \ln \sigma(t_3 - t_{30}) + \frac{B_j^{(3)}}{A_j^{(3)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(3)} \setminus L_j} \overline{\omega_3(t)} d \ln \overline{\sigma(t_3 - t_{30})} +$$

$$+ \Omega_j^{(3)}(B_3, t_0) = P_j^{(3)}(t_0) \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

$$\Omega_j^{(3)}(B_3, t_0) = \frac{-r_3^j}{r_3^j + r_3} \left\{ [(\mu_3' \Delta_4 + \Delta_5) \operatorname{Im} t_0 + \Delta_4 \operatorname{Re} t_0] - \right. \\ \left. - \frac{ir_3}{\mu_3'' r_3^j} [(\mu_3' \Delta_5 - \mu_3'' \Delta_4) \operatorname{Im} t_0 + \Delta_5 \operatorname{Re} t_0] \right\}$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{\omega_1} 2\operatorname{Re} (\delta_1^{(3)} B_3), \quad \Delta_5 = -\frac{2\mu_3''}{\omega_1} \operatorname{Im} (\delta_1^{(3)} B_3) + \frac{4\pi}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Im} B_3$$

$$P_j^{(3)} = \frac{r_3^j}{r_3^j + r_3} (\tau_{13}^\circ \operatorname{Im} t_0 - \tau_{23}^\circ \operatorname{Re} t_0) - \frac{i}{\mu_3''} \frac{r_3}{r_3^j + r_3} \times$$

$$\times \{[\mu_3' (\tau_{13}^\circ + \mu_3' \tau_{23}^\circ) + \mu_3'' \tau_{23}^\circ] \operatorname{Im} t_0 + (\tau_{13}^\circ + \mu_3' \tau_{23}^\circ) \operatorname{Re} t_0\}$$

Поскольку в задаче о продольном сдвиге переход от анизотропии к изотропии не вызывает трудностей, связанных с появлением кратных

корней характеристического уравнения, система (3.3) пригодна и для описания композиционного материала с изотропными компонентами структуры. В этом случае в формулах (3.1) – (3.3) следует положить $\mu_3 = \mu_3^j = i$, $r_3 = i/G$, $r_3^j = i/G_j$ (G и G_j – модули сдвига материалов матрицы и j -го волокна).

Можно показать, что решение системы (3.3) существует и единственно. Этим самым обосновывается корректность представлений (3.1)

4. Существование решения. Докажем, что система интегральных уравнений (2.5) разрешима. Рассмотрим систему однородных интегральных уравнений, соответствующую (2.5), т. е. положим

$$P_j^{(n)}(t_0) = 0 \quad (n=1,2; j=1,2,\dots,k) \quad (4.1)$$

Равенства (4.1) являются необходимыми и достаточными условиями обращения в нуль внешней нагрузки

$$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \tau_{12}^0 = e_3 = 0 \quad (4.2)$$

Обозначим решение однородной системы интегральных уравнений через $\omega_m(t) = \{\omega_m^j(t_m^j), t \in L_j, m=1, 2\}$, а всем функциям и функционалам, соответствующим этому решению, будем приписывать индекс нуль.

Можно показать, что решение краевой задачи (1.3) при условиях (4.2) представимо в форме

$$\varphi_m(z_m) = i\beta_m C^{(0)} z_m + D_m, \quad \varphi_m^j(z_m^j) = i\beta_m^j C_*^{(0)} z_m^j + D_m^j \quad (m=1,2; j=1,2,\dots,k) \quad (4.3)$$

где $C^{(0)}$, $C_*^{(0)}$ – вещественные, D_1 , D_2 , D_1^j , D_2^j – комплексные константы; β_1 и β_2 определены в (2.3), (2.4); β_1^j , β_2^j также определяются формулами (2.3), (2.4) с той лишь разницей, что упругие постоянные матрицы заменяются соответствующими постоянными j -го волокна.

Сравнивая (2.1) и (4.3), получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(m)}} \sum_{n=1}^2 [c_{mn} \omega_{n0}(t) + d_{mn} \overline{\omega_{n0}(t)}] \zeta(t_m - z_m) dt_m + A_m^0 z_m - i\beta_m C^{(0)} z_m - D_m = 0, \quad z_m \in D^{(m)} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(m)}} \sum_{n=1}^2 c_{mn}^j \omega_{n0}^j(t) \frac{dt_m^j}{t_m^j - z_m^j} - i\beta_m^j C_*^{(0)} z_m^j - D_m^j = 0, \quad z_m^j \in D_j^{(m)}$$

Вычислив приращения левых частей первых двух равенств (4.4) с учетом (2.2) – (2.5) при переходе от точки z к точке $z + \omega_m$ ($m=1, 2$), получим

$$B_1^{(0)} = B_2^{(0)} = 0, \quad \Delta_1^{(0)} = \Delta_2^{(0)} = \Delta_3^{(0)} = K_1^{(0)} = K_1^{*(0)} = 0 \quad (4.5)$$

$$C^{(0)} = K_0^{(0)}, \quad A_1^0 - i\beta_1 C^{(0)} = 0, \quad A_2^0 - i\beta_2 C^{(0)} = 0$$

Рассмотрим кусочно-аналитические функции

$$\Phi_m(z_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(m)}} \sum_{n=1}^2 [c_{mn} \omega_{n0}(t) + d_{mn} \overline{\omega_{n0}(t)}] \zeta(t_m - z_m) dt_m - D_m, \quad z_m \in D^{(m)} \quad (4.6)$$

Переходя в (4.6) к предельным значениям и составляя их разность, приходим, в силу (4.4), (4.5), к выводу, что

$$\sum_{n=1}^2 [c_{1n}\omega_{n0}(t) + d_{1n}\overline{\omega_{n0}(t)}], \quad \sum_{n=1}^2 [c_{2n}\omega_{n0}(t) + d_{2n}\overline{\omega_{n0}(t)}]$$

являются граничными значениями некоторых функций, регулярных в областях D_j , и, следовательно, интегралы в левых частях (4.4) равняются нулю. С учетом (4.5) получаем

$$D_m = 0, \quad \varphi_{m0}(z_m) = 0 \quad (m=1, 2) \quad (4.7)$$

Краевые условия (1.3) с учетом (4.7) запишем в виде

$$\sum_{m=1}^2 [A_{mj}^{(n)} \varphi_m^j(t_m^j) + B_{mj}^{(n)} \overline{\varphi_m^j(t_m^j)}] = 0 \quad (n=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.8)$$

Равенства (4.8) при фиксированном j соответствуют задаче о равновесии j -го включения при напряжениях и смещениях на границе, равных нулю. Получаем

$$\varphi_m^j(z_m^j) = 0 \quad (m=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.9)$$

Из (4.3) и (4.9) следует, что

$$D_m^j = C_*^{(0)} = 0 \quad (m=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.10)$$

Вычисляя скачки предельных значений кусочно-голоморфных функций

$$\Phi_m^j(z_m^j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(m)}} \sum_{n=1}^2 c_{mn}^j \omega_{n0}^j(t) \frac{dt_m^j}{t_m^j - z_m^j}, \quad z_m^j \in D_j^{(m)} \quad (m=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.11)$$

при переходе через L_j приходим к выводу, что $\sum c_{mn}^j \omega_{n0}^j(t)$ являются граничными значениями некоторых функций, регулярных в $D \setminus D_j$ ($j=1, 2, \dots, k$) и исчезающих на бесконечности.

Введем функции

$$i\chi_m^j(t) = \sum_{n=1}^2 [c_{mn}\omega_{n0}^j(t) + d_{mn}\overline{\omega_{n0}^j(t)}]$$

$$i\theta_m^j(t) = \sum_{n=1}^2 c_{mn}^j \omega_{n0}^j(t) \quad (m=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.12)$$

Из сказанного выше следует, что функции $\chi_m^j(t)$, $\theta_m^j(t)$ являются контурными значениями регулярных соответственно в D_j и $D \setminus D_j$ функций $\chi_m^j(z)$, $\theta_m^j(z)$. Кроме того, $\theta_m^j(z)$ исчезает на бесконечности.

Исключая $\omega_{10}^j(t)$, $\omega_{20}^j(t)$ из (4.12), приходим к системе равенств

$$\chi_1^j(t) + A_2^{(n)} \chi_2^j(t) + B_2^{(n)} \overline{\chi_2^j(t)} = \sum_{m=1}^2 [A_{mj}^{(n)} \theta_m^j(t) + B_{mj}^{(n)} \overline{\theta_m^j(t)}] \quad (n=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.13)$$

Отсюда следует, что при фиксированном j функции $\chi_m^j(z)$, $\theta_m^j(z)$ ($m=1, 2$) дают решение задачи об упругом равновесии неограниченной среды, в которую вдоль L_j впаило упругое включение при условии, что напряжения и смещения на бесконечности равны нулю. Такая краевая задача имеет лишь тривиальное решение

$$\chi_m^j(z) = 0, \theta_m^j(z) = 0 \quad (m=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (4.14)$$

Обращаясь к равенствам (4.12), получаем $\omega_{m0}^j(t) = 0$. Таким образом, решение системы интегральных уравнений (2.5) существует и единственно.

5. Макроскопическая модель композиционного материала [1]. Для определения макроскопических упругих параметров установим связь между средними деформациями и средними напряжениями в структуре. Выражения для средних деформаций $\langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$, $\langle e_3 \rangle$, $\langle \gamma_{12} \rangle$, $\langle \gamma_{13} \rangle$, $\langle \gamma_{23} \rangle$ и среднего напряжения σ_3^0 приведены в [1]. Среднее вращение фундаментальной ячейки имеет вид

$$\langle \omega \rangle = \frac{v(z+\omega_1) - v(z)}{\omega_1} - \frac{u(z+\omega_2) - u(z)}{\text{Im } \omega_2} + \frac{u(z+\omega_1) - u(z)}{\omega_1} \text{ctg } \alpha, \alpha = \arg \omega_2 \quad (5.1)$$

Полагая $\langle \omega \rangle = 0$, что можно выполнить за счет постоянной K_0 , фигурирующей в (2.2), и вычисляя соответствующие приращения смещений в выражениях для средних деформаций, получаем закон Гука для макро-модели

$$\begin{aligned} \langle e_m \rangle &= \langle c_{m1} \rangle \sigma_1^0 + \langle c_{m2} \rangle \sigma_2^0 + \langle c_{m3} \rangle \sigma_3^0 + \langle c_{m6} \rangle \tau_{12}^0 \quad (m=1, 2, 3) \\ \langle \gamma_{23} \rangle &= \langle c_{44} \rangle \tau_{23}^0 + \langle c_{45} \rangle \tau_{13}^0, \quad \langle \gamma_{13} \rangle = \langle c_{54} \rangle \tau_{23}^0 + \langle c_{55} \rangle \tau_{13}^0 \\ \langle \gamma_{12} \rangle &= \langle c_{61} \rangle \sigma_1^0 + \langle c_{62} \rangle \sigma_2^0 + \langle c_{63} \rangle \sigma_3^0 + \langle c_{66} \rangle \tau_{12}^0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Макроскопические упругие параметры $\langle c_{mn} \rangle$ ($m, n=1, 2, \dots, 6$) в (5.2) зависят от упругих и геометрических характеристик компонентов композиционного материала. В них входят функционалы, построенные на решениях систем (2.5) и (3.3). В силу громоздкости не выписаны $\langle c_{mn} \rangle$ ($m, n=1, 2, 3, 6$). Для задачи о продольном сдвиге эти коэффициенты имеют вид

$$\langle c_{44} \rangle = \beta_{44} \left[1 + \frac{4\pi}{S} \text{Im} \left(\frac{b_{32}}{\mu} \right) \right], \quad \langle c_{45} \rangle = \beta_{45} + \frac{4\pi}{S} \beta_{44} \text{Im} \left(\frac{b_{31}}{\mu_3} \right) \quad (5.3)$$

$$\langle c_{54} \rangle = \beta_{45} + \frac{4\pi}{S} \beta_{55} \text{Im } b_{32}, \quad \langle c_{55} \rangle = \beta_{55} \left(1 + \frac{4\pi}{S} \text{Im } b_{31} \right)$$

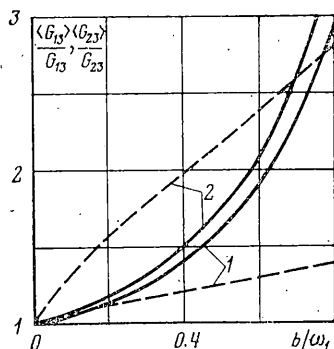
$$B_3 = b_{31} \tau_{13}^0 + b_{32} \tau_{23}^0, \quad S = \omega_1 \text{Im } \omega_2$$

$$b_{31} = B_3 \text{ при } \tau_{13}^0 = 1, \tau_{23}^0 = 0; \quad b_{32} = B_3 \text{ при } \tau_{23}^0 = 1, \tau_{13}^0 = 0$$

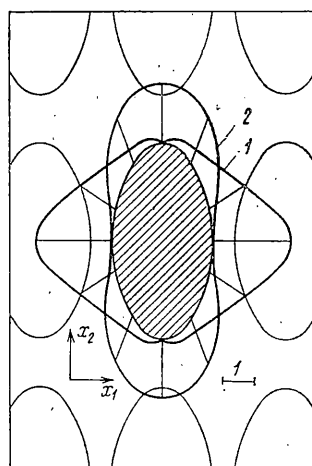
6. Численная реализация. При помощи процедуры, описанной в [9], системы интегральных уравнений задач A и B сводились к конечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений плотностей в опорных точках. Максимальное количество опорных точек на контуре включения в задаче $A - 100$, в задаче $B - 120$.

При $a/\omega_1 = b/\omega_1 = 0.025$ результаты расчетов напряжений сравнивались с точными результатами, полученными по методу [10]. При одноосном растяжении максимальная погрешность в вычислении контактных напряжений не превышала 1.5%, при сдвиге в плоскости армирования - 9%, при продольном сдвиге - 0.4%.

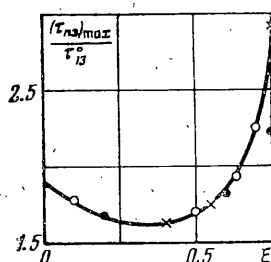
На фиг. 2-4 представлены результаты расчетов по задаче B , на фиг. 5 - по задаче A . Фиг. 2, 3 относятся к продольному сдвигу композиционного материала с ортогольными компонентами ($a_{44}^j/a_{55}^j = 2$, $a_{44}^j/a_{55}^j = 3$, $a_{55}^j/a_{55}^j = 120$, $a_{45}^j = a_{45}^j = 0$, $j=1$), с волокнами эллиптического поперечного сечения, центры тяжести которых расположены в вершинах прямоугольной решетки $\omega_2 = 2i\omega_1$. На фиг. 2 приведены кривые изменения макроскопических параметров $\langle G_{13} \rangle / G_{13} = \beta_{55} / \langle c_{55} \rangle$ (сплошные линии); $\langle G_{23} \rangle / G_{23} = \beta_{44} / \langle c_{44} \rangle$ (штриховые линии) в зависимости от относительных размеров



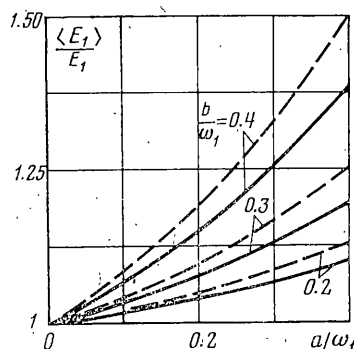
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

области a/ω_1 , b/ω_1 (a , b — соответственно горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса, кривые 1 соответствуют $a/\omega_1=0.2$, а кривые 2 — $a/\omega_1=0.4$).

На фиг. 3 показано распределение напряжений τ_{n3} (n — нормаль к границе волокна) для названного композиционного материала при $a/\omega_1=0.4$; $b/\omega_1=0.8$ и нагрузках $\tau_{13}^0=1$, $\tau_{23}^0=0$ (кривая 1), $\tau_{13}^0=0$, $\tau_{23}^0=1$ (кривая 2).

На фиг. 4 приведено сравнение коэффициентов концентрации напряжений при продольном сдвиге композиционного материала типа стеклопластика с изотропными компонентами структуры (отношение модуля сдвига материала волокна к модулю сдвига материала матрицы равно 20) с результатами [11–13]. Решетка квадратная ($\omega_2=i\omega_1$), волокна имеют круговое поперечное сечение. Светлыми точками обозначены результаты [11], крестиками — [12], темными точками — [13]. По горизонтальной оси откладывается величина $\xi=S_j/S$ ($j=1$), где S_j — площадь поперечного сечения волокна, S — площадь параллелограмма периодов.

Фиг. 5 иллюстрирует изменение относительного макроскопического коэффициента упругости $\langle E_1 \rangle/E_1=\beta_{11}/\langle c_{11} \rangle$ композиционного материала с волокнами эллиптического (сплошные линии) и прямоугольного (штриховые линии) поперечных сечений. Полуоси эллипса a и b , размеры прямоугольника $2a \times 2b$, решетка квадратная $\omega_2=i\omega_1$. Упругие постоянные матрицы

$$\beta_{11}=0.4762 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{н}, \quad \beta_{22}=0.625 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{н}, \quad \beta_{12}=-0.4375 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{н},$$

$$\beta_{66}=0.2381 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{н}$$

Упругие характеристики волокон пропорциональны соответствующим характеристикам матрицы: $\beta_{mn}^j = 0.5\beta_{mn}$ ($j=1$; $m, n=1, 2, 6$).

В заключение заметим, что предлагаемое решение для бесконечной среды, как показали исследования, проведенные в [14], пригодно и для описания конечных тел, поскольку уже второй ряд волокон (считая от границы тела) находится в напряженном состоянии, практически не отличающемся от джокопериодического.

Поступила 19 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
2. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
4. Бологин В. В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 12. М., «Машиностроение», 1966.
5. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
7. Григोलюк Э. И., Кац В. Е., Фильштинский Л. А. Двокопериодическая задача теории упругости для плоской анизотропной среды. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
8. Гурец А., Курант Р. Теория функций. М., «Наука», 1968.
9. Заппаров К. Й., Перлин П. И. Численное решение плоских задач теории упругости для областей сложной конфигурации. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 5.
10. Лехницкий С. Г. Распределение напряжений в анизотропной пластинке с эллиптическим упругим ядром (плоская задача). Инж. сб., 1954, т. 19.
11. Ван Фо Фы Г. А., Клявлин В. В. Исследование зависимости механических свойств и внутреннего поля напряжений при сдвиге от вида микроструктуры армированных сред. Механика полимеров, 1967, № 4.
12. Chen C. H. Fiber-reinforced composites under longitudinal shear loading. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 1.
13. Sendekyj G. P. Longitudinal shear deformation of composites II Stress distribution. J. Composite Materials, 1971, vol. 5, January, p. 82—93.
14. Hulbert L. E., Rybicki E. F. Boundary point least squares analysis of the free edge effects in some unidirectional fiber composites. J. Composite Materials, 1971, vol. 5, April, p. 164—175.