МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1978

УДК 539.3

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ [1]

В. А. ЛОМАКИН

(*Москва*)

Рассмотрены принципиальные вопросы, связанные с проблемой учета структурной неоднородности твердых деформируемых тел в рамках механики сплошной среды. Обсуждены механические эффекты структурной неоднородности твердых тел и возможности их описания классическими теориями квазиоднородных сред; дан анализ различных подходов к построению уточненных теорий деформирования структурно-неоднородных тел; изложены основы статистического подхода в механике структурно-неоднородных тел и приведены некоторые результаты теоретического анализа механических эффектов, полученные на основе этого подхода.

1. Проблема учета структурной неоднородности твердых тел в механике. Различные твердые материалы и тела, встречающиеся в природе и используемые в технике, обладают определенной структурой. Обычный металл, например, представляет собой поликристаллическое тело, состоящее из большого числа кристаллитов (зерен) неправильной формы, различно ориентированных, иногда различного состава, сложным образом взаимодействующих между собой. Отдельный кристаллит, в свою очередь, представляет собой достаточно сложное образование с наличием характерных структурных элементов меньшего масштаба (порядка параметра решетки, размеров блоков), включений, дефектов решетки разных типов и т. п.

Другие материалы также обладают определенной структурой (структурной неоднородностью); ярко выраженной структурной неоднородностью обладают, в частности, современные перспективные композитные материалы. Рассматривая в последующем вопросы, связанные с учетом структурной неоднородности тел в механике, будем, для определенности, говорить о поликристаллическом теле; при этом необходимо, однако, иметь в виду, что основные представления, гипотезы и методы, излагаемые ниже, имеют общий характер и относятся к материалам с различного типа структурной неоднородностью.

Теории, описывающие поведение тел из материалов типа поликристаллических (линейная и нелинейная теории упругости, различные теории пластичности, вязкоупругости и т. п.), со времен Коши строятся на определенной аксиоматике, общепринятой в механике сплошной среды [1, 2]. Эта аксиоматика включает в себя гипотезу сплошности (приводящую к характеристике движения тела вектором перемещения), гипотезу афинности деформации окрестности точки (приводящую к характеристике деформированного состояния тела тензором деформации), гипотезу о силовом взаимодействии между частями тела (приводящую к характеристике напряженного состояния тела тензором напряжения), гипотезу

[1] Доклад на расширенной сессии Общего собрания Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике 22 ноября 1977 г., Москва.

квазиоднородности (приводящую к характеристике свойств тела параметрами, не зависящими от координат точек тела). Теории, построенные на основе указанной аксиоматики, будем в дальнейшем называть классическими теориями.

На различных этапах развития механики твердых деформируемых тел с большей или меньшей остротой вставали вопросы о том, учитывают ли развиваемые классические теории имеющуюся структурную неоднородность материалов и, если учитывают, то в какой степени; достаточно ли классических представлений и подходов механики сплошной среды для описания процессов деформирования твердых тел, существуют ли явления, определяемые наличием структуры материалов, которые не описываются в рамках классических теорий и, если существуют, то что это за явления. В последние годы интерес к этим вопросам сильно возрос; появилось большое число исследований, в которых с разных точек зрения изучается указанная проблема и развиваются новые концепции, вводящие в теорию дополнительные параметры, прямо или косвенно связанные с наличием структуры материалов. Анализ состояния этой проблемы представлен в [3–6].

2. Структурная неоднородность материалов и классические теории. При ответе на поставленные выше вопросы необходимо, прежде всего, подчеркнуть, что используемые в классических теориях подходы, основанные на указанной аксиоматике и использующие макроскопические опыты для определения функций и констант, входящих в определяющие соотношения, определенным образом учитывают имеющуюся структуру и структурную неоднородность материалов. Обычная диаграмма растяжения цилиндрического образца дает связь между макроскопическими характеристиками (растягивающей силой и деформацией, определяемой на данной базе), интегрально отражающую наличие структуры, дефектов, сложного взаимодействия структурных элементов. Более того, следует признать, что так полученная кривая является одним из определяющих критериев для оценки того или иного модельного представления и теоретического описания процессов деформирования с явным рассмотрением структуры материала.

При решении весьма большого числа вопросов подходы, основанные на классических представлениях и гипотезах, дают хорошее согласие с наблюдаемыми явлениями, и таких подходов оказывается достаточно для решения стоящих перед механикой задач. Этим и объясняются имеющиеся крупные успехи в механике и ее приложениях; это обстоятельство обусловливает также и то, что дальнейшее развитие механики, основанное на классических представлениях и гипотезах, по-прежнему остается одним из главных направлений в механике и в будущем принесет еще много полезных и ценных результатов.

Вместе с тем есть ряд важных явлений, определяемых наличием структуры материалов, которые не описываются, и даже такие, которые принципиально не могут быть описаны в рамках классических теорий.

Наличие структуры материалов означает наличие параметров, имеющих размерность длины и определяемых строением и свойствами материала. Для поликристаллического материала такими параметрами, в частности, будут a_0 — параметр решетки и a_1 — характерный размер кристаллита ($a_1 \gg a_0$). Очень важно, что для поликристалла есть еще один линейный параметр l ($l > a_1$), весьма существенный с точки зрения описания его свойств и происходящих в нем явлений. Параметр l имеет смысл характерного линейного размера минимальной области поликристаллического материала, которую можно считать однородной и изотропной по механическим свойствам (для квазиоднородных и квазиизотропных поликристаллических материалов). Параметр l в последующем будем называть параметром квазиоднородности.

Теории, явно учитывающие структуру материала, должны содержать некоторые из параметров типа a_0, a_1, l; наличие этих параметров обусловливает специфику уравнений такого типа теорий и специфические механические эффекты, проявляющиеся на соответствующих масштабных уровнях. В классических теориях параметры типа a_0, a_1, l отсутствуют. Для определения границ применимости классических теорий к описанию поведения структурированных сред важнейшее значение имеет наибольший из этих параметров l. Параметр квазиоднородности l определяет масштаб описания явлений в классических теориях: на площадках с линейным размером l определяются вводимые в теории напряжения, свойства объемов с линейным размером l считаются однородными и идентичными свойствам лабораторных образцов. Классические теории дают правильное описание явлений в случаях, когда характерные параметры задачи размерности длины будут значительно больше параметра квазиоднородности l; в случаях, когда это условие не выполнено, следует ожидать расхождения предсказаний классических теорий с наблюдаемыми явлениями.

В постановке задач механики твердых деформируемых тел имеются различные характерные линейные размеры. Введем следующие параметры задачи размерности длины: d — характерный размер тела, R — характерный радиус кривизны поверхности тела, h — параметр изменяемости нагрузки (расстояние, на котором значительно изменяются внешние воздействия), λ — характерная длина волны.

Величины, определяющие состояние и поведение деформируемого поликристаллического тела, будут функциями безразмерных параметров

$$l/d,\ l/R,\ l/h,\ l/\lambda \tag{2.1}$$

В классические теории параметры (2.1) не входят; эти теории будут давать надежные результаты в тех задачах, в которых все параметры (2.1) много меньше единицы и потому несущественны. В тех же задачах, в которых какой-либо из параметров (2.1) имеет величину порядка единицы или больше, этот параметр становится существенным и классические теории приводят к неправильным результатам. Это будут, в частности, задачи о деформации весьма тонких пластин (фольги), задачи о концентрации напряжений вблизи концентраторов с малыми радиусами кривизны, задачи о деформации тел сильно локализованными (сосредоточенными) воздействиями, задачи о высокочастотных колебаниях с малыми длинами волн.

Данный выше анализ применимости классических теорий к описанию процессов деформирования структурно-неоднородных тел проведен по отношению к основным краевым задачам соответствующих математических теорий: определению напряженного и деформированного состояний тела по заданному внешнему воздействию. Вместе с тем имеется широкий круг явлений, в которых структурная неоднородность материалов играет важную роль и в условиях, когда все параметры (2.1) малы и являются несущественными в указанных краевых задачах. Это — явления, в которых определяющее значение имеют события, происходящие в областях, линейные размеры которых меньше параметра квазиоднородности l, например, образование и накопление повреждений, связанных с расшатыванием структуры и появлением микротрещин внутри или на границах кристаллитов.

В таких явлениях структурная неоднородность имеет существенное значение и приводит к разнообразным механическим эффектам, проявляющимся уже на лабораторных образцах обычных размеров при гладких квазистатических нагрузках. Типичными в этом отношении являются различного типа масштабные эффекты хрупкой, длительной и усталостной прочности, поверхностные эффекты и некоторые закономерности разброса (дисперсии) параметров, определяемых на идентичных образцах в макроскопических экспериментах. Эти явления и эффекты также не поддаются описанию и объяснению в рамках классических представлений и гипотез теорий квазиоднородных тел.

3. Различные подходы к построению теории структурно-неоднородных тел. Проведенный анализ показывает, что имеется широкий класс явлений, определяемых структурной неоднородностью твердых тел и не описываемых в рамках классических представлений и гипотез. Поэтому актуальной является задача построения уточненных теорий и представлений, которые описывали бы эти явления. При построении таких теорий возможны и в настоящее время реализуются различные подходы. С точки зрения масштаба описания явлений эти подходы можно разбить на два больших класса.

1. *Подходы, сохраняющие масштаб описания явлений.* Для этих подходов масштаб описания явлений, как и в классических теориях, определяется параметром квазиоднородности l, однако вводятся дополнительные параметры, характеризующие состояние объемов с линейным размером l и взаимодействие этих объемов между собой. Построение таких теорий связано с отказом от некоторых гипотез классических теорий и с заменой их другими, более общими гипотезами.

К рассматриваемому классу подходов к построению теории структурированных сред относятся, в частности, подходы, приводящие к различным моментным теориям и их обобщениям. Анализ вводимых при этом гипотез, основных особенностей соответствующих теорий и механических эффектов, получаемых в рамках этих теорий, содержится в [4, 6].

2. *Подходы, основанные на изменении масштаба описания явлений.* Эти подходы характеризуются переходом к меньшим масштабам описания явлений, чем параметр квазиоднородности l. Ряд направлений основан на введении дискретных или квазидискретных моделей (система взаимодействующих частиц, кристаллическая решетка [7–9], конгломерат кристаллитов [10]) с последующим переходом к континуальным представлениям; перспективным, в частности, представляется метод макроячеек для дискретных и многослойных периодических структур [11, 12].

Подходы, основанные на рассмотрении системы взаимодействующих частиц и (для поликристалла) кристаллических решеток, являются перспективными для построения теории монокристалла (кристаллита), однако при переходе к описанию поведения поликристаллического материала на этом пути возникают дополнительные и весьма серьезные затруднения, преодоление которых требует привлечения других, отличных от развиваемых в рамках этих направлений, средств и методов исследования. Масштабом описания явлений в этих подходах служит параметр решетки a_0 — минимальный характерный линейный размер структуры; это и приводит к необходимости рассмотрения дискретных систем.

Для обычных поликристаллических материалов характерны большие значения отношений размеров кристаллитов a_1 к параметру решетки a_0: параметр a_1/a_0 имеет порядок 10^4—10^7. В то же время внутри кристаллита уже в объемах с линейным размером порядка $10a_0$ может быть введена классическая аксиоматика механики сплошной среды (за исключением гипотезы квазиоднородности и квазиизотропии). Отсюда возникает возможность и целесообразность введения масштаба описания явлений l_0, определяемого условием $a_0 \ll l_0 \ll a_1$.

Подходы, основанные на описании поведения твердых деформируемых тел в масштабе l_0, обладают рядом достоинств, из которых пока отметим следующие.

При этих подходах используется весь арсенал механики сплошной среды, причем в ее классическом варианте, без привлечения дополнительных параметров, характеризующих состояние элементарных объемов (с линейным размером l_0) и их взаимодействие между собой.

Эти подходы дают возможность анализа всех явлений, происходящих в масштабах порядка l_0 и больше, в частности, явлений в масштабе размера кристаллитов a_1, имеющих определяющее значение для поведения поликристаллических тел в условиях, когда существенна их структурная неоднородность.

Переход к масштабу описания l_0 приводит вместе с тем к тому, что рассматриваемое поликристаллическое тело становится анизотропным и существенно неоднородным; случайность ориентации кристаллитов и формы их границ в поликристаллическом теле приводит далее к тому, что параметры, определяющие его свойства, являются случайными функциями координат. Переход к масштабу описания l_0 приводит, таким образом, к теории случайно-неоднородных твердых деформируемых тел [4], интенсивно развиваемой в последние 10—15 лет и служащей основой перспективного статистического подхода к построению теории деформирования структурно-неоднородных твердых тел.

4. Теория случайно-неоднородных твердых деформируемых тел. Рассмотрим основы теории случайно-неоднородных деформируемых тел, ограничиваясь изотермическими процессами малых деформаций и используя декартову ортогональную систему координат x_i.

Пусть напряжения τ_{ij}, деформации e_{ij} и перемещения W_i определены в объемах v_0, имеющих линейный размер l_0; тогда, принимая для объемов v_0 гипотезу макроскопической определимости [13], придем к соотношению

$$\tau_{ij}=F_{ij}[e_{kl}(t')]_{t_0}^{t} \tag{4.1}$$

где F_{ij} — некоторые функционалы (по времени) деформаций, определяемые механическими свойствами объема v_0. Соотношение (4.1), записанное для всего объема v, занимаемого поликристаллическим (структурно-неоднородным) телом, принимает форму

$$\tau_{ij}(x_s,\ t)=F_{ij}[x_s,\ e_{kl}(x_s,\ t')]_{t_0}^{t} \tag{4.2}$$

в которой F_{ij} являются случайными функционалами (по времени) тензора деформаций e_{kl} и случайными функциями координат x_s.

Статистические характеристики функционалов F_{ij} определяются строением и составом поликристалического (структурно-неоднородного) тела и свойствами его структурных составляющих; задача их определения имеет свои специфические особенности и трудности, которые здесь рассматриваться не будут. В последующем будем считать статистические характеристики функционалов F_{ij} для рассматриваемых материалов заданными.

Кроме соотношений (4.2), имеем также уравнения равновесия (для статистических задач), формулы Коши

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}+\rho F_i=0, \qquad e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j}+\frac{\partial W_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.3}$$

и граничные условия, например

$$\tau_{ij}n_j|_s=q_i \tag{4.4}$$

Статистический аналог детерминированной задачи определения состояния по заданным внешним воздействиям применительно к задаче (4.2)—(4.4) состоит в следующем: по заданным внешним воздействиям q_i, F_i и по заданным статистическим характеристикам функционалов F_{ij} найти статистические характеристики случайных тензорных полей напряжений τ_{ij}, деформаций e_{ij} и перемещений W_i. Эту задачу будем называть основной статистической задачей; она представляет собой краевую стохастическую задачу, определяемую соотношениями (4.2)—(4.4).

Основная статистическая задача (4.2)—(4.4) является весьма сложной краевой задачей для стохастических функциональных уравнений; в простейшем случае линейно-упругой среды она приводится к краевой задаче для дифференциальных уравнений в частных производных с коэффициентами, являющимися случайными функциями координат. Тем не менее, имеется общий метод — метод возмущений [4, 14], открывающий в определенных условиях возможности построения ее решения. Изложим основы метода возмущений.

Предположим, что соотношение (4.2) имеет следующую структуру:

$$\tau_{ij}(x_s, t)=F_{ij}[R_p(x_s, t'), \quad e_{kl}(x_s, t)]_{t_0}^{t} \tag{4.5}$$

где R_p — в общем случае случайные функции координат и времени, причем случайность функционалов обусловлена лишь случайностью функций R_p. Представим R_p в виде

$$R_p=\langle R_p\rangle+R_p' \tag{4.6}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается статистическое среднее (математическое ожидание) соответствующей величины. Введем далее детерминированный параметр $\varkappa$:

$$R_p=\langle R_p\rangle+\varkappa R_p' \tag{4.7}$$

и рассмотрим краевую задачу (4.2) — (4.4), в которой зависимость (4.2) имеет вид

$$\tau_{ij}(x_s, t)=F_{ij}[\langle R_p\rangle+\varkappa R_p'(x_s, t'), \ e_{kl}(x_s, t')]_{t_0}^{t} \tag{4.8}$$

Представим функционалы (4.8) в виде разложений по степеням параметра $\varkappa$. Тогда и краевая задача (4.2) — (4.4) относительно, например, вектора перемещений w_j окажется разложенной по степеням параметра $\varkappa$; решение ее будем искать в виде

$$W_i=\sum_{k=0}^{\infty} \varkappa^k w_i^{(k)} \tag{4.9}$$

Для функций $W_i^{(k)}$ получим тогда краевые задачи для тел с детерминированными и, во многих случаях, однородными свойствами при наличии случайных внешних массовых и поверхностных сил.

Указанный метод возмущений при определенных условиях сходится к точному решению [14]; для получающихся при указанной процедуре краевых задач при наличии случайных сил разработаны методы решения как в линейном, так и в нелинейном случаях [4, 15].

Во многих практически интересных случаях свойства структурно-неоднородных тел могут быть с достаточной точностью описаны почти-периодическими быстро осциллирующими функциями координат. Для тел с быстро осциллирующими свойствами развиты эффективные асимптотические методы построения решений краевых задач, использующие концепцию пограничного слоя [4].

5. Анализ механических эффектов в структурно-неоднородных телах. Исследования структурно-неоднородных сред на основе теории случайно-неоднородных тел приводилось до настоящего времени в основном для случая линейно-упругой среды, для которой краевая задача (4.2) — (4.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijlm}\frac{\partial W_l}{\partial x_m}\right)+\rho F_i=0\quad (x_s\in v),\qquad c_{ijlm}\frac{\partial W_l}{\partial x_m}n_j=q_i\quad (x_s\in s)\tag{5.1}$$

где c_{ijlm} — случайный тензор упругих модулей с заданными статистическими характеристиками.

Краевая задача (5.1), несмотря на бросающуюся в глаза внешнюю аналогию с детерминированными задачами линейной теории упругости, существенно от них отличается. Отметим некоторые специфические особенности краевой задачи (5.1).

Статистические характеристики тензора упругих модулей c_{ijlm} содержат, в частности, параметры, определяемые свойствами среды и имеющие размерность длины; важнейший из этих параметров — интегральный масштаб корреляции L [16]. Так как случайность тензора c_{ijlm} вызвана в основном случайностью ориентации и формы границ кристаллитов, параметр L больше характерного размера кристаллитов a_1; есть определенные основания считать, что параметр L имеет порядок параметра квазиоднородности l. Наличие (в отличие от классических теорий) этого параметра в задаче (5.1) приводит к возможности описания соответствующих эффектов структуры в рамках этой теории.

На основе краевой задачи (5.1) могут быть определены не только математические ожидания, но и моменты высших порядков случайных полей перемещений, деформаций и напряжений. Это открывает возможности для учета влияния пульсаций этих полей на поведение структурно-неоднородных тел, а также для описания разброса различных характеристик, определяемого неоднородностью структуры.

Решение ряда задач, относящихся к классу краевых задач (5.1), позволило провести теоретический анализ механических эффектов, вызванных структурной неоднородностью материалов. Отметим некоторые из этих эффектов:

1. Зависимость величин, определяющих осредненные по пространственной области (измеряемые в макроскопическом эксперименте) механические свойства тела от параметров, характеризующих структурную неоднородность среды [4, 17, 18].

2. Нелокальность связи между средними напряжениями и средними деформациями и нелокальность плотности энергии деформации [4]. Средние напряжения в данной точке тела зависят не только от средних деформаций в этой точке, но и от деформаций некоторого объема тела, содержащего эту точку. Отсюда, в частности, следует, что при макроскопически неоднородных деформациях имеет место влияние градиентов средних деформаций на напряжения и другие параметры, определяющие состояние структурно-неоднородного тела [4, 19].

3. Разброс механических характеристик, определяемых на идентичных образцах в макроскопических экспериментах [4].

4. Масштабный эффект, проявляющийся в зависимости измеряемых в опыте осредненных механических характеристик и особенно их дисперсий от масштаба осреднения (от размера образца) [4].

5. Эффект пограничного слоя. Вблизи границы структурированного тела имеется пограничный слой, обладающий рядом специфических особенностей [4]. Уже при макроскопически однородном деформированном состоянии на границе тела возникает, в частности, концентрация напря-

жений, определяемая структурной неоднородностью материала; эта концентрация напряжений может достигать заметной величины [20].

Изложенные выше подходы позволяют объяснить значительное число эффектов структуры, но они, как правило, дают лишь качественное объяснение этих эффектов и не дают пока возможности их количественного предсказания.

Вместе с тем, проведенные исследования и полученные результаты по механике структурно-неоднородных тел показывают, что к настоящему времени уже имеются определенные основы, которые при их развитии могут привести к построению надежных теорий и методов, дающих возможность в более высоком, по сравнению с классическими теориями, приближении учитывать (качественно и количественно) влияние структурной неоднородности тел на их поведение. Для реализации этой возможности, однако, требуется существенное расширение фронта работ по механике структурно-неоднородных тел, решение большого числа разнообразных теоретических и экспериментальных задач, возникающих на пути создания таких теорий и методов.

Поступила 6 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. Изд-во МГУ, 1971.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
3. *Ломакин В. А.* Проблемы механики структурно-неоднородных твердых деформируемых тел. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1970, № 2.
4. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
5. *Ильюшин А. А.* Основные направления развития проблемы прочности и пластичности. В кн.: Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.
6. *Ильюшин А. А., Ломакин В. А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел. В кн.: Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.
7. *Борн М., Кунь Х.* Динамическая теория кристаллических решеток. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
8. *Лейбфрид Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.– Л., Физматгиз, 1963.
9. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М., «Наука», 1975.
10. *Budiansky B., Wu Tai Te.* Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals. Proc. 4th. US Nat. Congress Appl. Mech., vol. 2, 1962. New York, Publ. ASME, 1962.
11. *Ильюшина Е. А.* Одна из моделей сплошной среды с учетом микроструктуры. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
12. *Ильюшина Е. А.* Колебания кусочно-однородной упругой среды с плоскопараллельными границами раздела. Механика полимеров, 1976, № 4.
13. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М., Изд-во АН СССР, 1963.
14. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. Изд-во МГУ, 1976.
15. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
16. *Ломакин В. А.* Методы решения стохастических краевых задач механики композитных сред. В кн.: Teoria ośrodków wielofazowych. Sześć 1, Warszawa, Wyd. Poskiej akademii nauk, 1974.
17. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
18. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М., «Наука», 1977.
19. *Новожилов В. В.* О связи между напряжениями и упругими деформациями в поликристаллах. В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
20. *Ломакин В. А., Шейнин В. И.* Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.