

## О ПРИМЕНЕНИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. А. КУЗНЕЦОВ

(Киев)

В [1-4] развит аппарат автоморфных (периодических, кусочно-аналитических) функций и показана эффективность их использования при решении краевых задач математической физики и плоских задач гидродинамики и аэродинамики. Ввиду того, что при решении задач плоской гидро- и аэродинамики и теории упругости с использованием комплексных представлений есть много общего, естественно предположить, что и в плоской теории упругости он найдет эффективное применение.

Трудность применения аппарата автоморфных функций в плоской теории упругости состоит в том, что комплексный потенциал Н. И. Мусхелишвили  $\Psi(z)$  не является периодической функцией комплексной переменной  $z=x+iy$ , что следует из известных [5] формул, а получает приращение  $-\omega\Phi'(z_1)$  при  $z_1=z+\omega$ , где  $\omega$  — период. В общем случае это действительно так (например при рассмотрении концентрации напряжений в пластинах, ослабленных периодически повторяющейся системой отверстий). Однако существует ряд задач плоской теории упругости, при решении которых аппарат автоморфных функций применим и его использование целесообразно.

Так, в [6] введением некоторых специальных функций задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой трещин, сведена к краевой задаче Римана для автоморфных функций. Аналогично решена задача для плоскости [7], ослабленной двоякопериодической системой трещин, когда в параллелограмме периодов расположены две трещины разной длины. Кроме того, известны важные для практики плоские периодические задачи теории упругости, которые решаются приведением к краевым задачам Римана для автоморфных функций без введения каких-либо специальных функций. Причем эти задачи по виду и методам приведения к ним не отличаются от соответствующих непериодических. Предлагаемая работа посвящена рассмотрению таких задач.

1. Рассмотрим плоскость, ослабленную периодически повторяющейся системой коллинеарных трещин. Обзор таких задач приведен в [8].

Обычно задачи для плоскости с коллинеарными, периодически повторяющимися трещинами решаются сведением к интегральным уравнениям путем предельного перехода, когда число разрезов неограниченно увеличивается [8], а также использованием конформного отображения плоскости с периодическим рядом коллинеарных разрезов на бесконечнолистную риманову поверхность с разрезом [9]. Причем основная часть работ посвящена случаю, когда на берегах трещины и в бесконечно удаленных частях плоскости заданы напряжения. Покажем, что периодические задачи для коллинеарных трещин могут быть решены также при помощи непосредственного применения аппарата автоморфных функций.

В [9] для решения задач о напряженно-деформированном состоянии плоскости с конечным числом коллинеарных трещин вводится аналитическая функция  $\Omega(z)$ , которая связана с комплексными потенциалами  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  соотношением

$$\Omega(z) = \Phi(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z) \quad (1.1)$$

в результате чего формулы для определения напряженно-деформированного состояния упругой плоскости принимают вид

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)]$$

$$\begin{aligned} Y_y - iX_y &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из формул (1.1), (1.2) следует, что функция  $\Phi(z)$ , а также введенная функция  $\Omega(z)$  в отличие от  $\Psi(z)$  инвариантны относительно линейного преобразования  $z_1 = z + l$ , где  $l$  — действительная постоянная. Поэтому формулы (1.2) справедливы и при рассмотрении периодических, с действительным периодом задач о трещинах.

Следуя [5] без отклонений, при решении периодической первой основной задачи для плоскости с коллинеарными трещинами, когда на берегах разрезов заданы компоненты внешних напряжений и известны напряжения на бесконечности, приходим к краевым задачам Римана, по виду не отличающимся от аналогичных, непериодических

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2P_1(t) \quad \text{на } L \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^- + [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ &= 2P_2(t) \quad \text{на } L \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $L$  — совокупность разрезов на действительной оси в пределах одного периода. Существенное различие их заключается в том, что функции  $\Omega(z)$  и  $\Phi(z)$  должны быть периодическими с периодом  $l$ , т. е. краевые задачи Римана должны решаться в классе кусочно-аналитических, периодических функций. Аппарат решения таких задач развит в [1-4]. Суть его заключается в том, что вместо оператора Коши  $dt/(t-z)$  используется аналогичный периодический оператор  $P'(t)dt/[P(t)-P(z)]$ , где  $P(t) = e^{2qt}$  — основная периодическая функция этой группы ( $q = \pi/l$ ).

Совершенно аналогично при решении периодической второй основной задачи для плоскости с коллинеарными трещинами, когда на берегах разрезов заданы компоненты смещений и дополнительно задан главный вектор  $(X, Y)$  внешних усилий, приложенных к  $L$ , и известно напряженное состояние в бесконечно удаленных частях плоскости, приходим к краевым задачам

$$\begin{aligned} [\kappa\Phi(t) - \Omega(t)]^+ + [\kappa\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 2G_1(t) \quad \text{на } L \\ [\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2G_2(t) \quad \text{на } L \end{aligned} \quad (1.4)$$

Этим же методом может быть решена периодическая смешанная задача для плоскости, ослабленной периодической системой трещин, когда на одном берегу трещины заданы компоненты внешних напряжений, а на другом — перемещения. Действительно, следуя как и выше [5], приходим к краевым задачам Римана

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + (i/\sqrt{\kappa})\Omega(t)]^+ - i\sqrt{\kappa}[\Phi(t) + (i/\sqrt{\kappa})\Omega(t)]^- &= 2F_1(t) \\ [\Phi(t) - (i/\sqrt{\kappa})\Omega(t)]^+ + i\sqrt{\kappa}[\Phi(t) - (i/\sqrt{\kappa})\Omega(t)]^- &= 2F_2(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где необходимо определить кусочно-аналитические, периодические функции по заданным скачкам на разрезах плоскости в пределах полосы периодов.

Детали решения задач (1.3) — (1.5), когда известны функции  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $G_1(t)$ ,  $G_2(t)$ ,  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ , представлены ниже. Отметим, что рассмотрение случаев, когда в пределах одного периода плоскость ослаблена несколькими трещинами разной длины, не связано с принципиальными затруднениями.

2. К разряду периодических задач плоской теории упругости, при решении которых целесообразно использовать аппарат автоморфных функций, относятся также граничные задачи для однородной полуплоскости, когда к ее границе приложена периодически повторяющаяся внешняя нагрузка, в частности периодические контактные задачи [10-13]. Решения

этих задач имеют важное практическое значение в области трения и изнашивания фрикционных узлов. С их помощью можно учитывать влияние микронеровностей на концентрацию напряжений и деформаций в приповерхностных слоях контактирующих тел.

В [1] для решения граничных задач о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости определенная в общем случае в нижней полуплоскости аналитическая функция  $\Phi(z)$  продлевается в верхнюю полуплоскость при помощи соотношения

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \quad (2.1)$$

В результате этого формулы для определения напряженно-деформированного состояния, выраженные через одну аналитическую функцию  $\Phi(z)$ , определенную как в нижней полуплоскости, так и в верхней, принимают вид

$$\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ Y_y - iX_y &= \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из формул (2.1), (2.2), так же как из формул для плоскости с трещинами, следует, что они справедливы и при рассмотрении периодических граничных задач для полуплоскости. Это следовало ожидать, так как задачи о трещинах и штампах, по существу, приводятся к одним и тем же интегральным уравнениям. Однако периодические граничные задачи для полуплоскости отличаются от случая, когда число участков, вдоль которых нагружается полуплоскость, ограничено.

Действительно, в случае конечного количества участков контакта главный вектор всех внешних сил, приложенных к границе полуплоскости, ограничен, что влечет за собой равенство нулю в бесконечно удаленных точках напряжений и, следовательно, функции  $\Phi(z)$ . Это несколько упрощает решение граничных задач. Если же рассматривать периодическую задачу, то главный вектор внешних сил, приложенных ко всей границе полуплоскости, неограничен, поэтому в бесконечно удаленных от поверхности частях полуплоскости имеет место равномерное распределение напряжений

$$Y_y^{-\infty} = X_x^{-\infty} = -P_0/l, \quad X_y^{-\infty} = T_0/l \quad (2.3)$$

где  $P_0$  и  $T_0$  — соответственно главные векторы нормальной и касательной нагрузок, приложенных к границе полуплоскости в пределах одного периода, а  $l$  — период.

С учетом (2.3) находим предельные значения функций  $\Phi(z)$  и  $\overline{\Phi(z)}$  при  $y \rightarrow -\infty$ :

$$\Phi^{-\infty}(z) = -1/2(P_0 + iT_0)/l, \quad \overline{\Phi}^{-\infty}(z) = 1/2(P_0 - iT_0)/l \quad (2.4)$$

Рассмотрим периодическую первую основную задачу для полуплоскости, когда на ее границе в пределах одного периода заданы давление  $P(t) = -Y_y^-$  и касательное напряжение  $T(t) = X_y^-$ . Граничное условие поставленной задачи на основании (2.2) принимает вид

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = P(t) + iT(t) \quad \text{на } L \quad (2.5)$$

т. е. по заданному скачку необходимо определить кусочно-аналитическую, периодическую (с периодом  $l$ ) функцию  $\Phi(z)$ . Согласно [1], находим

$$\Phi(z) = \frac{1}{l} \int_L [P(t) + iT(t)] \frac{e^{2qti} dt}{e^{2qti} - e^{2qzi}} + C \quad (2.6)$$

где  $C$  — комплексная постоянная, значение которой можно найти из условий на бесконечности.

Переходя к пределу при  $y \rightarrow -\infty$  в формуле (2.6) и подставляя полученное при этом значение в (2.4), получаем  $C = -1/2(P_0 + iT_0)/l$ . Тогда окончательное выражение для функции  $\Phi(z)$  после ряда очевидных преобразований примет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2il} \int_L [P(t) + iT(t)] \operatorname{ctg} q(t-z) dt \quad (2.7)$$

Обычно решение первой основной периодической задачи для упругой полуплоскости получают в тригонометрических рядах, что не всегда удобно. Очевидно, что приведенное решение проще и удобнее при практическом использовании. Аналогично решается периодическая вторая основная задача, когда на границе  $L$  полуплоскости в пределах одного периода заданы компоненты смещения.

Рассмотрим периодические решения смешанных задач для полуплоскости. К таким задачам, в частности, относятся:

1. Смешанная задача, когда на части границы  $L'$  в пределах полосы периодов заданы смещения, а на остальной части границы  $L''$  — напряжения, которые чаще всего принимают равными нулю.

2. Контактная задача для полуплоскости без учета сил трения на контактной площадке. В этом случае принимается, что на  $L''$  напряжения отсутствуют, а на  $L'$  задано  $v'(t) = f'(t)$  ( $f(t)$  — уравнение профиля штампа) и  $T(t) = 0$ .

3. Контактная задача с учетом сил трения, которая отличается от задачи 2 тем, что на  $L'$  принимается  $T(t) = K P(t)$  ( $K$  — коэффициент трения). При  $K = 0$  задачи 2 и 3 идентичны.

В этих задачах считается заданным главный вектор внешних сил, приложенных к границе упругой полуплоскости в полосе периодов. В общем случае  $L'$  состоит из произвольного, но заданного количества сплошных отрезков  $a_k b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) действительной оси. При  $n \neq 1$  должны быть заданы также некоторые дополнительные условия относительно жесткого перемещения штампов и суммарных усилий, приложенных к  $a_k b_k$ .

Следуя [5], с учетом соотношений (2.4) задачи 1–3 можно привести к краевой задаче Римана для кусочно-аналитической, периодической функции  $\Phi(z)$ :

$$\Phi^+(t) + \theta \Phi^-(t) = w(t) \text{ на } L' \quad (2.8)$$

где  $\theta$  и  $w(t)$  для задач 1–3 определяются по следующим формулам:

$$\theta = \kappa, \quad w(t) = 2\mu g'(t)$$

$$\theta = 1, \quad w(t) = \frac{4\mu i}{\kappa + 1} f'(t) = F(t)$$

$$\theta = e^{2\pi i \alpha}, \quad w(t) = (1 + i\kappa) e^{\pi i \alpha} \cos \pi \alpha F(t)$$

Согласно [4], решение задачи (2.8) дает функция

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{l} \int_{L'} \frac{w(t)}{X^+(t)} \frac{e^{2qt} dt}{e^{2qt} - e^{2qz}} + DX(z) \quad (2.9)$$

Здесь  $D = D_0 + iD_1$  — комплексная постоянная,  $X(z)$  — каноническая функция задачи (2.8), которая, согласно [4], определяется выражением

$$X(z) = \prod_{k=1}^n \sin^{1/2 + \gamma} q(z - b_k) \sin^{-1/2 - \gamma} q(z - a_k)$$

где  $\gamma = -i\beta = 1/2 i \ln \kappa / \pi$  — для задачи 1; для задачи 2 параметр  $\gamma = 0$ , а для задачи 3

$$\gamma = \alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ K \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right]$$

Функция  $\Phi(z)$ , согласно (2.9), в точках  $z=b_k$  ограничена, а в точках  $z=a_k$  интегрируема; это накладывает ограничение на заданную функцию  $w(t)$ , для которой точка  $z=b_k$  не должна быть особенной. Чтобы избавиться от этого ограничения, необходимо так преобразовать выражение (2.9), используя произвольность постоянной  $D$ , чтобы функция  $\Phi(z)$  была неограничена как в точках  $z=a_k$ , так и в точках  $z=b_k$ .

Учитывая тождество

$$\frac{ie^{2qi}}{e^{2qi}-e^{2qzi}} = \frac{1}{2} [\operatorname{ctg} q(t-z) + i]$$

и видоизменяя второе слагаемое правой части (2.9), находим

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & -\frac{X(z)}{2le^{\pi\gamma i}} \int_{L'} \frac{w(t)}{|X^+(t)|} \operatorname{ctg} q(t-z) dt + \\ & + X^*(z) \sum_{m=0}^n c_m \sin^{n-m} qz \cos^m qz \quad (m=0,1,\dots,n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$c_m = \alpha_m + i\delta_m, \quad X^*(z) = X(z) / \prod_{k=1}^n \sin q(z-b_k)$$

Функция  $\Phi(z)$ , представленная в форме (2.10), должна также удовлетворять соотношениям (2.4), которые определяют ее поведение в бесконечно удаленных от поверхности частях полуплоскости. Поэтому комплексные постоянные  $c_m$  должны удовлетворять некоторым дополнительным соотношениям. Определим их. Переходя к пределу при  $z \rightarrow x - i\infty$  в выражении (2.10), подставляя полученное при этом значение функции  $\Phi(z)$  в условия (2.4), выделяя действительные и мнимые части и решая полученную систему уравнений, после очевидных преобразований находим

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} c_0 - c_2 + c_4 - \dots &= (\alpha_0 - \alpha_2 + \alpha_4 - \dots) + i(\delta_0 - \delta_2 + \delta_4 - \dots) \\ c_1 - c_3 + c_5 - \dots &= (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \dots) + i(\delta_1 - \delta_3 + \delta_5 - \dots) \end{aligned} \right\} = \\ & = \frac{i(P_0 + iT_0)}{2l} \frac{\sin}{\cos} \left\{ \frac{q}{2} \sum_{k=1}^n [(b_k + a_k) - 2\gamma(b_k - a_k)] \right\} - \\ & - \frac{1}{2le^{\pi\gamma i}} \frac{\sin}{\cos} \left( q \sum_{k=1}^n b_k \right) \int_{L'} \frac{w(t)}{|X^+(t)|} dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, для определения  $(n+1)$  комплексной постоянной  $c_m$  имеется два уравнения (2.11); недостающее  $(n-1)$  уравнение в случае нескольких участков контакта в пределах одного периода ( $n \neq 1$ ) можно найти из дополнительных условий относительно жесткого перемещения штампов и суммарных усилий, приложенных к отрезкам  $a_k b_k$ .

*Замечание 1.* Известны решения контактных задач с учетом сил трения, получаемые при помощи принципа суперпозиции упругих решений [14, 15]. При этом постулируется независимость энтропии контактного давления и размеров контактной площадки от приложенных сил трения. Легко показать, что контактную задачу в этом случае можно свести к следующей краевой задаче Римана:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{4\mu i(1+iK)}{\kappa+1} f'(t) \text{ на } L'$$

Поэтому решение контактной задачи с учетом сил трения при помощи принципа суперпозиции можно получить, полагая в решении задачи  $\beta = 0$  и  $K \neq 0$ .

*Замечание 2.* Периодическая контактная задача без учета сил трения в частном случае для штампа с плоским основанием впервые решена в [16], а в [17] методом, отличным от предлагаемого исследования, получено выражение для определения контактного давления.

В [18] дается метод сведения при помощи конечного преобразования Фурье задач математической физики для плоскости с периодически повторяющимися разрезами сначала к некоторой дискретной задаче, а затем к системе интегро-дифференциальных уравнений, содержащих особый интеграл Коши. Отмечается, что таким путем можно решать периодические задачи для упругой полуплоскости, однако их решение не дано. При помощи автоморфных функций решения этих задач более просты.

*Замечание 3.* Полученные решения периодических контактных задач для полуплоскости можно использовать при нахождении решений периодических контактных задач для областей более сложной конфигурации, например для упругой полосы и кольца, как это сделано в [13].

3. Детально рассмотрим полученные в п. 2 зависимости для случая одного участка контакта в пределах полосы периодов. Полагая в формулах (2.10) и (2.11)  $n=1$  и объединяя их, после ряда преобразований для периодической основной смешанной задачи получаем

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{\mu}{ilY_1(z)} \left\{ \int_a^b \frac{Y_1^+(t)g'(t)}{\sin q(t-z)} dt + \right. \\ & \left. + \frac{i(P_0 + iT_0)\sqrt{\kappa}}{2\mu} \cos q \left[ z - \frac{b+a}{2} - \beta i(b-a) \right] \right\} \\ Y_1(z) = & \sin^{1/2-i\beta} q(z-a) \sin^{1/2+i\beta} q(b-z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Аналогично для периодической контактной задачи с учетом сил трения находим

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{2\mu(1+iK)\cos \pi\alpha e^{\pi i\alpha}}{l(\kappa+1)Y_2(z)} \left\{ \int_a^b \frac{Y_2^+(t)f'(t)}{\sin q(t-z)} dt + \right. \\ & \left. + \frac{P_0(\kappa+1)}{4\mu \cos \pi\alpha} \cos q \left[ z - \frac{b+a}{2} + \alpha(b-a) \right] \right\} \\ Y_2(z) = & \sin^{1/2-\alpha} q(z-a) \sin^{1/2+\alpha} q(b-z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что в предельном случае при  $l \rightarrow \infty$ , который соответствует давлению на границу упругой полуплоскости одного штампа с учетом сил трения или сцепления, действующих на контактной площадке, получаем известные выражения, найденные Н. И. Мусхелишвили [5].

Выше рассмотрены решения периодических контактных задач, неограниченные вблизи концов контактной площадки. В частности, для периодической контактной задачи с учетом сил трения это предполагает наличие угловых точек у профиля штампа на концах участка контакта. Поэтому размеры контактной площадки известны заранее. Однако для практики наиболее важны решения для штампов, профили которых не имеют угловых точек (предположение об их существовании является чисто математической абстракцией). При этом контактное давление и функция  $\Phi(z)$  должны быть ограниченными везде в области контакта, а зависимость размеров контактной области от приложенной внешней нагрузки, упругих свойств сжимаемого материала и конфигурации штампа может быть определена из необходимых условий существования такого ограниченного решения.

Выделяя в формуле (3.2) неограниченные при стремлении к точкам  $z=a$  и  $z=b$  части и приравнивая их нулю, после ряда очевидных преобразований находим систему уравнений для определения координат концов

контактной площадки

$$\int_a^b \frac{\sin q t f'(t)}{Y^*(t)} dt = \frac{P_0(\kappa+1)}{4\mu \cos \pi\alpha} \cos q \left[ \alpha(b-a) + \frac{b+a}{2} \right]$$

$$\int_a^b \frac{\cos q t f'(t)}{Y^*(t)} dt = -\frac{P_0(\kappa+1)}{4\mu \cos \pi\alpha} \sin q \left[ \alpha(b-a) + \frac{b+a}{2} \right] \quad (3.3)$$

$$Y^*(t) = \sin^{1/2-\alpha} q(t-a) \sin^{1/2+\alpha} q(b-t)$$

С учетом условий (3.3) формула (3.2) для определения функции  $\Phi(z)$ , ограниченной везде в контактной области, преобразуется к виду

$$\Phi(z) = \frac{2\mu(1+iK) \cos \pi\alpha e^{\pi i\alpha} Y^*(z)}{l(\kappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t) dt}{Y^*(t) \sin q(t-z)} \quad (3.4)$$

Используя выражение (3.4), легко найти общую формулу для определения контактного давления под периодическим штампом. Действительно, учитывая, что  $P(t)$  связано с функцией  $\Phi(z)$  соотношением  $(1+iK)P(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ , и вычисляя разность в правой части по периодическим аналогам формул Сохоцкого — Племеля, получаем

$$P(x) = -\frac{2\mu \sin 2\pi\alpha}{\kappa+1} f'(x) + \frac{4\mu \cos^2 \pi\alpha Y^*(x)}{l(\kappa+1)} \int_a^b \frac{f'(t) dt}{Y^*(t) \sin q(t-x)} \quad (3.5)$$

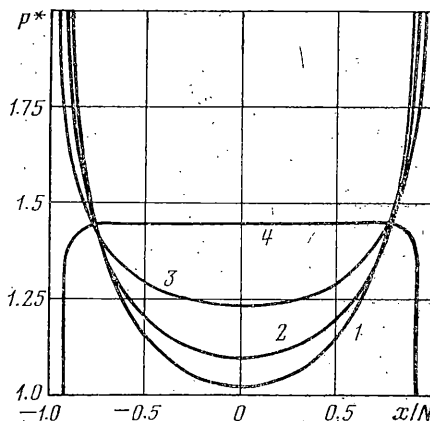
4. Рассмотрим случай одного штампа в пределах полосы периодов, сцепленного вдоль прямолинейного основания с границей упругой полуплоскости. Эта задача представляет интерес при расчете фундаментов, когда их число велико, при изучении влияния жестких накладок. К этой задаче сводится вопрос о влиянии клеевых или сварных соединений, когда одно из склеиваемых тел и слой клея можно считать абсолютно твердым. Решение этой задачи представляет также интерес при изучении процессов трения и изнашивания, так как для определения силы трения необходимо решать задачу о разрыве сил сцепления между микронеровностями контактирующих поверхностей.

Предположим, что к середине штампа приложена сила  $P_0$ , направленная вертикально вниз. Так как  $g'(t) = 0$  на  $L'$ , то из (3.1) получаем

$$\Phi(z) = \frac{P_0 \sqrt{\kappa} \cos q(z-2m\beta i)}{2lV \sin^2 qm - \sin^2 qz} \left[ \frac{\sin q(z+m)}{\sin q(m-z)} \right]^{i\beta}$$

где  $m$  — полуширина участка контакта. Выражение для давления  $P(t)$  и касательного напряжения  $T(t)$ , действующих под штампом, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P(t) \\ T(t) \end{aligned} \right\} = \frac{P_0(\kappa+1)}{4l(\sqrt{\kappa})^{m^2+1} V \sin^2 qm - \sin^2 qt} \left\{ \begin{aligned} \kappa^{m^2} \cos \left[ \pi t + \beta \ln \frac{\sin q(t+m)}{\sin q(m-t)} \right] + \\ \sin \left[ \pi t + \beta \ln \frac{\sin q(t+m)}{\sin q(m-t)} \right] - \end{aligned} \right.$$

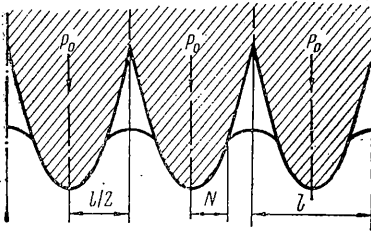


Фиг. 1

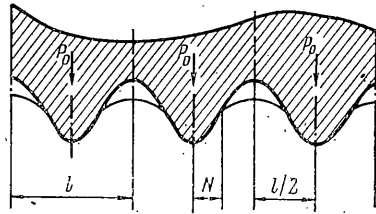
$$\left. \begin{array}{l} +\cos \left[ \pi t + \beta \ln \frac{\sin q(t+m)}{\sin q(m-t)} \right] \\ -\sin \left[ \pi t + \beta \ln \frac{\sin q(t+m)}{\sin q(m-t)} \right] \end{array} \right\}, \quad m^{\circ} = \frac{2m}{l}$$

На фиг. 1 представлены эпюры контактного давления  $P(t)$ , взято в отношении к  $P_0(\kappa+1)/(2\pi m\sqrt{\kappa})$ , для различных значений отношения  $m/l$ , причем цифры 1, 2, 3 и 4 обозначены кривые, соответствующие  $m/l=0.1, 0.2, 0.3$  и  $0.4$ .

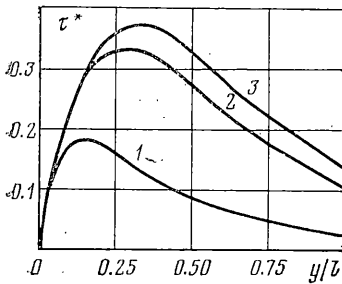
При расчете площади касания трущихся тел чаще всего принимают параболическую модель микронеровностей шероховатой поверхности, и размеры единичной контактной площадки вычисляют по формулам Герца [19]. При этом не учитывается взаимное влияние отдельных неровностей на деформацию. Поэтому представляет интерес выражение для определения размеров участка контакта под периодически повторяющимся параболическим штампом (фиг. 2). Уравнение его профиля в пределах одного периода имеет вид  $f(t)=t^2/(2R)$ , где  $R$  — радиус кривизны штампа, а в вершине параболы.



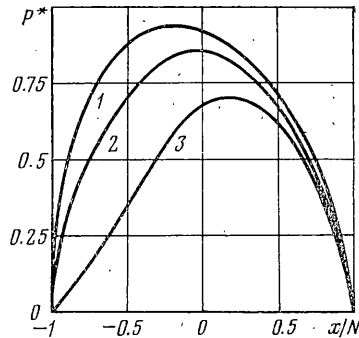
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Предположим также, что трение под штампом отсутствует ( $K=\alpha=0$ ). Учитывая симметричность приложенной нагрузки, можно заключить, что начало координат расположено в центре контактной площадки, т. е.  $b=-a=N$ . При выполнении этого условия второе уравнение системы (3.3) удовлетворяется тождественно, а интеграл в первом уравнении вычисляется при помощи функций Лобачевского [20]. После ряда преобразований получаем

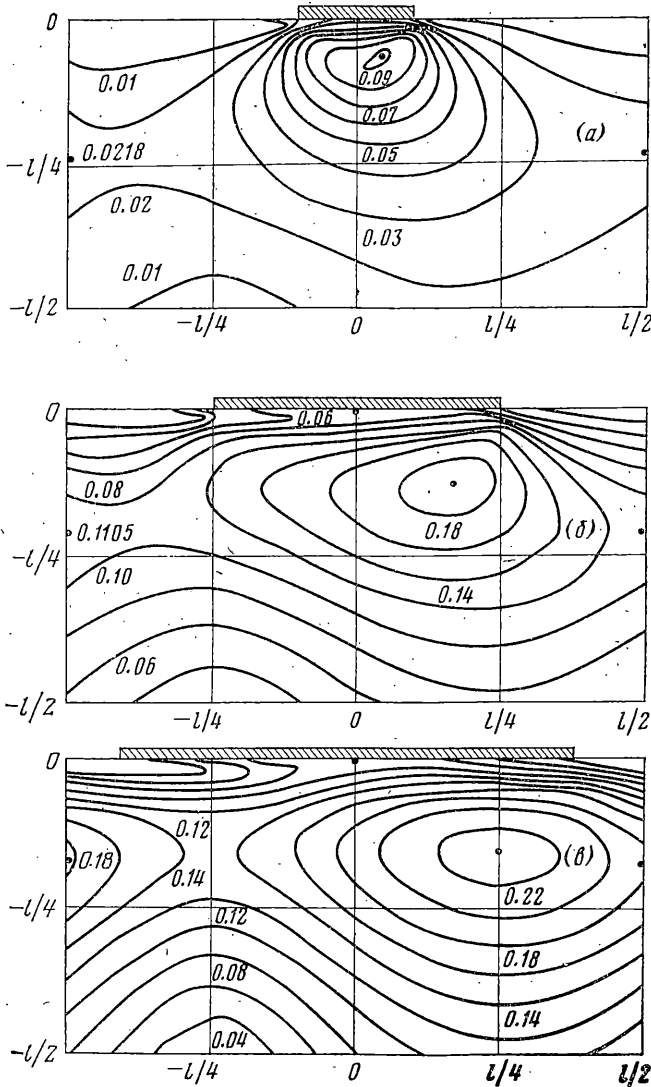
$$N = \frac{l}{\pi} \arccos \exp \left[ -\frac{P_0 \pi R (\kappa+1)}{4\mu l^2} \right]$$

Рассмотрим действие периодического штампа, имеющего форму синусоиды (фиг. 3). Предположим сначала, что силы трения на контактной площадке отсутствуют. Полагая в формуле (3.4)  $K=\alpha=0$ ,  $f(t)=\sin^2 qt/(2q^2R)$  и вычисляя при помощи теории вычетов [21] интеграл, получим

$$\Phi(z) = \frac{\mu i}{qR(\kappa+1)} (\sin 2qz - \sqrt{2} \cos qz \sqrt{\cos 2qN - \cos 2qz})$$

При помощи функции  $\Phi(z)$  можно определить напряженно-деформированное состояние в любой точке контактной области. В качестве примера приведем выра-





Фиг. 6

жение для определения максимальных касательных напряжений на оси симметрии синусоидального штампа под площадкой контакта. Оно имеет вид

$$\tau_{\max}|_{x=0} = \frac{4\mu}{qR(\kappa+1)} \left| y \left[ \operatorname{ch} 2qy - \frac{\operatorname{sh} qy (2 \operatorname{ch}^2 qy - \cos^2 qN)}{(\operatorname{ch}^2 qy - \cos^2 qN)^{1/2}} \right] \right|$$

На фиг. 4 показаны распределения  $\tau_{\max}$ , взятые в отношении к  $4\mu/[qR(\kappa+1)]$ , при  $x=0$  для различных отношений  $N/l$ . Цифрами 1, 2, 3 обозначены кривые, соответствующие отношению  $N/l$ , равному 0.1, 0.25 и 0.4.

Рассмотрим случай, когда на участке контакта действуют силы трения. Такая задача возникает при рассмотрении процессов трения и изнашивания твердых тел, когда используется синусоидальная модель микронеровностей их поверхностей, и считается, что на участке контакта действуют адгезионные силы. В этом случае из формулы (3.5) можно получить выражение для контактного давления  $P(x)$ , которое имеет вид

$$P(x) = \frac{4\mu \cos \pi\alpha}{qR(\kappa+1)} \cos q(x+2\alpha N-2\gamma) \sin^{1/2-\alpha} q(N+x) \sin^{1/2+\alpha} q(N-x)$$

где  $\gamma$  — расстояние между осью симметрии синусоидального штампа и серединой контактной площадки. Результаты расчетов при  $K=1$  для  $P^*=P(x)/\{4\mu/[qR(\kappa+1)]\}$  представлены на фиг. 5, где кривые 1, 2, 3 соответствуют отношению  $N/l$ , равному 0,1, 0,2, 0,3.

На фиг. 6, а — в представлены результаты расчетов максимальных касательных напряжений в области контакта синусоидального штампа и упругого полупространства в том случае, когда на контактной площадке действуют силы трения (коэффициент трения равен 0,1). Расчетные формулы получены при помощи принципа суперпозиции. Величины напряжений  $\tau_{\max}$ , взятых в отношении к  $4\mu/[qR(\kappa+1)]$ , указаны у соответствующих изохронных линий. Фиг. 6, а соответствует  $N/l=0,1$ , фиг. 6, б —  $N/l=0,25$ , фиг. 6, в —  $N/l=0,4$ . Участки, вдоль которых осуществляется контактирование, выделены сверху заштрихованной полосой.

Видно, что при большом расстоянии между участками контакта (фиг. 6, а) распределение  $\tau_{\max}$  в контактной области обладает теми же характерными особенностями, как и под единственным параболическим штампом [22]. По мере увеличения отношения  $N/l$  (фиг. 6, б, в) на расположение изохром оказывает влияние наличие соседних участков контакта.

Поступила 11 IV 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116.
2. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1962, т. 122.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. Решение задач механики сплошной среды сведением к крайвым задачам для автоморфных функций. В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1965, стр. 208–218.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. Кудрявцев В. А., Паргон В. З. Первая основная задача теории упругости для двоичкопериодической системы разрезов. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972, стр. 251–258.
7. Паргон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М., «Наука», 1974.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацковский А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976.
9. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 3.  
Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. Замечание к статье «О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения»; Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
10. Кузнецов Е. А. Периодическая основная смешанная задача теории упругости для полуплоскости. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 9.
11. Кузнецов Е. О. До питання про періодичну контактну задачу. Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. матем., механ., 1976, № 18.
12. Кузнецов Е. А. Периодическая контактная задача для полуплоскости с учетом сил трения. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 10.
13. Насхейн Е. Л., Нуллер В. М. Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
14. Саверин М. М. Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузок. М.—Л., Машиз, 1946.
15. Smith J. O., Liu C. K. Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems. J. Appl. Mech., 1953, vol. 20, No. 2, p. 157.
16. Sadowski M. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. und Mech., 1928, Bd 8, N 2, S. 107–121.
17. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
18. Черский Ю. И. Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 1.
19. Демкин Н. В. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
21. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
22. Клюев Э. А., Горюховский Г. А., Чеберяк А. Г., Кузнецов Е. А. Напряженное состояние в зоне контакта полиуретана с твердым индентором. Механика полимеров, 1976, № 5.