

СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО ТЕЛА

Е. В. ЛОМАКИН, Ю. Н. РАБОТНОВ.

(Москва)

Многие материалы обладают свойством разномодульности, которое обычно проявляется в различии модулей упругости при растяжении и сжатии [1-4]. Для описания явления разномодульности предложен потенциал, зависящий от первого и второго инвариантов тензора напряжений и включающий в себя как частный случай потенциал для классического упругого тела.

Дано описание методики определения функции и констант, входящих в выражение для потенциала. Обсуждены возможные виды диаграмм деформирования при пропорциональном и непропорциональном нагружениях. Проанализирована справедливость для разномодульных материалов некоторых теорем теории упругости.

В последнее время опубликован ряд работ, в которых отмечалось, что упругие свойства многих материалов зависят от вида напряженного состояния. Эксперименты проводились в условиях одноосного растяжения и сжатия, а также плоского напряженного состояния. Например, для конструкционных графитов ВПП и АРВ модуль упругости при сжатии больше модуля упругости при растяжении соответственно на 10 и 20% [1, 2], а для графита ПРОГ — примерно в два раза. С другой стороны, для графита АТJ-S модуль упругости при растяжении на 20% больше модуля упругости при сжатии [3].

Еще большее различие в значениях модулей наблюдалось у некоторых композиционных материалов. У композита углерод — углерод с трехосным плетением волокон значение модуля упругости при растяжении в четыре-пять раз превышало значение модуля при сжатии [4]. При этом наблюдалась лишь незначительная анизотропия упругих свойств композита.

Систематические исследования физической природы такого поведения материалов до настоящего времени не проводились, однако можно указать наиболее вероятные причины зависимости упругих характеристик от вида напряженного состояния. Исследованные графиты представляли собой крупнозернистые пористые композиционные материалы. Тело, содержащее целевидную трещину, при растяжении в перпендикулярном плоскости трещины направлении имеет большую податливость, чем при сжатии, поскольку при сжатии берега трещины смыкаются. В графите трещины или поры распределены по объему материала и имеют различную ориентацию. Эти поры могут раскрываться в условиях растягивающих напряжений и закрываться при сжимающих напряжениях.

Если характер пористости, а также упругие свойства частиц наполнителя и связующего таковы, что при сжатии площадь контакта частиц увеличивается, то естественно ожидать увеличения модуля упругости при сжатии по сравнению с модулем при растяжении. Это наблюдалось у графитов с низким модулем упругости.

Композиты углерод — углерод на тканевой основе или с трехосным плетением волокон, как правило, имеют значительную пористость. При растяжении волокна натягиваются, а при сжатии они могут выгнаться в пространство пор. Зависимость упругих характеристик от вида напряженного состояния определяется свойствами армирующей фазы и связующего, а также характером дефектов структуры.

Были предложены механические модели материалов, обладающих разными модулями при растяжении и сжатии, а сама теория получила название разномодульной теории упругости. В модели, предложенной в [5-7], принято, что каждая из податливостей в законе связи деформаций с напряжениями скачком меняет свое значение при изменении знака напряжения, при котором стоит сомножителем данная

податливость. Таким образом, значение податливости определялось знаком только одного напряжения, поэтому для выполнения условия симметрии матрицы податливостей необходимо было требовать равенство податливостей со смешанными индексами для растягивающих и сжимающих напряжений, а именно $\nu^+/E^+ = \nu^-/E^-$, где ν^+ и E^+ — коэффициент Пуассона и модуль упругости при растяжении, а ν^- и E^- — при сжатии. Это, в некоторой мере, сужало класс рассматриваемых материалов. Наиболее детально достоинства и недостатки данной модели проанализированы в [3].

Джонсом была предложена модель материала с матрицей взвешенных податливостей [3], в которой введены весовые коэффициенты, зависящие от абсолютных величин двух главных напряжений. Таким образом, податливости зависели не только от знаков напряжений, но и от их величин. Податливости со смешанными индексами менялись при изменении напряжений непрерывно от значений, когда все напряжения растягивающие, до значений, когда все напряжения сжимающие. Данная модель включала как частный случай приведенное выше условие. Следует отметить, что выбор весовых коэффициентов сделан совершенно произвольно без какого-либо обоснования. Предложенная Джонсом модель — это, в некоторой степени, модификация модели Амбарцумяна — Хачатряна. В ней предпринята попытка учесть влияние на значение податливости не одного, а двух главных напряжений.

В общем случае напряженное состояние характеризуется тремя главными напряжениями, поэтому при построении определяющих уравнений будем предполагать, что упругие характеристики материала определяются знаками и величинами трех главных напряжений.

1. Потенциал для разномодульного упругого тела. Определяющие уравнения для изотропного разномодульного тела построим на основе следующих принципов.

Выражение для потенциала должно включать в себя как частный случай потенциал для классического упругого тела.

Потенциал зависит только от первого и второго инвариантов тензора напряжений. Вид напряженного состояния характеризуется безразмерным параметром $\xi = \sigma/\sigma_0$, где $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ — среднее напряжение, $\sigma_0 = (\frac{2}{3}S_{ij}S_{ij})^{1/2}$ — интенсивность напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ — девиатор напряжений.

Как будет показано, для описания разномодульности вполне достаточно первого и второго инвариантов и нет необходимости вводить третий инвариант тензора напряжений. Вместо второго инварианта удобнее использовать интенсивность напряжений.

Потенциал для классического изотропного упругого тела можно записать в виде

$$\Phi = (A + B\xi^2)\sigma_0^2/2, \quad A = \frac{2}{3}(1 + \nu)/E, \quad B = 3(1 - 2\nu)/E \quad (1.1)$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

При построении потенциала для разномодульного тела естественно предположить, что в общем случае каждая из податливостей A и B зависит от вида напряженного состояния. В силу сделанных предположений, потенциал можно записать в следующем виде:

$$\Phi = \frac{1}{2}\{A[1 + f_1(\xi)] + B[1 + f_2(\xi)]\xi^2\}\sigma_0^2 \quad (1.2)$$

При $f_1(\xi) = 0$ и $f_2(\xi) = 0$ получим потенциал (1.1). Легко показать, что нет необходимости вводить две функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$. Действительно, обозначим через $\zeta(\xi)$ следующее выражение:

$$\zeta(\xi) = [Af_1(\xi) + Bf_2(\xi)\xi^2]/(A + B\xi^2)$$

Тогда (1.2) примет весьма простой вид

$$\Phi = \frac{1}{2}[1 + \zeta(\xi)](A + B\xi^2)\sigma_0^2 \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) представляет собой общую форму записи потенциала для изотропного упругого разномодульного тела. Будем предполагать, что функция $\zeta(\xi)$ непрерывно дифференцируема. Не нарушая общности, можно считать, что $\zeta(0) = 0$.

Найдем выражения для компонентов тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}$. Используя соотношения $\partial\sigma_0/\partial\sigma_{ij} = 2/3 S_{ij}/\sigma_0$, $\partial\sigma/\partial\sigma_{ij} = 1/3 \delta_{ij}$, получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_0} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} + \frac{1}{3} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \delta_{ij}$$

Из последнего выражения следует, что объемная деформация ε и интенсивность деформаций ε_0 равны соответственно

$$\varepsilon = \partial\Phi/\partial\sigma, \quad \varepsilon_0 = \partial\Phi/\partial\sigma_0 \quad (\varepsilon_0 = \sqrt{3} e_{ij} e_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon \delta_{ij})$$

Дифференцируя выражение (1.3), запишем зависимость деформаций от напряжений в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & 2/3 \{ -1/2 \zeta'(\xi) (A + B\xi^2) \xi + A [1 + \zeta(\xi)] \} S_{ij} + \\ & + 1/3 \{ 1/2 \zeta'(\xi) (A + B\xi^2) / \xi + B [1 + \zeta(\xi)] \} \sigma \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Определение констант и функции ζ . Обычно результаты экспериментов представляются в виде серии диаграмм $\varepsilon_0 - \sigma_0$, полученных при пропорциональных нагружениях [1, 2], либо в виде, позволяющем построение таких диаграмм. Используя эти данные, можно определить функцию $\zeta(\xi)$ из линейного дифференциального уравнения

$$-1/2 \xi (A + B\xi^2) \zeta' + A(1 + \zeta) = \omega(\xi), \quad \omega(\xi) = \varepsilon_0/\sigma_0 \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) с начальным условием $\zeta(0) = 0$ можно представить в виде

$$1 + \zeta = \frac{\xi^2}{A + B\xi^2} \left(B - \int \frac{\omega d\xi}{\xi^3} \right) \quad (2.2)$$

Константа $A = \omega(0)$ определяется наклоном диаграмм $\varepsilon_0 - \sigma_0$ для случая чистого сдвига. Вычислив по частям интеграл (2.2), получим следующее выражение для функции:

$$1 + \zeta = \left(\omega + B\xi^2 + \xi^2 \int \frac{\omega' d\xi}{\xi^2} \right) (A + B\xi^2)^{-1}$$

С учетом последнего равенства потенциал запишем в виде

$$\Phi = \omega(\xi) \frac{\sigma_0^2}{2} + \left(B - \int \frac{\omega' d\xi}{\xi^2} \right) \frac{\sigma^2}{2}$$

Константу B можно определить из любого эксперимента, в котором напряженное состояние отлично от состояния чистого сдвига.

При простом растяжении $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma = 1/3 \sigma_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, $\xi = 1/3$. Продольная деформация

$$\varepsilon_1 = \left[1 + \zeta \left(\frac{1}{3} \right) \right] \left(A + \frac{1}{9} B \right) \sigma_1$$

Поперечная деформация

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = - \left\{ \left[1 + \zeta \left(\frac{1}{3} \right) \right] \left(\frac{1}{2} A - \frac{1}{9} B \right) - \frac{1}{4} \zeta' \left(\frac{1}{3} \right) \left(A + \frac{1}{9} B \right) \right\} \sigma_1$$

Таким образом, при растяжении модуль упругости и коэффициент Пуассона равны соответственно

$$E^+ = \left\{ \left[1 + \zeta \left(\frac{1}{3} \right) \right] \left(A + \frac{1}{9} B \right) \right\}^{-1}$$

$$v^+ = 2A \left(A + \frac{1}{9}B \right)^{-1} - \frac{1}{4} \xi' \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 + \xi \left(\frac{1}{3} \right) \right]^{-1} - 1$$

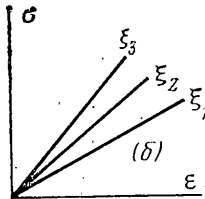
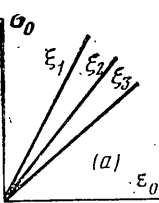
При простом сжатии

$$E^- = \left\{ \left[1 + \xi \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \left(A + \frac{1}{9}B \right) \right\}^{-1},$$

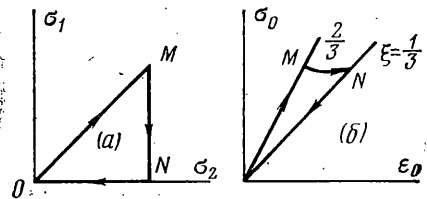
$$v^- = 2A \left(A + \frac{1}{9}B \right)^{-1} - \frac{1}{4} \xi' \left(-\frac{1}{3} \right) \left[1 + \xi \left(-\frac{1}{3} \right) \right]^{-1} - 1$$

Из последних формул видно, что соотношение $v^+/E^+ = v^-/E^-$ выполняется, когда функция $\xi(\xi) = \text{const}$, т. е. при обычном законе упругости.

3. Виды диаграмм деформирования. При пропорциональных нагружениях формула (1.4) дает линейную зависимость деформаций от напряжений. Именно с таким видом нагружения приходится иметь дело в стан-



Фиг. 1



Фиг. 2

дартных испытаниях. Лучше всего вести рассмотрение в координатах ϵ_0 , σ_0 и ϵ , σ . Зависимость интенсивности деформаций от напряжений, согласно (2.1), определяется выражением

$$\epsilon_0 = \omega(\xi) \sigma_0 \quad (3.1)$$

Зависимость объемной деформации от напряжений можно представить в виде

$$\epsilon = \Omega(\xi) \sigma, \quad \Omega(\xi) = \frac{1}{2} \xi'(\xi) \left(A + B\xi^2 \right) / \xi + B \left[1 + \xi(\xi) \right] \quad (3.2)$$

Функции $\omega(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ связаны простым соотношением

$$\omega + \xi^2 \Omega = (A + B\xi^2) (1 + \xi) \quad (3.3)$$

Продифференцировав обе части равенства (3.3), найдем

$$\omega' + \xi^2 \Omega' = 0 \quad (3.4)$$

Таким образом, согласно (3.4), если функция $\omega(\xi)$ возрастает, то функция $\Omega(\xi)$ должна убывать и наоборот. Это вполне естественное условие, выражающее соответствие между изменением сдвиговой и объемной деформацией.

Согласно (3.1) и (3.2), при пропорциональных нагружениях получим серию линейных диаграмм в координатах ϵ_0 , σ_0 (фиг. 1, а) и ϵ , σ (фиг. 1, б). Диаграммы будут линейными только при пропорциональных нагружениях. При других видах нагружений, в зависимости от пути, можно получить криволинейные диаграммы, имеющие в том числе и падающие участки.

Это можно проиллюстрировать на примере пути нагружения и разгрузки, показанном на фиг. 2, а. Допустим, что сначала происходит равномерное двухосное растяжение, затем напряжение σ_2 остается постоянным, а σ_1 уменьшается до нуля и, наконец, σ_2 уменьшается до нуля.

При двухосном растяжении $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, $\xi = 2/3$. Допустим, что функция $\omega(\xi)$ убывающая [3, 4], тогда в координатах ϵ_0 , σ_0 получим следующую диаграмму (фиг. 2, б): до точки М интенсивность деформации растет пропорционально σ_0 согласно диаграмме для $\xi = 2/3$. На втором участке между М и N интенсивность напряжений меняется ($\sigma_0 = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2}$) — сначала убывает, затем возрастает. Наконец, от точки N интенсивность деформаций уменьшается до нуля согласно диаграмме для одноосного растяжения ($\xi = 1/3$). Между точками М и N имеется падающий участок.

Наличие падающего участка на диаграмме деформирования часто связывается с потерей устойчивости материала. В данном случае это не связано с потерей устойчивости, но есть результат соответствующего пути нагружения. Переход с одной прямой на другую контролируется напряженным состоянием в каждый момент процесса нагружения или разгрузки.

4. Соответствие между углами подобия девиаторов. Согласно зависимости (1.4) деформаций от напряжений, главные направления для тензоров напряжений и деформаций совпадают как и для классического упругого тела.

Известно [8], что главные компоненты девиатора тензора напряжений можно выразить через интенсивность напряжений и угол θ :

$$S_1 = \sqrt{2/3} \sigma_0 \cos \theta, \quad S_2 = \sqrt{2/3} \sigma_0 \cos (\theta - 2/3\pi), \quad S_3 = \sqrt{2/3} \sigma_0 \cos (\theta - 4/3\pi) \quad (4.1)$$

В некоторых работах угол θ назван углом подобия девиаторов напряжений [9], в других — углом вида напряженного состояния [8]. Он определяется соотношением $\cos 3\theta = \sqrt{2/3} (S_{III} / \sigma_0^3)$, где $S_{III} = S_{ik} S_{kj} S_{ij}$ — третий инвариант девиатора тензора напряжений.

Аналогичные выражения можно написать для компонентов девиатора тензора деформаций

$$e_1 = \varepsilon_0 \cos \psi, \quad e_2 = \varepsilon_0 \cos (\psi - 2/3\pi), \quad e_3 = \varepsilon_0 \cos (\psi - 4/3\pi) \\ \cos 3\psi = \sqrt{2/3} (E_{III} / \varepsilon_0^3) \quad (E_{III} = e_{ik} e_{kj} e_{ij}) \quad (4.2)$$

Используя (1.4) и (2.1), запишем

$$e_i = \sqrt{2/3} \varepsilon_0 S_i / \sigma_0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.3)$$

Из соотношений (4.1) — (4.3) следует, что $\cos \psi = \cos \theta$ или $\psi = \theta$. Углы подобия девиаторов тензоров напряжений и деформаций равны аналогично случаю классической линейной упругости.

5. Потенциальная энергия деформации. Потенциал деформаций Φ (дополнительная работа), согласно выражению (1.3), представляет однородную функцию второй степени от компонент тензора напряжений. По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \partial \Phi / \partial \sigma_{ij} = 2\Phi \quad (5.1)$$

Из последнего равенства следует, что удельная потенциальная энергия тела U равна дополнительной работе

$$U = \Phi, \quad U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (5.2)$$

Таким образом, несмотря на то, что связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций нелинейная, равенства (5.1) и (5.2) остаются справедливыми, как и в случае обычного упругого тела.

Работа внешних объемных и поверхностных сил равна потенциальной энергии тела

$$A = \int_V U dV \quad (5.3)$$

Из равенств (5.1) — (5.3) следует теорема Клапейрона

$$A = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

В заключение следует отметить, что суперпозиция решений задач для разномодульного материала, свойства которого описываются потенциалом (1.3), в общем случае неприменима ни при какой функции $\zeta(\xi)$, за исключением постоянной, т. е. когда свойства материала описываются потенциалом для классического линейно-упругого тела. Суперпозиция решений возможна, когда каждое решение характеризуется одним и тем же параметром ξ .

Принцип суперпозиции решений не выполняется также для решений, полученных при помощи модели Амбарцумяна — Хачатряна [6] и модели Джонса [4].

Теорема взаимности Бетти для потенциала (1.3) выполняется только для пропорциональных нагружений. Этого следовало ожидать, поскольку связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений в общем случае нелинейная.

Предложенные уравнения позволяют описать разномодульность материалов, записываются в несложной инвариантной форме, что удобно при решении задач.

Поступила 2 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Строчков В. И., Барабанов В. Н. Методика исследования прочностных и деформационных свойств графита в условиях сложного напряженного состояния. Заводск. лаборатория, 1974, т. 40, № 9.
2. Березин А. В., Строчков В. И., Барабанов В. Н. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов. В сб.: Конструкционные материалы на основе углерода, вып. 11. М., «Металлургия», 1976.
3. Jones R. M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression. AIAA Journal, 1977, vol. 15, No. 1. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1977, № 1).
4. Kratsch K. M., Schutzler J. C., Eitman D. A. Carbon-carbon 3-D orthogonal material behaviour. AIAA Paper, 1972, No. 365.
5. Амбарцумян С. А. Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР. Механика, 1966, т. 19, № 2.
6. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
7. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 6.
8. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2.
9. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.