УДК 531.36

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗУЧЕНИЯ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

И. С. ЕМЕЛЬЯНОВА, Н. А. ФУФАЕВ

(Горький)

Показывается, что состояния равновесия неголономной системы, которые исчезают при снятии неголономных связей, не могут быть обнаружены при помощи уравнений движения, записанных в форме уравнений Чаплыгина. Эта особенность связана с тем, что при равновесии коэффициенты в уравнениях неголономных связей обращаются в бесконечность.

Обычный подход к нахождению всех состояний равновесия, которыми обладает любая механическая система, состоит в том, что в уравнениях движения, составленных для рассматриваемой системы, полагают все производные по времени равными нулю. Если число уравнений равновесия совпадает с числом обобщенных координат системы и все уравнения являются функционально-независимыми, тогда рассматриваемая система имеет конечное число состояний равновесия. Однако нетрудно показать, что при наличии циклических координат голономная система обладает не изолированными состояниями, а многообразием состояний равновесия.

Пусть функция Лагранжа системы не зависит явно от $n-l$ последних координат, т. е. $L=L(q_1,\ldots,q_l,\ \dot q_1,\ldots,\dot q_l,\ \dot q_{l+1},\ldots,\dot q_n)$, и все силы являются потенциальными, тогда уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{dL}{dq_i}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_{i+k}}=0\quad (i=1,\ldots,l;\ k=1,\ldots,n-l)$$

Отсюда следует, что в состоянии равновесия системы все обобщенные координаты q_j $(j=1,\ldots,n)$ удовлетворяют уравнениям $\partial L/\partial q_i=0$, число которых на $n-l$ меньше, чем число обобщенных координат, поэтому имеется $n-l$-мерное многообразие состояний равновесия. Физически этот факт хорошо известен: по отношению к циклическим координатам $q_{l+1},\ldots,q_n$ рассматриваемая система находится в безразличном равновесии.

Если в случае голономной системы появление многообразия состояний равновесия связано с наличием циклических координат, то состояния равновесия неголономной системы, как известно, никогда не могут быть изолированными и в общем случае образуют многообразие. Все состояния равновесия неголономной системы можно разбить на две группы: к первой группе относятся такие состояния равновесия, которые при снятии неголономных связей сохраняются. Назовем их состояниями равновесия первого рода. Ко второй группе относятся состояния равновесия, которые при снятии неголономных связей исчезают. Будем называть их состояниями равновесия второго рода. Очевидно, что лишь состояния равновесия второго рода поддерживаются силами реакций неголономных связей, поэтому эти состояния являются характерными для неголономной системы.

Покажем, что не всякая форма записи уравнений движения пригодна для нахождения состояний равновесия второго рода.

Рассмотрим уравнения движения неголономной системы, записанные в форме уравнений с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r+\lambda_k a_{kr}(q)-\frac{\partial F}{\partial \dot q_r}\tag{1}$$

$$a_{kr}(q)\dot q_r=0\tag{2}$$

Здесь $T=T(q,\ \dot q)$ — кинетическая энергия системы, $Q_r=Q_r(q,\ \dot q)$ — обобщенные силы, λ_k — неопределенные множители, $F=F(q,\ \dot q)$ — функция рассеяния энергии, которая по предположению является квадратичной формой обобщенных скоростей. В этих уравнениях и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $r=1,\ldots,n$; $i=1,\ldots,m$ $(m<n)$; $k=1,\ldots,n-m$, где n — число обобщенных координат, $n-m$ — число уравнений неголономных связей. По дважды встречающимся индексам производится суммирование, а отсутствие индекса обозначает набор соответствующих переменных, не обязательно всех.

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{kr}(q)$ являются голоморфными функциями. Существенно отметить, что при составлении уравнений неголономных связей в форме (2) всегда можно сделать так, чтобы это предположение было выполнено.

Из (1) и (2) следует, что уравнения равновесия

$$Q_r(q, 0)+\lambda_k a_{kr}(q)=0 \qquad (3)$$

представляют систему n уравнений относительно $2n-m$ неизвестных $q_1, \ldots, q_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}$, поэтому в общем случае состояния равновесия неголономной системы образуют многообразие, размерность которого не менее числа $n-m$ уравнений неголономных связей.

Для системы с потенциальными силами уравнения равновесия (3) в общем случае имеют вид

$$\partial U/\partial q_r+\lambda_k a_{kr}(q)=0 \qquad (4)$$

где $U=U(q)$ – силовая функция. Из соотношений (4) следует, что в состояниях равновесия второго рода найдется хотя бы одна производная $\partial U/\partial q_r$, которая отлична от нуля, так как по своему физическому смыслу суммы $\lambda_k a_{kr}(q)=R_r$ представляют собою силы реакций неголономных связей, которые в состояниях равновесия второго рода не все равны нулю.

Рассмотрим уравнения движения неголономной системы, записанные в любой форме, не содержащей неопределенных множителей λ (например уравнения Воронца, Чаплыгина, Аппеля и др.). В этом случае уравнения неголономных связей предполагаются разрешенными относительно $n-m$ обобщенных скоростей $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$:

$$\dot{q}_{m+k}=b_{ki}(q)\dot{q}_i \qquad (5)$$

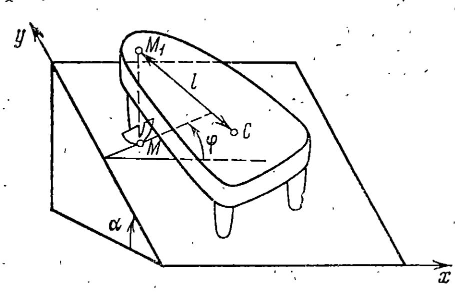
В качестве зависимых скоростей $\dot{q}_{m+k}$ можно выбрать любые скорости, входящие в уравнения (2), при условии, что определитель, составленный из коэффициентов a_{ki} при этих переменных, не равен нулю тождественно. Тогда уравнения равновесия (4) запишутся в виде

$$\partial U/\partial q_i+\lambda_k b_{ki}=0, \qquad \partial U/\partial q_{m+k}-\lambda_k=0 \qquad (6)$$

или, после исключения множителей λ_k:

$$\partial U/\partial q_i+b_{ki}\partial U/\partial q_{m+k}=0 \qquad (7)$$

Если при сделанном выборе зависимых скоростей $\dot{q}_{m+k}$ хотя бы один из коэффициентов b_{ki} при равновесии системы обращается в бесконечность, то уравнения (7) не позволят обнаружить состояния равновесия второго рода, а иногда могут оказаться противоречивыми (см. приводимые ниже примеры). Для систем Чаплыгина [1] такая ситуация получается при любом выборе зависимых скоростей $\dot{q}_{m+k}$, поскольку силовая функция $U(q_1, \ldots, q_m)$ зависит лишь от первых m координат, и в уравнениях равновесия (6) или, что то же, (7) все частные производные $\partial U/\partial q_{m+k}$ равны нулю тождественно.



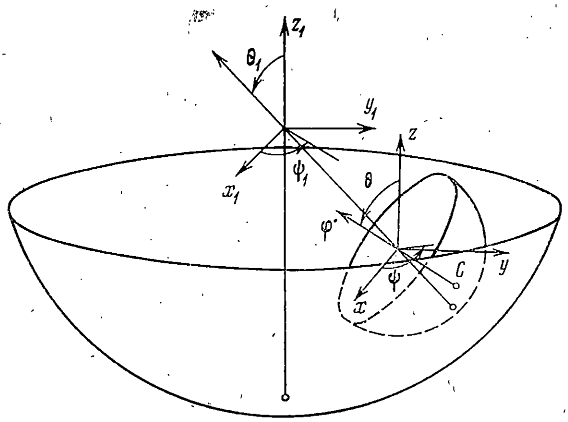
Фиг. 1

Можно предположить, что для систем Чаплыгина уравнения равновесия сводятся к уравнениям $\partial U/\partial q_i=0$. Однако такое заключение было бы ошибочным, потому что во всех состояниях равновесия второго рода суммы $\lambda_k b_{ki}$ в уравнениях (6) остаются конечными вследствие обращения в бесконечность коэффициентов b_{ki}. Действительно, только при этом условии уравнения равновесия (7) сохраняют общий вид (3), позволяющий найти состояния равновесия как первого, так и второго рода. Уравнения же $\partial U/\partial q_i=0$ совпадают с уравнениями равновесия соответствующей голономной системы, поэтому с их помощью можно обнаружить лишь состояния равновесия первого рода.

Таким образом, если при построении общей теории предположить, что все коэффициенты b_{ki} являются голоморфными функциями [2], то для систем Чаплыгина, имеющих состояния равновесия второго рода и описываемых уравнениями Чаплыгина, это не выполняется, а в общем случае, когда уравнения движения записываются в форме уравнений Воронца или Аппеля, это условие выполняется не при всяком выборе зависимых скоростей $\dot{q}_{m+k}$.

Рассмотрим два примера.

1. Сани Чаплыгина на наклонной плоскости [3]. В обозначениях на фиг. 1 силовая функция определяется выражением $U(y, \varphi)=mg(y-l\cos\varphi)\sin\alpha$. Уравнение (2) неголономной связи: $x^{\bullet}\sin\varphi-y^{\bullet}\cos\varphi=0$. Уравнения равновесия (3): $\lambda\sin\varphi=0$, $mg-\lambda\cos\varphi=0$, $mgl\sin\varphi\sin\alpha=0$. Отсюда при равновесии саней $\varphi=0, \pi$; $\lambda=\pm mg$; x, y – произвольные постоянные значения. Записывая уравнение неголономной связи в виде $x^{\bullet}=y^{\bullet}\operatorname{ctg}\varphi$, получаем возможность составить уравнения движения в форме уравнений Чаплыгина. Составим уравнения $\partial U/\partial q_i=0$: $mg\sin\alpha=0$, $mgl\sin\varphi\cdot\sin\alpha=0$. Первое из этих уравнений оказывается противоречивым, так как в общем случае $\alpha\neq0$. Для уравнения неголономной связи в виде $y^{\bullet}=x^{\bullet}\operatorname{tg}\varphi$ уравнения (7) приводят к правильному результату, так как в окрестности равновесного значения координаты $\varphi=0$ функция $\operatorname{tg}\varphi$ голоморфна. Однако в этом случае уравнения движения уже не записываются в форме уравнений Чаплыгина.



Фиг. 2

2. Качение тяжелого полушара в сферической чашке без проскальзывания [3]. В обозначениях на фиг. 2 силовая функция $U(\theta, \theta_1)=mg[(R_1-R)\cos\theta_1+l_1\cos\theta]$, а уравнения (2) неголономных связей имеют вид

$$a_{11}\theta^{\bullet}+a_{12}\psi^{\bullet}+a_{13}\varphi^{\bullet}+a_{15}\psi_1^{\bullet}=0, \qquad a_{21}\theta^{\bullet}+a_{23}\varphi^{\bullet}+a_{24}\theta_1^{\bullet}=0 \tag{8}$$

$$a_{11}=R\cos\theta_1\sin(\psi-\psi_1), \quad a_{12}=R\sin\theta_1, \quad a_{13}=R[\cos\theta\sin\theta_1-\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi-\psi_1)]$$

$$a_{15}=(R_1-R)\sin\theta_1, \quad a_{21}=R\cos(\psi-\psi_1), \quad a_{23}=R\sin\theta\sin(\psi-\psi_1),$$

$$a_{24}=R_1-R, \qquad a_{14}=a_{22}=a_{25}=0$$

При равновесии системы пять обобщенных координат связаны лишь двумя соотношениями $\psi=\psi_1$, $l_1\sin\theta=R\sin\theta_1$, поэтому имеем трехмерное многообразие состояний равновесия. Уравнения (8) можно разрешить относительно восьми пар, составленных из обобщенных скоростей $\theta^{\bullet}$, $\psi^{\bullet}$, $\varphi^{\bullet}$, $\theta_1^{\bullet}$, $\psi_1^{\bullet}$ (в остальных двух случаях определитель системы равен нулю тождественно), однако при этом лишь в пяти случаях уравнения равновесия (7) дают правильный результат. Если же уравнения (8) разрешены относительно $(\psi^{\bullet}, \varphi^{\bullet})$, $(\theta^{\bullet}, \theta_1^{\bullet})$ или $(\varphi^{\bullet}, \psi_1^{\bullet})$, то получаются неполные результаты.

Пусть уравнения (5) имеют вид

$$\psi^{\bullet}=\frac{a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23}}\theta^{\bullet}+\frac{a_{13}a_{24}}{a_{12}a_{23}}\theta_1^{\bullet}-\frac{a_{15}}{a_{12}}\psi_1^{\bullet} \qquad \varphi^{\bullet}=-\frac{a_{21}}{a_{23}}\theta^{\bullet}-\frac{a_{24}}{a_{23}}\theta_1^{\bullet}$$

Тогда уравнения равновесия (7) сводятся к $\partial U/\partial\theta=0$, $\partial U/\partial\theta_1=0$ или $\sin\theta=0$, $\sin\theta_1=0$, что позволит обнаружить лишь состояния равновесия первого рода: $\theta=\theta_1=0$, $\varphi=\mathrm{const}$. Во втором и третьем случаях приходим к аналогичному результату.

Поступила 16 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. М., «Наука», 1976.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.