

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА

Д. Г. АГАЛАРОВ, Х. А. РАХМАТУЛИН

(Баку, Москва)

Известно, что в последнее время возрос интерес к проблеме движения деформируемой нити [1, 2]. Исследования по динамике нитей могут служить теоретической основой для экспериментального исследования поведения материалов при динамических нагрузках. В связи с исследованиями динамики нити, проявляющей вязкие свойства, в [3] указывалось на эффективность метода поперечного удара для выявления временных эффектов в материалах.

В данной работе разрабатывается методика экспериментального определения вязкоупругих свойств материалов, основанная на теории распространения волн.

Предлагается способ определения характеристик материалов, свойства которых описываются квазилинейным дифференциальным уравнением первого порядка.

В основе способа лежит решение задачи о нормальном ударе по нити с постоянной скоростью. Получены соотношения, позволяющие определять функции, характеризующие материал при помощи угла между ветвями нити в точке удара и его производной, измеряемые в серии экспериментов с различными скоростями удара.

Предлагаемый способ может быть применен для исследования механических свойств мягких металлов и синтетических материалов.

1. Уравнения движения деформируемой нити имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial t} &= (1 + \varepsilon) b^2 \frac{\partial \theta}{\partial s}, & \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{\partial \theta}{\partial s} &= (1 + \varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$b^2 = \sigma / [\rho_0 (1 + \varepsilon)]$$

где σ — напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения нити; ε — деформация нити; θ — угол, образованный касательной и первоначальным направлением нити; u, v — проекции скорости нити на касательную и нормаль; t — время; s — лагранжева координата частиц нити; ρ_0 — плотность в невозмущенном состоянии.

В основу исследований положено квазилинейное уравнение состояния из [4]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Phi(\sigma) \quad (1.2)$$

отличающееся от модели Соколовского [5] переменностью модуля упругости.

Система (1.1), (1.2) является гиперболической и имеет следующую систему характеристических уравнений:

$$ds = \pm a dt, \quad a^2 = E / \rho_0 \quad (1.3)$$

$$du - v d\theta = \pm d\sigma / (\rho_0 a) + \Phi ds \quad (1.4)$$

$$ds = \pm b dt \quad (1.5)$$

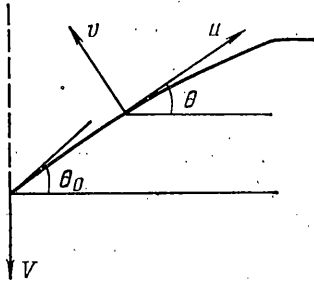
$$dv + u d\theta = \pm (1 + \varepsilon) b d\theta \quad (1.6)$$

2. Решается задача о нормальном поперечном ударе с постоянной скоростью V (фиг. 1). В дальнейшем параметры, не имеющие индекса, отнесены к точке M , параметры, имеющие индекс, отнесены к точкам, имеющим буквенное обозначение с соответствующим индексом, u_1 — значение скорости в точке M при приближении к ней справа (фиг. 2).

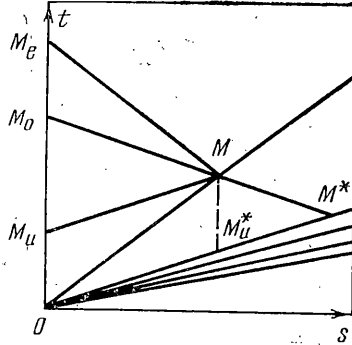
Уравнения движения интегрируются при условиях

$$u = v = \sigma = \varepsilon = \theta = 0 \quad \text{при } t = 0; \quad u_0 = -V \sin \theta_0, \quad v_0 = V \cos \theta_0 \quad \text{при } s = 0 \quad (2.1)$$

Решение строится в бесконечно малой окрестности точки $t = 0, s = 0$ и служит для определения предельных соотношений между параметрами движения нити в точке удара.



Фиг. 1



Фиг. 2

Интегрируя второе уравнение (1.4) в пределах M_0M (фиг. 2), будем иметь

$$u_0 - u - \int_0^{\theta_0} v d\theta = - \int_0^{\sigma_0} \frac{d\sigma}{\rho_0 a} + \int_s^0 \Phi ds$$

Приближая точку M к точке O вдоль характеристики MO , дифференцируем полученное уравнение. Так как пределы для интегралов в точке O равны, то получим предельное соотношение

$$du_0 - du - v(d\theta_0 - d\theta) = -(d\sigma_0 - d\sigma)/(\rho_0 a) - \Phi ds \quad (2.2)$$

Производя аналогичные действия с уравнениями (1.2), (1.6), получим

$$du - du_* = -(d\sigma - d\sigma_*)/(\rho_0 a) + \Phi(ds - ds_*) \quad (2.3)$$

$$dv_e - dv + u(d\theta_e - d\theta) = -(1+\varepsilon)b(d\theta_e - d\theta) \quad (2.4)$$

$$du_u - du - v(d\theta_u - d\theta) = (d\sigma_u - d\sigma)/(\rho_0 a) - \Phi ds \quad (2.5)$$

$$d\varepsilon - d\varepsilon_u^* = (d\sigma - d\sigma_u^*)/E + \Phi(dt - dt_u^*) \quad (2.6)$$

В дальнейшем понадобятся следующие вспомогательные соотношения: Условия на волне сильного разрыва

$$u = u_1 \cos \theta - (1+\varepsilon)b(1 - \cos \theta), \quad v = -u_1 \sin \theta - (1+\varepsilon)b \sin \theta \quad (2.7)$$

Граничные условия, которые можно получить из (2.1) (с учетом постоянства скорости удара)

$$du_0 = -V \cos \theta d\theta_0, \quad dv_0 = V \sin \theta d\theta_0, \quad dv_e = -V \sin \theta d\theta_e \quad (2.8)$$

Координатные соотношения

$$dt = \frac{ds}{b}, \quad dt_{u^*} = \frac{ds}{a}, \quad dt_u = \frac{a-b}{a+b} dt_0, \quad dt_e = \frac{2a}{a+b} dt_0 \quad (2.9)$$

$$ds^* = \frac{a}{2} dt_0, \quad ds = \frac{2b}{a+b} dt_0$$

Интерполяционные соотношения

$$d\theta_u = \frac{a-b}{a+b} d\theta_0, \quad d\theta_e = \frac{2a}{a+b} d\theta_0, \quad dv_e = \frac{2a}{a+b} dv_0$$

$$d\sigma_{u^*} = \frac{2b}{a+b} d\sigma^*, \quad d\varepsilon_{u^*} = \frac{2b}{a+b} d\varepsilon^*, \quad du_u = \frac{a-b}{a+b} du_0, \quad d\sigma_u = \frac{a-b}{a+b} d\sigma_0 \quad (2.10)$$

При определении u_* , σ^* и ε^* предполагается существование центрированных волн [4], на которых уравнения характеристик имеют вид

$$du = \pm \frac{d\sigma}{\rho_0 a} + \Phi ds, \quad u_* = - \int_0^{\sigma^*} \frac{d\sigma}{\rho_0 a} + \int_{s_f}^{s_*} \Phi ds$$

Дифференцируя при $s_f \rightarrow s_* \rightarrow 0$, получим

$$du_* = - \frac{d\sigma^*}{\rho_0 a} + \psi ds_*, \quad \int_{s_f}^{s_*} \Phi ds \rightarrow \psi s_*, \quad \psi = \frac{1}{2\sqrt{a_*}} \int_{a_0}^{a_*} \frac{\Phi}{\sqrt{a}} da$$

Последнее соотношение вместе с условием на характеристике положительного наклона дает

$$du_* = 1/2(\Phi + \psi) ds_*, \quad d\sigma^* = 1/2(\psi - \Phi) \rho_0 a ds_* \quad (2.11)$$

Из уравнения состояния (1.2) следует

$$\varepsilon = \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{E} + \int_{t_f}^{t_*} \Phi dt$$

где t_f , s_f — значения s и t на фронте центрированных волн.

При $t_* \rightarrow t_f \rightarrow 0$

$$\lim_{t_f} \int_{t_f}^{t_*} \Phi dt = -s_* \int_{a_0}^{a_*} \frac{\Phi}{a^2} da, \quad \varepsilon^* = \int_0^{\sigma^*} \frac{d\sigma}{E} - \chi s_*$$

$$\chi = \int_{a_0}^{a_*} \frac{\Phi}{a^2} da, \quad d\varepsilon^* = \frac{d\sigma^*}{E} - \chi ds_*, \quad d\varepsilon^* = \left(\frac{\psi - \Phi}{2a} - \chi \right) ds_* \quad (2.12)$$

3. Перейдем к решению задачи. Из (2.3) с учетом координатных соотношений (2.9) для s , s^* и зависимостей (2.10) будем иметь

$$\frac{d\sigma}{\rho_0 a} = -du_1 + \frac{a}{2} \left(\psi - \frac{a-b}{a+b} \Phi \right) dt_0 \quad (3.1)$$

Из (2.2) и (2.5), исключая σ_0 и учитывая интерполяционные соотношения для θ_u , u_u , σ_u , а также соотношение (3.1), получим

$$(a-b) du_0 - a du - b du_1 - v [(a-b) d\theta_0 - a d\theta] = -1/2 ab (\Phi + \psi) dt_0 \quad (3.2)$$

Из (2.4) с учетом интерполяционных соотношений для v_e и θ_e следует

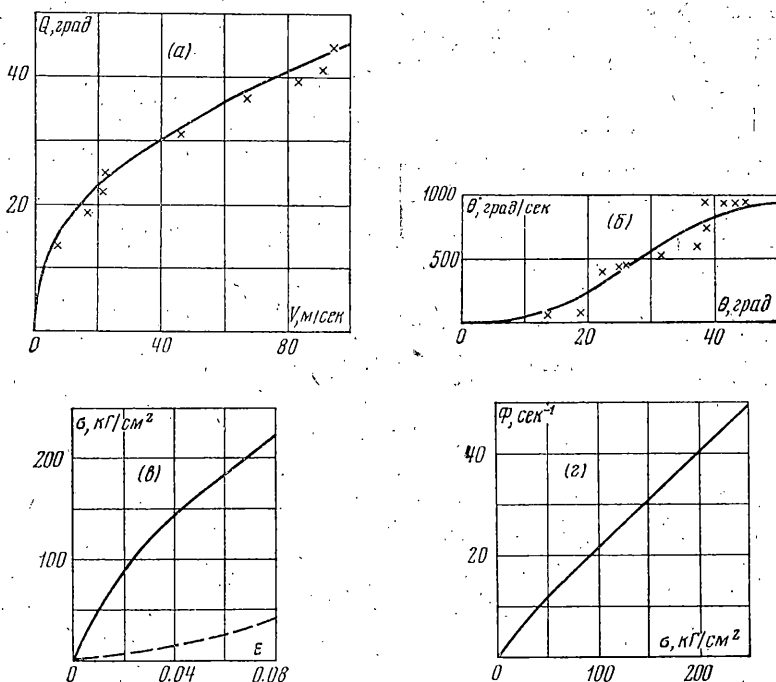
$$2adv_0 - (a+b) dv = -[u + (1+\varepsilon)b] [2ad\theta_0 - (a+b)d\theta] \quad (3.3)$$

Величина $d\varepsilon$ определяется из (2.6) с учетом координатных и интерполяционных соотношений для t_u^* , σ_u^* , ε_u^* и зависимостей (2.10) (для σ^*), (2.11)

$$d\varepsilon = - \frac{du}{a} + \frac{1}{2} \left(\psi + \Phi \frac{a-b}{a+b} - \chi \frac{2ab}{a+b} \right) dt_0 \quad (3.4)$$

Подставляя выражение dv из (1.6) и du_0 из (2.8) в уравнение (3.3), получим

$$d\theta = [a/(a+b)] d\theta_0 \quad (3.5)$$



Фиг. 3

Для исключения производных скоростей понадобятся следующие соотношения (они получаются путем дифференцирования выражений (2.7) с использованием первого уравнения в (1.6)):

$$\begin{aligned} du_1 + dB &= -(2B/\sin \theta) d\theta, & du + dB &= -(2B \operatorname{ctg} \theta - v) d\theta \\ du &= du_1 + (2B \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta + v) d\theta, & B &= (1 + \epsilon) b \end{aligned} \quad (3.6)$$

Величина dB определяется путем дифференцирования выражения $\rho_0 B^2 = (1 + \epsilon) \sigma$ с использованием зависимостей (3.1) и (3.4)

$$dB = -\frac{a^2 + b^2}{2ab} du_1 + \frac{1}{4} \left[\frac{a^2 + b^2}{b} \psi - \frac{(a-b)^2}{b} \Phi - \frac{2ab^2}{a+b} \chi \right] dt_0 \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.2), (3.5) (с учетом первого соотношения в (2.8) и зависимости для du в (3.6)) следует

$$(a+b)^2 du_1 = -2a^2 B \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta d\theta + \frac{1}{2} ab(a+b) (\Phi + \psi) dt_0 \quad (3.8)$$

Далее из первого уравнения в (3.6) получим

$$(a-b)^2 du_1 = \frac{4a^2 b B}{(a+b) \sin \theta} d\theta + \frac{a}{2} \left[(a^2 + b^2) \psi - (a-b)^2 \Phi - \frac{2ab^2}{a+b} \chi \right] dt_0 \quad (3.9)$$

Исключая du_1 из уравнений (3.8) и (3.9), найдем необходимое соотношение

$$\frac{a^2 + 3b^2 + (a-b)^2 \cos \theta}{(a+b) \sin \theta} 4aB\theta' = (a+2b)(a-b)^2 \Phi - a(a^2 + 3b^2) \psi + 2ab^2 \chi \quad (3.10)$$

связывающее линейно величины θ' и Φ .

Решение (3.10) позволяет находить Φ при заданной величине θ' . Следует отметить, что необходимо иметь ряд значений θ' , соответствующих серии экспериментов с различными скоростями (постоянными для каждого эксперимента) удара, так как в (3.10) входят интегралы ψ и χ .

Интегралы ψ и χ можно рассчитывать численными методами или уравнение (3.10) вместе с выражениями для ψ и χ представить как систему двух дифференциальных уравнений относительно ψ и χ .

Параметры мгновенного состояния в момент удара для централизованных волн [4], входящие в полученную формулу, определяются из соотношений (1.6) и (2.1), отнесенных к точке удара, т. е.

$$V \sin \theta = -u_1 \cos \theta + (1+\varepsilon) b (1 - \cos \theta), \quad V \cos \theta = u_1 \sin \theta + (1+\varepsilon) b \sin \theta$$

$$u_1 = - \int_0^{\varepsilon} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} d\varepsilon, \quad \sigma = \int_0^{\varepsilon} E d\varepsilon$$

Из последних соотношений получим выражения для расчета мгновенного поведения

$$\int_0^{\varepsilon} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} d\varepsilon = V \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\sigma}{\rho_0}} = \frac{V}{\sin \theta}$$

Данная методика применялась для исследования свойств полихлорвинила.

Узкие полосы полихлорвинила сечением $1 \times 3 \text{ мм}^2$ и длиной 3.5 м подвергались поперечному удару с различными скоростями.

Картина движения регистрировалась при помощи скоростной киносъемки. Данные испытаний и результаты обработки приведены на фиг. 3, а - г.

Для сравнения с динамической предельной диаграммой приведена также и статическая (в виде штриховой линии) при $\varepsilon = 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$. Экспериментальные данные на фигурах нанесены отдельными точками, а расчетные кривые проведены сплошной линией.

Таким образом, имея экспериментальные зависимости скорость удара - угол излома и скорость удара - скорость угла излома для ряда ударов по нити с постоянной скоростью, можно при помощи несложных формул определить вязкоупругие характеристики материалов.

Предлагаемый способ может быть применен для исследования механических свойств материалов с большим относительным удлинением (металлы, полимеры).

Поступила 18 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Размагулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Lee Shiang-Ju, Ames W. F. A class of general solution to the non-linear dynamic equations of elastic strings. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, vol. 40, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1973, т. 40, № 4.)
3. Агаларов Д. Г. Поперечный удар по гибким деформируемым связям при наличии вязкости. В сб.: Распространение упругих и упругопластических волн. Материалы V Всес. симпозиума. Алма-Ата, «Наука», 1973.
4. Агаларов Д. Г. Распространение вязко-нелинейно-упругих волн в стержнях. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, № 6.
5. Соколовский В. В. Распространение упруговязкопластических волн в стержнях. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.