

Вообще говоря, решение задач на основе рассматриваемого метода требует привлечения более высоких приближений. При этом соотношения (1) должны выполняться заранее.

Поступила 17 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Levy S., Woolley R. M., Kroll W. D. Instability of a simply-supported square plate with a reinforced circular hole in edge compression. J. Res. Nat. Bureau Standards, 1947, vol. 39, No. 6.
2. Kumai T. Elastic stability of the square plate with a central circular hole under edge thrust. Proc. 1st Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1951, p. 81-86.
3. Kawai T., Ohtsubo H. A method of solution for the complicated buckling problems of elastic plates with combined use of Rayleigh — Ritz's procedure in the finite element method. Proc. 2nd Air Force Conf. on Matrix Methods in Structural Mech., Wright — Patterson Air Force Base, 1968.
4. Ritchie D., Rhodes J. Buckling and post-buckling behaviour of plates with holes. Aeronaut. Quart., 1975, vol. 26, No. 4, p. 281-296.
5. Yoshiki M., Fujita Y., Kawamura A., Arai H. Instability of plates with holes. Proc. Soc. Naval Arch. Japan, 1967, No. 122.
6. Налоев В. Г. Экспериментальное исследование устойчивости пластин с вырезами. Тр. Горьковск. политехн. ин-та, 1970, т. 26, вып. 2.
7. Куршич Л. М., Мареев К. А. Применение энергетического метода к задачам устойчивости пластин с отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6.
8. Куршич Л. М., Мареев К. А. К решению задач устойчивости пластин с отверстием. В сб.: Динамика и прочность конструкций, вып. 2. Новосиб. электротехн. ин-т, 1975.
9. Алфугов Н. А., Балабух Л. И. О возможности решения задач устойчивости пластин без предварительного определения начального напряженного состояния. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.

УДК 539.376

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Г. Е. ФАКТОРОВИЧ

(Москва)

Принцип максимума Л. С. Понтрягина применяется для построения оптимальной формы круглой осесимметричной пластины при условии ползучести типа Мизеса. В отличие от [1, 2], где исследуется статически определяемая пластина из нелинейного материала, в предлагаемой заметке рассмотрен вариант статически неопределимой конструкции. В результате такой постановки в систему уравнений, описывающих состояние пластины, наряду с дифференциальными входят конечные выражения.

1. В условиях установившейся ползучести, в случае использования теории типа Мизеса и при степенной зависимости в равенстве: интенсивность скоростей деформации ξ — интенсивность напряжений σ , уравнения изгиба осесимметричной круглой пластины могут быть записаны в следующей (безразмерной) форме

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2^{-1/2} u^{2+1/m} \eta_0^{1/m-1} (\eta_0 - y_3/\rho) / \rho, & y_2' &= y_2/\rho - q - u, & y_3' &= \eta_0, & y_4' &= y_3 & (1.4) \\ f &= y_1 - u^{2+1/m} \eta_0^{1/m-1} (\eta_0 + 1/2 y_3/\rho) = 0, & \eta_0^2 &= \frac{4}{3} \left[\eta_0^2 + \left(\frac{y_3}{\rho} \right)^2 + \frac{\eta_0 y_3}{\rho} \right] \end{aligned}$$

где y_1 — радиальный изгибающий момент, y_2 — перерезывающая сила, y_3 — скорость изменения угла поворота, y_4 — скорость прогиба, η_0 — скорость изменения кривизны в диаметральной сечении, ρ — текущий радиус, q — поперечная нагрузка, u — толщина пластины, m — параметр ползучести [3] из соотношения $\xi/\xi_0 = (\sigma/\sigma_0)^m$ (точка означает дифференцирование по ρ).

Будем отыскивать оптимальную форму пластины, приняв в качестве целевой функции скорость прогиба y_4 в центре. Управляющим параметром является толщина $u(\rho)$. Причем $a_1 \leq u \leq a_2$, где a_1, a_2 — заданные константы.

Систему уравнений Л. С. Понтрягина для рассматриваемого случая можно получить из преобразований следующего функционала [4, 5]:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \delta y_i - p_n \delta y_n \right) dx \quad (1.2)$$

где y_i должны удовлетворять системе уравнений типа (1.1):

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y, u), \quad f_n(x, y, u) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.3)$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_r), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_j|_{x=x_0} = y_{j0} \quad (j=1, 2, \dots, l) \\ y_k|_{x=x_1} = y_{k1} \quad (k=l+1, l+2, \dots, n-1)$$

Здесь $x_0 \leq x \leq x_1$, u — управляющий вектор. Относительно векторов u , y и функций f_i предполагается, что они подчиняются условиям, принятым в [4], кроме того, f_n имеет отличную от нуля частную производную по y_n . Минимизации под-
лежит

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i(x_1)$$

Проварьируем u и найдем из (1.3) приращения δy_i и δy_n . Введем обозначения

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n-1} p_i f_i, \quad H_2 = p_n f_n, \quad H = H_1 + \frac{1}{\partial f_n / \partial y_n} H_2, \quad f_j = f_j(x, y, u)$$

По известной схеме [4, 5] преобразуем соотношение (1.2)

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i \delta y_i \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \delta y_i + p_n \delta y_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \right. \\ \left. + p_n \frac{1}{\partial f_n / \partial y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial y_i} \delta y_i \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left[H(x, y, u + \delta u) - H(x, y, u) + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \right] dx \quad (1.4)$$

Здесь ε_i — остаточные члены ряда Тэйлора. В последнем подынтегральном выражении сумма по ε_i — малая величина более высокого порядка, чем остальные слагаемые [4], т. е. из (1.4) получаем: гамильтониан Л. С. Понтрягина приводится к виду

$$H = H_1 + \frac{1}{\partial f_n / \partial y_n} H_2 \quad (1.5)$$

а сопряженная система имеет форму

$$\frac{dp_i}{dx} = - \frac{\partial H_1}{\partial y_i} - \frac{1}{\partial f_n / \partial y_n} \frac{\partial H_2}{\partial y_i}, \quad p_n = - \frac{\partial H_1}{\partial y_n}, \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i \delta y_i \Big|_{x_0}^{x_1} = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta y_i(x_1)$$

2. Соотношения (1.5), (1.6) позволяют записать уравнения, необходимые для определения оптимальной формы пластины

$$H = -p_1 \left[y_2 + \frac{u^{2+1/m}}{2\rho} \eta_0^{1/m-1} \left(\eta_\rho - \frac{y_3}{\rho} \right) \right] + p_2 \left(\frac{y_2}{\rho} - q - u \right) + p_3 \eta_\rho + p_4 y_3 +$$

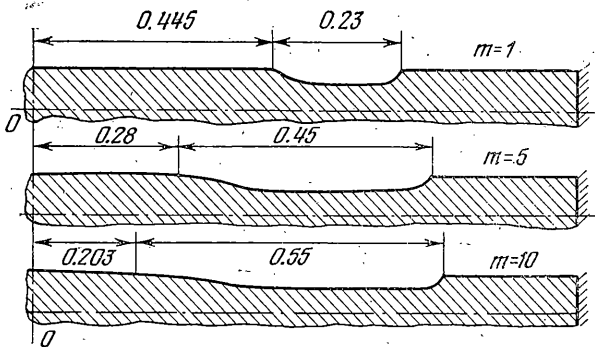
$$+ \frac{p_5 [y_1 - u^{2+i/m} \eta_0^{4/m-1} (\eta_0 + 1/2 y_3 / \rho)]}{\partial f / \partial \eta_0} \quad (2.1)$$

Сопряженная система уравнений ввиду громоздкости не приводится. Из условий стационарности H получаем зависимость для u (при $a_1 < u < a_2$):

$$u = \frac{3}{4} \left(2 + \frac{1}{m} \right) \frac{\rho \eta_0^2}{\rho^2 \eta_0^2 + F^2 c} \left(\frac{y_1 y_3 p_1}{F} - \frac{4}{3} F p_3 \right), \quad F = \frac{y_3}{2} + \rho \eta_0, \quad c = \frac{4}{3} \left(2 + \frac{1}{m} \right) \quad (2.2)$$

При выводе (2.2) использовано выражение для f из (1.1), дающее возможность определить распределение материала пластины единственным образом.

Реализация полученных результатов проводилась на примере оптимизации пластинки, нагруженной собственным весом ($q=0$) и жестко защемленной по краю. В этом случае $p_1 = -1$, $y_2 = y_3 = p_1 = 0$ при $\rho=0$ и $y_4 = y_3 = p_1 = p_2 = 0$ при $\rho=1$.



Решение сформулированной краевой задачи было выполнено методом Ньютона. Причем линеаризованная система уравнений интегрировалась с использованием ортогональной прогонки [6]. Построение функции $u(\rho)$ выполнялось методом последовательных приближений [7]. Для этого в первом приближении принималось $u = a_1 = \text{const}$, $m=1$ и отыскивались исходные значения $y_i = y_{i0}(\rho)$ и $p_i = p_{i0}(\rho)$ (система уравнений на этом этапе была линейной).

Следующий шаг заключался в определении $y_{i1}(\rho)$, $p_{i1}(\rho)$ (методом Ньютона с ортогональной прогонкой) при $u = u_1 = a_1$, $m = m_i$. Это решение позволяло найти новое приближение для u ($u = u_2(\rho)$) в соответствии с условием $a_1 \leq u \leq a_2$ и (2.2). В дальнейшем при неизменном $u_2(\rho)$ вычислялись новые значения $y_i = y_{i2}(\rho)$, $p_i = p_{i2}(\rho)$, $m = m_i$, которые служили исходными для определения $u_3(\rho)$. Описанный итерационный процесс продолжался до получения решения с заданной точностью.

На фигуре представлены контуры поперечных сечений ($1/4$ часть) оптимальных пластин, полученные при различных значениях m ($a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.15$).

Поступила 3 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Дунгар Э. К оптимальному проектированию кольцевой пластины на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11.
2. Lepik Ulo. Minimum weight design of circular plates with limited thickness. Internat. J. Non-linear. Mech., 1972, vol. 7, No. 4.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
4. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 10–12.
5. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Сб. под ред. Дж. Лейтмана, М., «Наука», 1965.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы, т. 1. М., «Наука», 1975.
7. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 1.