

О ДИФРАКЦИИ, ИЗЛУЧЕНИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИИ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ  
АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ

В. В. КАРПЕНКО, Ю. С. ЯКОВЛЕВ

(Ленинград)

Впервые метод определения предельных перемещений погруженных в жидкость тел произвольной формы под воздействием акустической волны давления был предложен в [1]. В дальнейшем было показано [2], что этот результат может быть обобщен на упругодеформирующие тела. Задачи дифракции, излучения и движения тел простейших форм в акустических средах рассматривались в [3-5].

Перемещение эллиптического цилиндра под воздействием акустической волны давления исследовалось в [6], где найдены предельные значения при  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$  параметров движения.

В предлагаемой статье в акустическом приближении рассмотрены дифракция волны давления около жесткого неподвижного эллиптического цилиндра и излучение волн этим цилиндром при произвольном законе движения. Найдены дифракционные силы как функции времени и угла набегающей волны давления на цилиндр, определены силы сопротивления и ускорения свободного от закреплений эллиптического цилиндра нулевой плавучести при воздействии на него плоской единичной волны давления.

1. Рассмотрим взаимодействие с жестким неподвижным эллиптическим цилиндром волны давления  $p_0(\xi, \eta, \tau)$ , распространяющейся в безграничной жидкости так, что нормаль к ее фронту в направлении перемещения составляет угол  $\alpha$  с положительным направлением оси  $x$ .

В акустическом приближении величина дифракционного давления  $p(\xi, \eta, \tau)$  удовлетворяет волновому уравнению в эллиптических координатах

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} p(\xi, \eta, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} p(\xi, \eta, \tau) = \frac{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} p(\xi, \eta, \tau) \quad (1.1)$$

На поверхности цилиндра будет выполняться условие непроницаемости

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} p(\xi, \eta, \tau) \right|_{\xi=\xi_0} = - \frac{\partial}{\partial \xi} p_0(\xi_0, \eta, \tau) \quad (1.2)$$

Условия на бесконечности и начальные условия при  $\tau=0$  примем нулевыми.

В равенствах (1.1), (1.2) и далее безразмерные переменные  $\xi, \eta, \tau, p$  связаны с размерными  $x, y, t, P$  зависимостями

$$x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad t = h\tau/a_0, \quad P = \rho_0 a_0^2 p$$

Здесь  $h = \sqrt{a^2 - b^2}$  — половина фокусного расстояния эллипса;  $a, b$  — соответственно большая и меньшая его полуоси;  $\rho_0, a_0$  — плотность жидкости и скорость звука в ней;  $P$  — давление в жидкости.

Применим к уравнению (1.1) и граничному условию (1.2) преобразование Фурье по переменной  $\tau$ . В результате краевая задача (1.1), (1.2) сведется к следующей ( $\omega$  — параметр преобразования Фурье, индексом  $f$  обозначены трансформанты Фурье):

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} p^f(\xi, \eta, \omega) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} p^f(\xi, \eta, \omega) + \frac{\omega^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)}{2} p^f(\xi, \eta, \omega) = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p^f(\xi, \eta, \omega) \Big|_{\xi=\xi_0} = -\frac{\partial}{\partial \xi} p_0^f(\xi_0, \eta, \omega) \quad (1.4)$$

$$p^f(\xi, \eta, \omega) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} p^f(\xi, \eta, \omega) + i \frac{\omega l^k}{2} p^f(\xi, \eta, \omega) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Последнее условие (условие излучения Земмерфельда) математически выражает тот факт, что дифракционная волна — это расходящаяся от эллиптического цилиндра волна давления. Частные решения уравнения (1.3) будем искать в виде  $p_n^f(\xi, \eta, \omega) = X_n(\eta, \omega) Y_n(\xi, \omega)$ .

Подставив последнее равенство в (1.3), после элементарных преобразований получим из него два уравнения для определения функций  $X_n(\eta, \omega)$  и  $Y_n(\xi, \omega)$ :

$$\frac{d^2}{d\eta^2} X_n(\eta, \omega) + (\lambda_n - 2q \cos 2\eta) X_n(\eta, \omega) = 0, \quad q = \omega^2/4 \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} Y_n(\xi, \omega) - (\lambda_n - 2q \operatorname{ch} 2\xi) Y_n(\xi, \omega) = 0 \quad (1.7)$$

где  $\lambda_n$  — постоянная разделения.

Периодическими решениями (1.6) будут функции Матье  $se_n(\eta, q)$  и  $se_{n+1}(\eta, q)$  [7]. Решениями (1.7), которые соответствуют функциям  $se_n(\eta, q)$ ,  $se_{n+1}(\eta, q)$  и удовлетворяют при этом условиям (1.5), будут модифицированные функции Матье  $Me_n^{(2)}(\xi, q)$  и  $Ne_{n+1}^{(2)}(\xi, q)$  [7].

Тогда общее решение уравнения (1.3) может быть записано в виде

$$p^f(\xi, \eta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n Me_n^{(2)}(\xi, q) se_n(\eta, q) + D_{n+1} Ne_{n+1}^{(2)}(\xi, q) se_{n+1}(\eta, q)] \quad (1.8)$$

Коэффициенты  $C_n$ ,  $D_{n+1}$  определим из граничного условия (1.4). Для этого подставим (1.8) в (1.4), последовательно умножим обе части полученного равенства на  $se_n(\eta, q)$ ,  $se_{n+1}(\eta, q)$  и проинтегрируем их затем по  $\eta$ .

Приняв во внимание сказанное, решение краевой задачи (1.3) — (1.5) можем представить в виде

$$p^f(\xi, \eta, \omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} p_0^f(\xi_0, \theta, \omega) \left[ \frac{Me_n^{(2)}(\xi, q)}{Me_n^{(2)'}(\xi_0, q)} se_n(\theta, q) se_n(\eta, q) + \frac{Ne_{n+1}^{(2)}(\xi, q)}{Ne_{n+1}^{(2)'}(\xi_0, q)} se_{n+1}(\theta, q) se_{n+1}(\eta, q) \right] d\theta \quad (1.9)$$

Переставляя в (1.9) суммирование с интегрированием и переходя к оригиналам, получим решение исходной задачи (1.1), (1.2)

$$p(\xi, \eta, \tau) = - \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} p_0(\xi_0, \theta, \tau_1) \Phi(\xi, \eta, \theta, \tau - \tau_1) d\theta$$

$$\Phi(\xi, \eta, \theta, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{Me_n^{(2)}(\xi, q)}{Me_n^{(2)'(\xi_0, q)} se_n(\eta, q) ce_n(\theta, q) + \right. \\ \left. + \frac{Ne_{n+1}^{(2)}(\xi, q)}{Ne_{n+1}^{(2)'(\xi_0, q)} se_{n+1}(\eta, q) se_{n+1}(\theta, q) \right] d\omega \quad (1.10)$$

Задача об определении волновых возмущений, возникающих в жидкости от перемещения эллиптического цилиндра по заданному закону вдоль координатных осей, по постановке близка к рассмотренной выше задаче дифракции. Различие состоит лишь в формулировке граничных условий (условий непроницаемости) на поверхности цилиндра, которые состоят в том, что

при движении цилиндра вдоль оси  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_y(\xi, \eta, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = -w_y''(\tau) \operatorname{ch} \xi_0 \sin \eta \quad (1.11)$$

при движении цилиндра вдоль оси  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} p_x(\xi, \eta, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = -w_x''(\tau) \operatorname{sh} \xi_0 \cos \eta \quad (1.12)$$

где  $w_{x,y}''(\tau)$  — ускорение эллиптического цилиндра при его движении вдоль соответствующей координатной оси.

В рассматриваемых случаях давления излучения  $p_{x,y}(\xi, \eta, \tau)$  представляют собой расходящиеся волны, поэтому решения краевых задач (1.1), (1.11) и (1.1), (1.12) с нулевыми начальными условиями и на бесконечности могут быть найдены так же, как и в задаче о дифракции.

При движении эллиптического цилиндра вдоль оси  $y$  для величины давления в жидкости получим представление

$$p_y(\xi, \eta, \tau) = -\operatorname{ch} \xi_0 \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{2\pi} w_y''(\tau_1) \sin \theta \Phi(\xi, \eta, \theta, \tau - \tau_1) d\theta \quad (1.13)$$

Внутренний интеграл в (1.13) нетрудно вычислить. Для этого необходимо подставить выражение для функции  $\Phi(\xi, \eta, \theta, \tau)$  в (1.13), переставить интегрирования по переменным  $\theta$  и  $\omega$  и учесть, что

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta ce_n(\theta, q) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta se_{2n+2}(\theta, q) d\theta = 0 \quad (1.14)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta se_{2n+1}(\theta, q) d\theta = \pi B_1^{(2n+1)}(q), \quad se_{2n+1}(\eta, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{(2n+1)}(q) \sin(2m+1)\eta$$

В результате после несложных преобразований находим

$$p_y(\xi, \eta, \tau) = -\pi \operatorname{ch} \xi_0 \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\tau} w_y''(\tau_1) \psi_{1,2m+1}^s(\xi, \tau - \tau_1) d\tau_1 \sin(2m+1)\eta \quad (1.15)$$

$$\psi_{1,2m+1}^s(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} B_1^{(2n+1)}(q) B_{2m+1}^{(2n+1)}(q) \frac{Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi, q)}{Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q)} d\omega$$

Аналогично может быть установлено, что при движении цилиндра вдоль оси  $x$  давление в жидкости определяется по формуле

$$p_x(\xi, \eta, \tau) = -\pi \operatorname{sh} \xi_0 \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\tau} w_x''(\tau_1) \psi_{1,2m+1}^c(\xi, \tau - \tau_1) d\tau_1 \cos(2m+1)\eta \quad (1.16)$$

$$\psi_{1,2m+1}^c(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(2n+1)}(q) A_{2m+1}^{(2n+1)}(q) \frac{Me_{2n+1}^{(2)}(\xi, q)}{Me_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q)} d\omega$$

В формулах (1.14) – (1.16)  $A_m^{(n)}(q)$  и  $B_m^{(n)}(q)$  – коэффициенты функций Маттье [7].

Нетрудно доказать, что при вырождении эллиптического цилиндра в круговой, каждая из зависимостей (1.10), (1.15) и (1.16) переходит в соотношение, известное для кругового цилиндра [4]. Покажем это на примере зависимостей (1.15) и (1.16). Перейдем к размерным переменным, а затем устремим  $h \rightarrow 0$  и  $\xi \rightarrow \infty$  таким образом, чтобы в пределе получить заданный радиус кругового цилиндра. Как показано в [7],

при таком переходе  $A_m^{(n)}, B_m^{(n)} \rightarrow 0$  ( $m \neq n$ ),  $A_m^{(m)}, B_m^{(m)} \rightarrow 1$ , а модифицированные

функции Маттье  $Me_n^{(2)}(\xi, q)$  и  $Ne_n^{(2)}(\xi, q)$  вырождаются в функции Ханкеля  $H_n^{(2)}(r_0\omega_1/a_0)$  и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} e^{\xi} \psi_{1,1}^{s,c}(\xi, \tau, h) &\xrightarrow[h \rightarrow 0]{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(v) e^{ivt_1} dv}{v H_1^{(2)'}(v)}, \quad v = \frac{\omega_1 r_0}{a_0} \\ \frac{\pi}{2} e^{\xi} \psi_{1,2m+1}^{s,c}(\xi, \tau, h) &\xrightarrow[h \rightarrow 0]{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad m \geq 1, \quad t_1 = \frac{a_0 \tau}{r_0} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Сделаем замену  $iv = s$  и воспользуемся формулой [8]  $K_1(s) = 1/2\pi H_1^{(2)}(-is)$ . Это позволит представить интеграл в правой части (1.17) в виде

$$\psi_1(t_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{K_1(v) e^{vt_1} dv}{v K_1'(v)}, \quad v = \frac{sr_0}{a_0}$$

В результате для давления на поверхности цилиндра получим

$$P(r_0, \theta, t_1) = \rho_0 a_0^2 \int_0^{t_1} w''(\tau_1) \psi_1(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \cos \theta$$

что совпадает с аналогичной зависимостью из [4].

2. Как известно [9], совокупность сил гидродинамических давлений, приложенных к некоторой твердой поверхности  $l$ , рассматриваемой как

часть границы жидкости, приводится к одной силе, равной главному вектору поверхностных сил.

$$F(t) = \int_l P(x, y, t) \mathbf{n} dl \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный орт внешней по отношению к жидкости нормали к поверхности  $l$ .

Перейдем к безразмерным переменным  $\xi, \eta, \tau, p$  и, кроме того, положим  $F = \rho_0 a_0^2 h f$ , после чего проекция гидродинамических сил запишем в виде

$$f_x(\tau) = -\text{sh } \xi_0 \int_0^{2\pi} p(\xi_0, \eta, \tau) \cos \eta d\eta, \quad f_y(\tau) = -\text{ch } \xi_0 \int_0^{2\pi} p(\xi_0, \eta, \tau) \sin \eta d\eta \quad (2.2)$$

Силы сопротивления, действующие на единицу длины эллиптического цилиндра при его перемещении вдоль координатных осей, могут быть найдены, если величины давлений  $p_{x,y}(\xi, \eta, \tau)$  подставить в формулы (2.2). При этом в силу симметричности движения жидкости около цилиндра при его перемещении вдоль оси  $x$  проекция  $f_y(\tau) = 0$ , а

$$f_x(\tau) = \pi^2 \text{sh}^2 \xi_0 \int_0^{\tau} w_x^{**}(\tau_1) \psi_{1,1}^c(\xi_0, \tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.3)$$

Точно так же при движении цилиндра вдоль оси  $y$ :

$$f_x(\tau) = 0, \quad f_y(\tau) = \pi^2 \text{ch}^2 \xi_0 \int_0^{\tau} w_y^{**}(\tau_1) \psi_{1,1}^s(\xi_0, \tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.4)$$

Проекции сил, действующих на единицу длины эллиптического цилиндра от прямой волны, можно определить по формулам (2.2), если подставить в них величину давления  $p_0(\xi, \eta, \tau)$  в прямой волне.

Для определения дифракционных сил в равенства (2.2) необходимо подставить величину дифракционного давления  $p(\xi, \eta, \tau)$ , которое вычисляется по формуле (1.10). После интегрирования по переменной  $\eta$  получим

$$f_x(\tau) = \pi \text{sh } \xi_0 \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} p_0(\xi_0, \theta, \tau_1) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{1,2m+1}^c(\xi_0, \tau - \tau_1) \cos(2m+1)\theta d\theta \quad (2.5)$$

$$f_y(\tau) = \pi \text{ch } \xi_0 \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} p_0(\xi_0, \theta, \tau_1) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{1,2m+1}^s(\xi_0, \tau - \tau_1) \sin(2m+1)\theta d\theta$$

Если волна давления, набегающая на эллиптический цилиндр, плоская и единичная, то величину давления в прямой волне можно записать в виде

$$p_0(\xi, \eta, \tau) = \sigma_0 (\tau - d - \text{ch } \xi \cos \alpha \cos \eta - \text{sh } \xi \sin \alpha \sin \eta) \quad (2.6)$$

$$d = \sqrt{\text{ch}^2 \xi_0 \cos^2 \alpha + \text{sh}^2 \xi_0 \sin^2 \alpha}$$

Подставляя соотношение (2.6) в правые части равенств (2.2) и выполняя интегрирование по переменной  $\eta$ , найдем проекции гидродинамиче-

ских сил, действующих на цилиндр от прямой волны

$$f_{\sigma,x}^{(1)}(\tau) = \sqrt{z(2d-z)} \operatorname{sh} 2\xi_0 \cos \alpha/d^2 \quad z = \min(\tau; 2d) \quad (2.7)$$

$$f_{\sigma,y}^{(1)}(\tau) = \sqrt{z(2d-z)} \operatorname{sh} 2\xi_0 \sin \alpha/d^2$$

$$z = \min(\tau; 2d)$$

Аналогично определяются проекции дифракционных сил от единичной волны давления. Подставим величину  $p_0(\xi, \eta, \tau)$ , определяемую равенством (2.6), в формулы (2.5) и воспользуемся соотношениями для преобразования  $\delta$ -функции Дирака от сложного аргумента [10]:

$$\delta(\lambda) = \sum_n \frac{\delta(\theta - \theta_n)}{|\lambda_{\theta'}(\theta_n)|}$$

где  $\theta_n$  — корни уравнения  $\lambda(\theta) = 0$ .

В результате несложных, но громоздких преобразований для дифракционных составляющих гидродинамических сил получим представления (2.8)

$$f_{\sigma,x}^{(2)}(\tau) = \int_0^z \sum_{j=1}^2 (A_j(\tau_j) \operatorname{sh}^2 \xi_0 \cos \alpha + B_j(\tau_j) \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 \sin \alpha) \times$$

$$\times \sum_{h=0}^{\infty} T_{2h+1}(A_j(\tau_j)) \Psi_{1,2h+1}^c(\xi_0, \tau - \tau_j) \frac{d\tau_j}{\sqrt{\tau_j(2d - \tau_j)}}$$

$$f_{\sigma,y}^{(2)}(\tau) = \int_0^z \sum_{j=1}^2 (A_j(\tau_j) \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 \cos \alpha + B_j(\tau_j) \operatorname{ch}^2 \xi_0 \sin \alpha) \times$$

$$\times \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h T_{2h+1}(B_j(\tau_j)) \Psi_{1,2h+1}^s(\xi_0, \tau - \tau_j) \frac{d\tau_j}{\sqrt{\tau_j(2d - \tau_j)}}$$

$$A_{1,2}(\tau) = \frac{(b \mp \sqrt{\tau(2d - \tau)})^2 - (\tau - d - a)^2}{(b \mp \sqrt{\tau(2d - \tau)})^2 + (\tau - d - a)^2}$$

$$B_{1,2}(\tau) = \frac{2(\tau - d - a)(b \mp \sqrt{\tau(2d - \tau)})}{(b \mp \sqrt{\tau(2d - \tau)})^2 + (\tau - d - a)^2}$$

$$a = \operatorname{ch} \xi_0 \cos \alpha, \quad b = \operatorname{sh} \xi_0 \sin \alpha$$

где  $T_h(x)$  — полиномы Чебышева первого рода.

Заметим, что если набегающая на эллиптический цилиндр волна давления плоская, но не единичная, то проекции сил, действующих на единицу длины цилиндра, могут быть найдены из интеграла Дюамеля с помощью переходных функций (2.7), (2.8).

3. Пусть абсолютно жесткий незакрепленный эллиптический цилиндр нулевой плавучести погружен в безграничную сжимаемую жидкость. Система координат выбрана так, что геометрический центр эллипса совпадает с началом координат. В момент времени  $\tau = 0$  единичная волна давления вступает во взаимодействие с этим цилиндром. В результате воздейст-

вия волны на цилиндр последний начнет перемещаться в направлении распространения волны, поворачиваясь вокруг своей оси.

Движение цилиндра при этом характеризуется тремя параметрами, два из которых  $x_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  и  $y_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  — проекции ускорения геометрического центра эллипса, а  $\varphi_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  — угловое ускорение относительно начала координат. Так как эллиптический цилиндр обладает двумя плоскостями симметрии, то, во-первых, при вращении цилиндра вокруг начала координат не возникает сил, стремящихся вызвать перемещения цилиндра вдоль координатных осей, а, во-вторых, при движении цилиндра вдоль координатных осей не возникает момента, обуславливающего поворот вокруг оси. Поэтому каждый из параметров  $x_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$ ,  $y_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  и  $\varphi_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  не зависит от величины двух других, и, следовательно, для определения проекций ускорения на оси координат можно написать уравнения

$$x_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau) - \text{th } \xi_0 \int_0^{\tau} x_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau_1) \psi_{1,1}^c(\xi_0, \tau - \tau_1) d\tau_1 = \frac{1}{\pi} f_{\sigma,x}(\tau) \quad (3.1)$$

$$y_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau) - \text{cth } \xi_0 \int_0^{\tau} y_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau_1) \psi_{1,1}^s(\xi_0, \tau - \tau_1) d\tau_1 = \frac{1}{\pi} f_{\sigma,y}(\tau)$$

Здесь  $f_{\sigma,x,y}(\tau)$  — проекции суммарной нагрузки, действующей на единицу длины эллиптического цилиндра при дифракции около него плоской единичной волны давления.

Проекции сил  $f_{\sigma,x}(\tau)$  и  $f_{\sigma,y}(\tau)$  определяются как алгебраические суммы величин  $f_{\sigma,x}^{(1,2)}(\tau)$  и  $f_{\sigma,y}^{(1,2)}(\tau)$  соответственно.

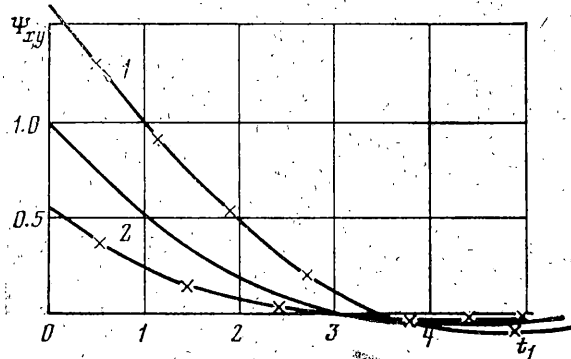
Так как ядра  $\psi_{1,1}^{c,s}(\xi_0, \tau)$  и правые части  $f_{\sigma,x,y}(\tau)$  являются непрерывными функциями переменной  $\tau$ , то уравнения Вольтерра (3.1) имеют единственные непрерывные решения [11], которые могут быть найдены как с помощью аналитических методов, так и численно.

Скорости геометрического центра эллипса  $x_{\sigma}^{\cdot}(\tau)$  и  $y_{\sigma}^{\cdot}(\tau)$  определяются после решения уравнения (3.1) интегрированием величин  $x_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  и  $y_{\sigma}^{\cdot\cdot}(\tau)$  с нулевыми начальными условиями.

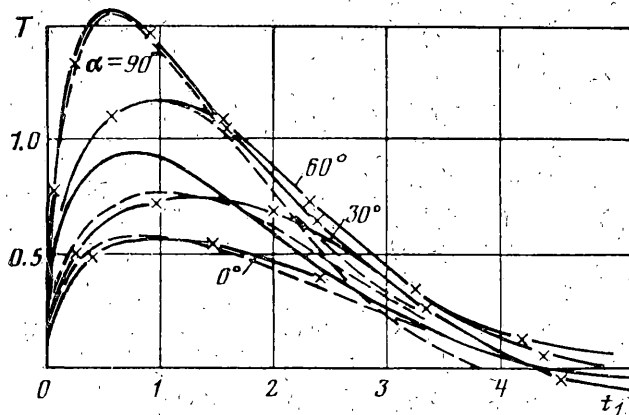
При вычислении  $\psi_{1,1}^{c,s}(\xi_0, \tau)$  было обнаружено, что описанные в [7] способы нахождения собственных значений  $a_n(q)$  и  $b_n(q)$  функций Матье, от которых зависят коэффициенты  $A_m^{(n)}$  и  $B_m^{(n)}$ , а также и расчетные схемы для определения этих коэффициентов неудобны при вычислении несобственных интегралов от функций Матье. Поэтому были разработаны новые расчетные схемы для определения как собственных значений  $a_n(q)$ ,  $b_n(q)$ , так и коэффициентов  $A_m^{(n)}$  и  $B_m^{(n)}$ . В основе расчетной схемы по вычислению собственных значений  $a_n(q)$  и  $b_n(q)$  лежит их аппроксимация полиномами Чебышева первого рода, а при определении коэффициентов  $A_m^{(n)}$  и  $B_m^{(n)}$  были использованы новые рекуррентные соотношения, сохраняющие точность при вычислениях.

Всего было аппроксимировано 16 первых собственных значений и столько же первых коэффициентов. Это позволило в рядах под знаком интеграла в соответствующих формулах (1.15), (1.16) удержать по четыре члена.

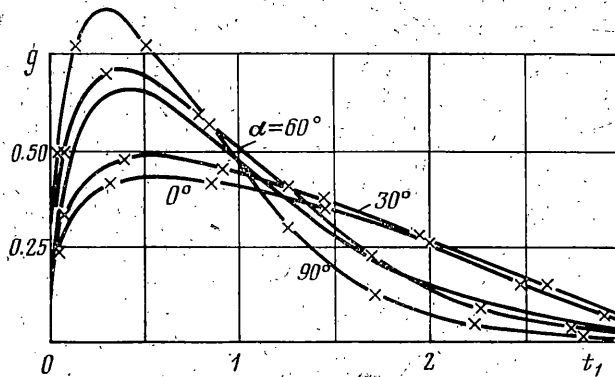
На фиг. 1 приведены результаты расчетов сил сопротивления  $-\psi_x(t_1)/(\pi\rho_0 a_0^2 R) = -\pi \text{sh } \xi_0 \sqrt{\text{th } \xi_0} \psi_{1,1}^c(t_1)$  (кривая 2) и  $-\psi_y(t_1)/(\pi\rho_0 a_0^2 R) = \pi \text{ch } \xi_0 \sqrt{\text{cth } \xi_0} \psi_{1,1}^s(t_1)$  (кривая 1), действующих на единицу длины эллиптического цилиндра с отношением полуосей  $b/a = 1/2$  при его движении вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ . Там же для сравнения сплошной линией изображена сила сопротивления  $-\psi_1(t_1)/(\pi\rho_0 a_0^2 R)$  для  $b/a = 1$ , заимствованная из [4]. При этом для удобства сравнения все функции по-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

строены в зависимости от безразмерного времени  $t_1 = a_0 t / R$  ( $R$  — радиус круга, равно-  
 великого эллипсу с отношением  $b/a = 1/2$ ).

Для эллипса с отношением осей  $b/a = 1/2$  было обнаружено, что если в формулах (1.15) и (1.16) удерживать четыре первых слагаемых, то значения  $\Psi_{x,y}(t_1) / (\pi \rho_0 a_0^2 R)$  при  $t_1 = 0$  отличаются на 2–5% от их точных значений, найденных с помощью гипотезы плоского отражения.

Расчеты по изложенной схеме, действующей на полосу ( $\xi_0 = 0$ ) силы сопротивления  $-\Psi_y(\tau) / (\pi \rho_0 a_0^2 h) = \pi \Psi_{1,1}^s(\xi_0, \tau)$ , сопоставлялись с точным значением этой силы, найденным в [12]. Было установлено, что наибольшая погрешность около 2% имеет



место для  $t=0$ . Таким образом есть основания полагать, что и в задаче об эллиптическом цилиндре максимальная величина погрешности будет при  $t_1=0$ .

На фиг. 2 приведены результаты расчетов результирующей суммарной нагрузки  $T(t_1)=R_\sigma(t_1)/(\pi\rho_0 a_0^2 R)$ , действующей на единицу длины эллиптического цилиндра с  $b/a=1/2$ , при дифракции около него плоской единичной волны давления, набегающей на цилиндр под углом  $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . При этом в рядах под знаком интегралов в формулах (2.8) удержаны лишь три первых члена. Это вызвано тем, что, как показали расчеты, члены с  $\psi_{1,7}^{c,s}(t_1)$  практически не дают вкладов в величину  $R_\sigma(t_1)$ .

При решении технических задач для определения результирующей дифракционной силы в [4] был предложен приближенный метод. Вычисленная по этому методу сила, действующая на единицу длины эллиптического цилиндра при набегаии на него единичной волны давления под теми же углами, изображена пунктиром на фиг. 2. Анализ этих графиков показывает, что предложенный в [4] приближенный метод дает результат, удовлетворительно совпадающий с точным решением.

На фиг. 3 приведены результирующие ускорения  $g(t_1)=W_\sigma^{**}(t_1)R/a_0^2$  эллиптического цилиндра при воздействии на него акустической волны давления, набегающей на цилиндр под углом  $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . При этом проекции ускорений  $x_\sigma^{**}(t_1)$  и  $y_\sigma^{**}(t_1)$  найдены из уравнения (3.1) с помощью стандартной программы, предложенной в [13].

Поступила 1 XII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожиллов В. В. О перемещении абсолютно твердого тела под действием акустической волны давления. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
2. Слепян Л. И. О перемещении деформируемого тела в акустической среде. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
3. Харкевич А. А. Неустойчившиеся волновые явления. М., Гостехтеоретиздат, 1950.
4. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л., «Судостроение», 1967.
5. Григोलюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л., Судостроение, 1974.
6. Вороненков Е. Я. О дифракции акустической волны давления на бесконечном некруговом цилиндре. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3.
7. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложение функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Гостехиздат, 1948.
10. Арсенин В. Я. Математическая физика. М., «Наука», 1966.
11. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. (Справочная матем. б-ка.) М., «Наука», 1968.
12. Сагомонян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустойчившегося движения сжимаемой жидкости. М., Изд-во МГУ, 1970.
13. Стандартные программы и процедуры, вып. 2. Новосибирск, Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1969.