

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Л. Х. БЕЛЕНЬКАЯ, В. И. ЮДОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия вязкоупругого (материал Фойхта) стержня, находящегося в вязкой внешней среде, под действием продольной, периодически изменяющейся во времени нагрузки 1 $\beta(\omega t) = \beta(1+h \sin \omega t)$. Концы стержня шарнирно закреплены. При этих краевых условиях задача сводится к анализу обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Показано, что потеря устойчивости связана с возникновением либо периодических, либо антипериодических (имеющих удвоенный период) колебаний: критические значения параметра нагрузки определяются по условиям равенства одного из мультипликаторов либо 1, либо -1. Очевидно, при иных краевых условиях возможно также возникновение двухчастотных колебаний (комбинационный резонанс), как это имеет место в задаче об устойчивости трубы, через которую протекает пульсирующий поток жидкости. Последняя численно исследована в [3]. Для случая идеально упругого стержня при различных способах закрепления параметрический и комбинационный резонансы исследованы в [4-6].

Для больших частот критическая нагрузка β_* и нейтральные колебания вычисляются в виде рядов по степеням $1/\omega$. При $\omega \rightarrow \infty$ критическое значение параметра нагрузки β стремится к эйлерову - для стационарной задачи. В предельном случае $\omega \rightarrow 0$ асимптотика строится при помощи метода *WVKI*. Для вычисления критических значений и форм нейтральных колебаний удобен метод цепных дробей (см., например, [7]). Вычисления относятся к случаю $0 \leq h \leq 1$. Рассчитаны нейтральные кривые на плоскостях (h, β) (при фиксированных ω и трении) и (ω, β) (h и трение фиксированы), а также нейтральные колебания; приведены их фазовые картины.

В отличие от стационарного случая модулированная нагрузка может вызвать неустойчивость не только при сжатии, но и при растяжении ($0 < h \leq 1$, $\beta < 0$).

1. Постановка задачи. Рассмотрим малые колебания вязкоупругого стержня, находящегося в вязкой внешней среде, около прямолинейной формы равновесия. Связь между напряжением σ и деформацией ε берем в виде $\sigma = E[\varepsilon + \nu_1(\partial\varepsilon/\partial\tau)]$ (материал Фойхта); E - модуль упругости; $E\nu_1$ - коэффициент внутреннего трения. Коэффициент внешнего трения обозначим через ν_2 ; $\nu_1, \nu_2 \geq 0$.

К одному из концов стержня приложена продольная нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону: $P(\omega\tau) = P_0(1+h \sin \omega\tau)$, где P_0 - величина средней нагрузки, h - амплитуда модуляции, ω - частота модуляции. Предполагая, что движение происходит в одной из главных плоскостей инерции, для определения бесконечно малого прогиба v получаем дифференциальное уравнение [1, 2]:

$$\left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \beta(\omega t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

¹ Аналогичной задаче в случае постоянной силы для различных краевых условий посвящено большое число исследований (см. [1] и библиографию в [2]).

$$\mu = \nu_2 l^2 / (mEJ)^{1/2}, \quad \nu = \nu_1 l^{-2} (EJ/m)^{1/2}, \quad \beta = P_0 l^2 / (EJ) \\ t = l^{-2} (EJ/m)^{1/2} \tau, \quad x = z/l, \quad \beta(\omega t) = \beta(1 + h \sin \omega t)$$

где m — погонная масса стержня, l — длина, EJ — изгибная жесткость сечения, t — время, z — координата, отсчитываемая вдоль невозмущенной оси стержня.

Предположим, что концы стержня шарнирно закреплены. Тогда выполняются краевые условия

$$v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = \left(1 + \nu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v(1, t)}{\partial x^2} = 0$$

Нетрудно видеть, что при исследовании устойчивости можно ограничиться решениями, удовлетворяющими краевым условиям

$$v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(1, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

Чтобы изучить устойчивость системы (1.1), (1.2), будем искать ее нетривиальные решения в виде (решение Флоке)

$$v(x, t) = \exp[\sigma t] U(x, t), \quad U(x, t+T) = U(x, t), \quad T = 2\pi/\omega$$

Считаем прямолинейную форму равновесия стержня асимптотически устойчивой при заданных значениях β , ω , μ , ν , h , если спектр устойчивости находится внутри левой полуплоскости ($\text{Re } \sigma < 0$); если хотя бы одно значение σ_0 из спектра устойчивости находится внутри правой полуплоскости ($\text{Re } \sigma_0 > 0$), форма неустойчива. Для задачи устойчивости периодических режимов движения вязкой несжимаемой жидкости и ряда других диссипативных сплошных сред этот метод обоснован в [8].

Значение средней нагрузки β будем называть критическим для системы (1.1), (1.2) (ω , h , μ , ν фиксированы), если при этом значении β спектр устойчивости содержит точки мнимой оси.

Всякое решение системы (1.1), (1.2) можно представить в виде ряда Фурье

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin n\pi x \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), (1.2), получим уравнение для определения $y_n(t)$:

$$y_n''(t) + (\mu + \nu \pi^4 n^4) y_n'(t) + (\pi^4 n^4 - \beta \pi^2 n^2 (1 + h \sin \omega t)) y_n(t) = 0 \\ y_n'(t) = \frac{d}{dt} y_n(t) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

Решения уравнения (1.4) ищем в виде

$$y_n(t) = \exp[\sigma t] z_n(t), \quad z_n(t+T) = z_n(t), \quad T = 2\pi/\omega \quad (1.5)$$

Обозначим через ρ_1 , ρ_2 мультипликаторы уравнения (1.4); σ и ρ связаны соотношением: $\rho = \exp[\sigma T]$. Прямолинейная форма равновесия

стержня асимптотически устойчива, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, и неустойчива, если хотя бы один из них по модулю больше единицы.

Лемма 1.1. Пусть ρ_1, ρ_2 — мультипликаторы уравнения (1.4) и либо $|\rho_1| \geq 1$, либо $|\rho_2| \geq 1$, тогда ρ_1, ρ_2 вещественны.

Доказательство следует из известного соотношения

$$\rho_1 \rho_2 = \exp[-(\mu + \nu \pi^4 n^4) T]$$

Лемма показывает, что потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня происходит при таком значении средней нагрузки β (ω, h, μ, ν, n фиксированы), для которого $\rho = 1$ или $\rho = -1$. Такие значения нагрузки будем называть критическими для уравнения (1.4).

Мультипликатору $\rho = 1$ соответствует T -периодическое решение уравнения (1.4), мультипликатору $\rho = -1$ — антипериодическое решение $y_n(t)$, т. е. такое, что $y_n(t+T) = -y_n(t)$, так что $y_n(t)$ есть $2T$ -периодическое решение.

Обозначим через β_{nk}^1 критические значения нагрузки β , отвечающие T -периодическим решениям уравнения (1.4), через β_{nk}^2 — отвечающие $2T$ -периодическим решениям ($k=1, 2, 3, \dots, \beta_{n1}^j < \beta_{n2}^j < \dots < \beta_{nk}^j, j=1, 2$). Для минимальных критических нагрузок введем следующие обозначения: $\beta_*^1 = \inf_{n,k} \beta_{nk}^1, \beta_*^2 = \inf_{n,k} \beta_{nk}^2$. Истинная критическая нагрузка $\beta_* = \beta_*(\omega, h, \mu, \nu) = \min(\beta_*^1, \beta_*^2)$.

Минимум по n критических нагрузок $\beta_{nk}^1, \beta_{nk}^2$ достигается при некоторых конечных значениях n , что вытекает из следующей леммы:

Лемма 1.2. Критические значения нагрузки $\beta_{nk}^1, \beta_{nk}^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма следует из оценки критической нагрузки β_{nk}^1 снизу

$$(\beta_{nk}^1)^2 \geq \omega^2 \pi^4 n^4 (\mu + \nu \pi^4 n^4)^2 / [(\mu + \nu \pi^4 n^4)^2 \omega^2 (2+h^2) + \pi^8 n^8 (1+h^2)]$$

Аналогичная оценка имеет место для β_{nk}^2 .

2. Асимптотика границ устойчивости при больших и малых частотах. В простейшем, эйлеровом случае, $h=0$, а следовательно, и при достаточно малых h наименьшим критическим числом соответствует мультипликатор $\rho=1$. Минимальное (эйлерово) критическое значение нагрузки $\beta_* = \beta_*^1 = \pi^2$.

Для вывода асимптотики при $\omega \rightarrow \infty$ положим $\omega t = s$ в уравнении (1.4) и введем малый параметр $\varepsilon = 1/\omega$. Уравнение (1.4) примет вид

$$y_n'' + \varepsilon (\mu + \nu \pi^4 n^4) y_n' + \varepsilon^2 [\pi^4 n^4 - \beta \pi^2 n^2 (1+h \sin s)] y_n = 0 \quad (2.1)$$

Разыскиваем y_n, β_{nm}^1 в виде рядов по степеням ε :

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s) \varepsilon^k, \quad \varphi_k(s+2\pi) = \varphi_k(s), \quad \beta_{nm}^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{nm}^{(k)} \varepsilon^k \quad (2.2)$$

Подставляя выражения (2.2) в (2.1) и приравнивая члены, содержащие ε в одинаковой степени, получим цепочку уравнений

$$\varphi_k'' = g_k(\varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}, \dots, \beta_{nm}^{(k-2)}) \quad (2.3)$$

Из условия разрешимости уравнения (2.3) последовательно определяем $\beta_{nm}^{(k)}, \varphi_k$. В результате приходим к асимптотической формуле для критической нагрузки при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\beta_{n1}^1 = \pi^2 n^2 + \frac{\pi^6 n^6}{2} h^2 \varepsilon^2 + \frac{\pi^6 n^6}{2} h^2 [\pi^4 n^4 h^2 - (\mu + \nu \pi^4 n^4)^2] \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \quad (2.4)$$

Как видно из (2.4), при больших частотах критическое значение средней нагрузки близко к значению нагрузки для стационарного случая ($h=0$).

Предельное значение критической нагрузки при $\omega \rightarrow 0$ получим при помощи метода *WBKJ* [9]. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ фундаментальная система решений уравнения (2.1) допускает асимптотическое представление

$$y_{n,2} = \frac{1}{F(s)^{1/2}} \exp \left\{ \left[-\frac{\mu + \nu \pi^4 n^4}{2} s \pm \int_0^s \sqrt{F(t)} dt \right] \varepsilon \right\}$$

$$F(s) = 1/4 (\mu + \nu \pi^4 n^4)^2 - \pi^4 n^4 + \beta \pi^2 n^2 (1 + h \sin s) \quad (2.5)$$

Пусть $F(s) > 0$ для всех s . Условие 2π -периодичности $y_n(t)$ дает следующее уравнение для определения β_{nk}^{-1} :

$$(\mu + \nu \pi^4 n^4) \pi = 4 [\beta_{nk}^{-1} \pi^2 n^2 (1+h) + 1/4 (\mu + \nu \pi^4 n^4)^2 - \pi^4 n^4]^{1/2} E(m) \quad (2.6)$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m^2 \sin^2 s)^{1/2} ds$$

$$m^2 = 2\beta_{nk}^{-1} \pi^2 n^2 h / [\beta_{nk}^{-1} \pi^2 n^2 (1+h) + 1/4 (\mu + \nu \pi^4 n^4)^2 - \pi^4 n^4]$$

где $E(m)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Если $F(s) < 0$, то уравнение (2.6) не имеет решений. То же получается и в случае антипериодических решений для $F(s) > 0$. В случае, когда функция $F(s)$ знакопеременна, уравнение (2.1) имеет две точки поворота и асимптотика существенно усложняется. Здесь этот случай не рассматривается.

Следующая лемма позволяет оценить критическую нагрузку сверху.

Лемма 2.1. Уравнение (1.4) неустойчиво, если β удовлетворяет неравенству $\beta > \pi^2/(1-h)$, $0 \leq h < 1$.

Доказательство. Если $\beta > \pi^2/(1-h)$, то из результатов [10] (теорема 4.7) следует, что уравнение (1.4) имеет положительное, растущее решение Флоке.

3. Уравнение для критических нагрузок. Для определения критических нагрузок β_{nk}^{-1} будем искать T -периодическое решение $y_n(t)$ уравнения (1.4). Подставим в (1.4) решение Флоке (1.5), где $\sigma=0$; $z_n(t)$ разыскиваем в виде ряда Фурье

$$z_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp[ik\omega t] \quad (3.1)$$

Тогда для коэффициентов c_k получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$a_k c_k + c_{k-1} - c_{k+1} = 0 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$a_k = \frac{2}{\beta h \pi^2 n^2} [(\mu + \nu \pi^4 n^4) \omega k - i(\pi^4 n^4 - \beta \pi^2 n^2 - \omega^2 k^2)]$$

Разыскиваем нетривиальные решения системы (3.2), такие, что $|c_k| \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$. Из (3.2) видно, что в этом случае $|c_k|/|k|^m \rightarrow 0$ при $|k| \rightarrow \infty$ для любого m ; отсюда следует сходимость ряда (3.1) и возможность почленного дифференцирования.

Введем отношения $g_k = c_k/c_{k-1}$. Тогда система (3.2) примет вид

$$a_k + 1/g_k = g_{k+1} \quad (3.3)$$

Заметим, что для нетривиального решения (c_k) ни один из коэффициентов c_k не обращается в нуль. Это утверждение доказывается аналогично [7]. Из системы (3.3) выводим два представления для g_k :

$$g_k = -\frac{1}{a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \dots}}, \quad g_k = a_{k-1} + \frac{1}{a_{k-2} + \frac{1}{a_{k-3} + \dots}} \quad (3.4)$$

Требую, чтобы они совпадали при $k=1$, и учитывая, что $a_{-k} = -\bar{a}_k$, приходим к уравнению для определения $\beta_{nk}^1(\omega, h, \mu, \nu, n)$:

$$\frac{ia_0}{2} = \text{Im} \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (3.5)$$

Антипериодическое решение уравнения (1.4) будем искать в виде

$$y_n(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{2k+1} \exp \left[\frac{i\omega(2k+1)t}{2} \right] \quad (3.6)$$

Аналогично предыдущему приходим к трансцендентному уравнению, определяющему критические нагрузки $\beta_{nk}^2(\omega, h, \mu, \nu, n)$:

$$b_{-1} + \frac{1}{b_{-3} + \frac{1}{b_{-5} + \dots}} + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{b_5 + \dots}}} = 0 \quad (3.7)$$

$$b_k = \frac{1}{\beta \pi^2 n^2 h} \left[(\mu + \nu \pi^4 n^4) \omega k - i2 \left(\pi^4 n^4 - \beta \pi^2 n^2 - \frac{k^2 \omega^2}{4} \right) \right] \quad (k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

Учитывая, что $b_{-k} = -\bar{b}_k$, уравнение (3.7) можно привести к виду

$$|X|^2 = 1, \quad X = b_1 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{b_5 + \dots}} \quad (3.8)$$

Решая численно уравнения (3.5) и (3.8) при заданных ω, h, μ, ν, n , находим критические нагрузки. Для вычисления удобно применять метод половинного деления или линейного интерполирования. После того, как критическая нагрузка вычислена, форма нейтрального колебания находится непосредственным численным интегрированием уравнения (1.4) или при помощи рядов Фурье (3.1), (3.6).

4. Результаты вычислений. Рассматривается случай $0 \leq h \leq 1$. Результаты вычислений представлены на фиг. 1-4 (нейтральные кривые, соответствующие периодическим решениям, изображены сплошными линиями, а антипериодическим — пунктирными). Каждая нейтральная кривая на плоскостях (h, β) и (ω, β) состоит из нескольких ветвей — «языков». Верхний язык нейтральной кривой на плоскости (h, β) ограничен лучом $\beta \geq \pi^2$ оси β .

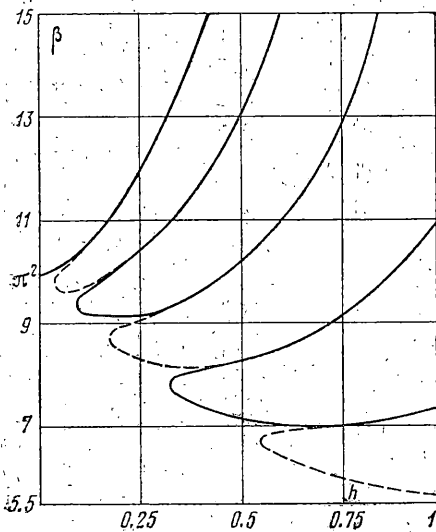
Всякая точка плоскости (h, β) или (ω, β) , которую можно соединить с началом координат непрерывным путем, не пересекающим нейтральных кривых, принадлежит области устойчивости. Ясно поэтому, что область неустойчивости заключена внутри языков, а область устойчивости связна. Языки, соответствующие T - и $2T$ -периодическим возмущениям, чередуются; верхняя нейтральная кривая на плоскости (h, β) соответствует T -периодическим возмущениям. Нейтральные кривые рассчитаны при

$n=1$. Критические значения нагрузки при $n=2, 3$ оказались больше критических значений нагрузки при $n=1$.

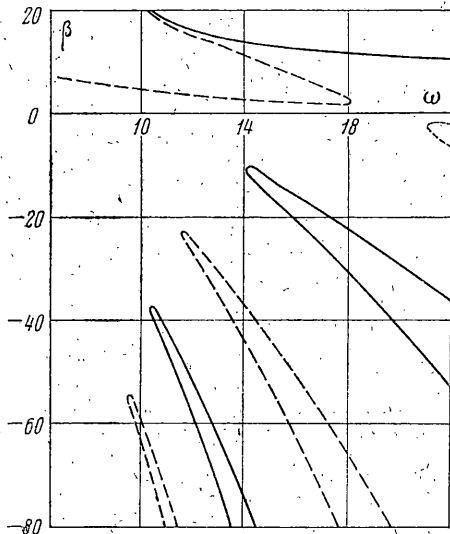
На фиг. 1 изображена нейтральная кривая на плоскости (h, β) при $\mu=0, \nu=0.01, \omega=2$. Модуляция малой амплитуды стабилизирует прямолинейную форму равновесия стержня, а при больших амплитудах — дестабилизирует. Нейтральная кривая состоит из шести языков: три соответствуют периодическим колебаниям, остальные — антипериодическим.

Интервал $(0,1)$ разбивается на шесть интервалов I_1, \dots, I_6 . Их концы суть минимальные значения h на последовательных языках: $0, 0.03, 0.08, 0.17, 0.31, 0.55$. Если h принадлежит нечетному интервалу, то первая потеря устойчивости связана с возникновением периодических колебаний, для прочих h — с антипериодическими. Если увеличивать β при фиксированных $h \in I_k$, то смена устойчивости происходит $k-1$ раз; разность между соседними значениями критических нагрузок очень быстро убывает.

С увеличением частоты модуляции количество языков в полосе $0 \leq h \leq 1$ уменьшается: они сдвигаются вправо (уходя в бесконечность при $\omega \rightarrow \infty$) и опускаются



Фиг. 1



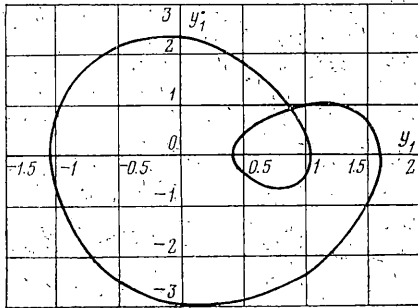
Фиг. 2

вниз. При $\omega=3$ остается пять языков; минимальные значения на языках суть: $0, 0.037, 0.134, 0.36, 0.85$. При $\omega=10$ нейтральная кривая состоит из двух языков. При $\omega=20$ остается лишь один язык, соответствующий T -периодическому возмущению. Для больших частот ситуация та же.

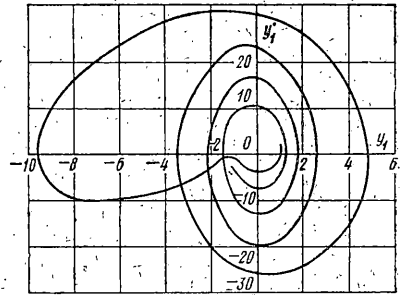
На фиг. 2 изображена нейтральная кривая на плоскости (ω, β) при фиксированных h, μ, ν ($h=0.98, \mu=0, \nu=0.01$). При уменьшении частоты модуляции количество языков неограниченно увеличивается, они поднимаются вверх и сгущаются к оси β . Минимальное критическое значение нагрузки $\beta_* = \beta_*^2 \approx 1.848$ достигается при $\omega \approx 18$.

С ростом трения языки округляются (их кривизна около вершин падает) и поднимаются вверх по оси β . При этом область неустойчивости сжимается. Для достаточно сильного трения (например $\mu=0, \nu=0.5$) возникают лишь T -периодические колебания. При больших ω результаты счета хорошо согласуются с асимптотикой. Так, при $\mu=0, \nu=0.01$ и фиксированном значении h ($0 \leq h \leq 1$) они совпадают с тремя знаками при ω порядка 50. Асимптотика малых ω известна лишь для достаточно больших μ, ν . В таких случаях результаты счета хорошо согласуются с асимптотикой. Например, при $\mu=\nu=1$ и $\omega \leq 5$ асимптотическая и вычисленная критические нагрузки совпадают с четырьмя знаками.

Модулированная нагрузка, в отличие от стационарной ($h=0$), может вызвать неустойчивость и при растяжении ($0 < h \leq 1, \beta < 0$, фиг. 2). На фиг. 2 представлена нейтральная кривая на плоскости (ω, β) ($\beta < 0$) при фиксированных h, μ, ν ($h=0.98, \mu=0, \nu=0.01$). Она состоит из языков, соответствующих T - и $2T$ -периодическим возмущениям. При уменьшении ω языки опускаются вниз по оси β и сдвигаются вправо по оси h ($0 < h \leq 1$).



Фиг. 3



Фиг. 4

Вычисления нейтральных кривых при помощи уравнений (3.5) и (3.8) контролировались интегрированием уравнения (1.4) методом Рунге — Кутты.

На фиг. 3, 4 представлены фазовые картины, соответствующие периодическим и антипериодическим колебаниям. При больших ω (например $\omega=7$, $h=0.9$, $\beta_{11}^4 \approx 4.4053$, $\mu=0$, $\nu=0.01$) и при малых h эти кривые несамопересекающиеся, как и в автономном случае. При малых ω появляются петли. «Клову» петли соответствует некоторая изогнутая форма стержня, которая повторяется вместе с полем скоростей через определенные интервалы времени; меньшие периоды.

Поступила 13 III 1978.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об устойчивости вязкоупругих стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.
3. Paidoussis M. P., Sundararajan C. Parametric and combination resonance of a pipe conveying pulsating fluid. Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1976, vol. 43, No. 2.
4. Iwatsubo T., Saigo M., Sugiyama Y. Parametric instability of clamped-clamped and clamped-simply supported columns under periodic axial load. J. Sound and Vibrat., 1973, vol. 30, No. 1, p. 65-67.
5. Iwatsubo T., Sugiyama Y., Ogino S. Simple and combination resonance of columns under periodic axial loads. J. Sound and Vibrat., 1974, vol. 33, No. 2, p. 211-221.
6. Elmaraghy R., Tabarrok B. On the dynamic stability of axially oscillating beam. J. Franklin Inst., 1975, vol. 300, No. 1, p. 25-39.
7. Маркман Г. С., Юдович В. И. Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
8. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
9. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
10. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.