

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

Л. В. НИКИТИН

(Москва)

Изучаются колебания упругих стержней, взаимодействующих с окружающей средой по закону сухого трения Кулона. Дается метод получения точных аналитических решений в случае возбуждения стержня импульсами ступенчатой формы. Решены задачи о колебаниях конечного стержня, один конец которого закреплен, а на другом задано мгновенно включенное напряжение или знакопеременное периодическое напряжение постоянной интенсивности. Рассмотрены случаи распределенного и локализованного трения. Показано, что диссипация в системе с трением сильно зависит от характера приложения нагрузки во времени. При частоте возбуждающей нагрузки, малой по сравнению с частотой собственных колебаний, диссипация за цикл динамического возбуждения значительно больше, чем при соответствующем квазистатическом нагружении. Сухое трение не выводит систему из резонансного режима, а лишь затягивает во времени появление больших амплитуд.

Конструкционное демпфирование, т. е. рассеивание энергии за счет внешних по отношению к элементу конструкции факторов, каковыми являются силы сухого трения в местах различных контактных соединений, вносит существенный, а иногда и определяющий вклад в общее демпфирование динамических воздействий на упругие системы. В квазистатической постановке этот вопрос систематически изучен в [1, 2]. Влиянию конструкционного демпфирования на колебания упругих систем посвящено большое число работ, которые достаточно полно представлены в [3, 4]. При этом, как правило, потери на конструкционное демпфирование вводят из априорных соображений или квазистатических рассмотрений и исследуют нелинейные колебания для систем с конечным числом степеней свободы.

Демпфирование внешним сухим трением при распределенных параметрах упругости и трения было исследовано в [5] и затем продолжено в [6, 7] применительно к исследованию демпфирования удара жестким телом по тросу или свае и движению троса, сматываемого с барабана [8]. В [9], посвященной исследованию затухания волн в горных породах, учтено влияние амплитуды волны на величину силы трения.

В случаях, рассмотренных в этих работах, возникающие при решении нелинейной задачи трудности удаётся преодолеть ввиду того, что направление движения (а следовательно и знак силы трения) очевидно из постановки задачи и не меняется в процессе движения.

В предлагаемой работе дан метод получения точных решений для колебаний конечного стержня под воздействием ступенчатого во времени нагружения. Предпосылкой метода является тот факт, что сила трения, являясь пассивной, не может изменять знака скорости. Поэтому предполагается, а затем проверяется, что при ступенчатом нагружении знак скорости в областях, ограниченных фронтами волн, остается таким же, как и в случае отсутствия трения. Это позволяет записать зависящий от трения член в уравнении движения в виде известной функции от координаты и времени. После этого математическая задача становится линейной и решается стандартными методами. Предлагаемый метод может быть применен к различным конструкциям. Наиболее наглядным он является для прямолинейного стержня. Отметим, что решение этой задачи путем разбивания на конечные элементы приводит к весьма громоздким результатам [3].

1. Рассмотрим упругий стержень постоянного поперечного сечения S , вся или часть поверхности которого с периметром нормального сечения L взаимодействует с окружающей средой по закону сухого трения Кулона.

В случае, когда имеет место проскальзывание между стержнем и средой, касательное напряжение на боковой поверхности будет равно fN , где N — боковое давление на стержень, f — коэффициент трения между материалом стержня и средой.

В случае окружающей среды типа грунта касательное напряжение на боковой поверхности стержня можно характеризовать условием предельного равновесия Кулона так, что оно будет равно $K+N \operatorname{tg} \varphi$, где K — сцепление грунта, а φ — угол внутреннего трения. В обоих случаях при наличии относительного движения стержня и среды на поверхности стержня будет действовать предельная сила трения, абсолютное значение которой, отнесенное к единице длины стержня для случаев сухого трения и предельного равновесия, соответственно равно $F_1 = fLN$ или $(K+N \operatorname{tg} \varphi)L$.

Эта сила всегда действует в направлении, противоположном скорости движения сечения. При отсутствии проскальзывания сила трения принимает некоторое значение, не превышающее по абсолютной величине предельное. Будем считать ее величиной постоянной.

Нормальное напряжение σ в стержне и скорость его сечений v удовлетворяют системе уравнений, состоящей из уравнения движения и закона Гука

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \kappa q, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

Здесь использованы безразмерные переменные: напряжение отнесено к характерному напряжению σ_0 , скорость — к скорости звука $a = (E/\rho)^{1/2}$ и характерной деформации σ_0/E ; ρ — плотность среды, координата x отнесена к длине стержня l и время t — ко времени пробега волны по стержню l/a . Параметр $q = F_1 l / \sigma_0 S$. Величина κ совпадает со знаком скорости, а при $v=0$ принимает некоторое значение из интервала $(-1, 1)$, которое должно быть определено в процессе решения.

Рассмотрим конечный стержень длины l . Ось x направим по оси стержня. Пусть конец стержня $x=l$ закреплен, а на конце $x=0$ задано напряжение: $v(l, t) = 0$, $\sigma(0, t) = \sigma^0(t)$.

До приложения нагрузки считаем стержень покоящимся, ненапряженным и недеформированным. Если нагрузка на конце стержня $x=0$ прикладывается плавно во времени так, что $\sigma^0(0) = 0$, то вследствие затухания передний фронт возмущения отходит от характеристики $x=t$. На первый взгляд, это кажется странным, так как главная часть системы (1.1) является линейной, а κ зависит от скорости. Однако на линии, отделяющей область движения от области покоя, $v=0$ и κ определяется ускорением. Сама эта линия является неизвестной и находится в процессе решения [5]. В этом проявляется сильная нелинейность системы (1.1). Так, например, если напряжение на конце стержня $x=0$ нарастает по линейному закону $\sigma^0(t) = -ct$, то уравнение переднего фронта возмущений имеет вид

$$x = t(\sqrt{\mu^2 + 1} - 1), \quad \mu = 2cS/fLN \quad (1.2)$$

Поэтому плавное возбуждение конца стержня, например синусоидальное, привело бы к довольно сложной задаче, связанной с необходимостью решать функциональные уравнения [5]. Если, однако, начальный импульс ступенчатый $\sigma^0(0) = -1$, то, как видно из (1.2), передний фронт возмущения начинает распространяться со скоростью звука a . При $q \ll 1$ фронты прямых и обратных волн большую часть времени будут распространяться со скоростью звука. Заметим, что неравенство $q \ll 1$ подразумевается при выводе уравнения движения (1.1).

2. Рассмотрим сначала случай мгновенного возбуждения стержня на конце $x=0$ напряжением -1 , которое затем остается постоянным $\sigma(0,t) = -H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда.

До прихода отраженной от закрепленного конца волны решение имеет вид [5]:

$$\sigma = -1 + \frac{1}{2}qx, \quad v = 1 - \frac{1}{2}qt \quad (2.1)$$

В областях движения

$$0 < x < 1, \quad -x + 2n < t < x + 2n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

если не учитывать трения, то скорость равна нулю.

Вдоль характеристик системы (1.1) $x = \pm t + \text{const}$ и совпадающих с ними фронтов волн сильного разрыва $t \pm x = 2(n-1)$ выполняются следующие соотношения для напряжения, скорости и их скачков, которые отмечены квадратными скобками:

$$\mp d\sigma + dv + \kappa q dt = 0, \quad [\sigma] = \pm [v] \quad (2.3)$$

Для $n=1$ с помощью (2.3) легко получить

$$\dot{v} = \frac{1}{2}\kappa q(1-x) \quad (2.4)$$

По определению, $\kappa=1$ соответствует положительной скорости, а $\kappa=-1$ — отрицательной. Оба случая противоречат (2.4), поэтому в этой области и, как можно аналогичным образом показать, во всех областях вида (2.2) величину κ нужно положить равной нулю. Знак скорости в остальной части области движения с помощью тех же рассуждений устанавливается из решения задачи без учета силы трения, на получении которого останавливаться не будем.

В результате уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H[t-x-2(k-1)] + q \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H(t+x-2k) \quad (2.5)$$

Применяя одностороннее преобразование Лапласа — Карсона к уравнению (2.5) и второму уравнению (1.1) с учетом однородных начальных условий, получим

$$\frac{d\sigma^*}{dx} = p v^* + q \frac{\text{sh } p(1-x)}{\text{ch } p}, \quad \frac{dv^*}{dx} = p \sigma^* \quad (2.6)$$

Звездочка указывает на преобразование Лапласа.

Граничные условия принимают вид

$$\sigma^*(0, p) = -1, \quad v^*(1, p) = 0 \quad (2.7)$$

Решение системы уравнений (2.6), удовлетворяющее граничным условиям (2.7), для напряжения имеет вид

$$\sigma^* = \text{sech } p \left\{ \text{ch } p(1-x) + \frac{q}{2} [\text{sech } p \text{ sh } px + x \text{ sh } p(1-x)] \right\} \quad (2.8)$$

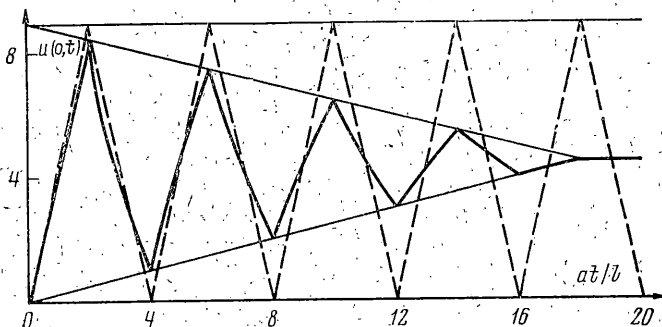
Для скорости решение будет

$$v^* = \text{sech } p \left\{ \text{sh } p(1-x) + \frac{q}{2} \left[\text{sech } p \text{ ch } px - x \text{ ch } p(1-x) - \frac{1}{p} \text{ sh } p(1-x) \right] \right\} \quad (2.9)$$

При переходе к оригиналам эти довольно громоздкие выражения значительно упрощаются. Рассмотрим сначала области вида

$$0 < x < 1, \quad x + 2(n-1) \leq t < -x + 2n \quad (2.10)$$

где n — номер фронтов волн $t-x=2(n-1)$, $t+x=2n$, причем нумерация $n=1, 2, \dots$ для фронтов прямых волн начинается с фронта $x=t$, а обратных — с фронта $x+t=2$.



Фиг. 1

Представим выражение (2.8) в виде разложения по бегущим волнам, т. е. разложим $\operatorname{sech} p$ в (2.8) по степеням e^{-2p} . При переходе к оригиналу при любом фиксированном n бесконечные суммы будут содержать лишь конечное число ненулевых членов, которое легко устанавливается из подсчета участвующих в образовании движения прямых и обратных волн. Так, для напряжения σ получим

$$\begin{aligned} \sigma = & \sum_{k=1}^n (-1)^k H(t-x-2(k-1)) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k H(t+x-2k) - \\ & - q \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k H(t+x-2(k+1)) - q \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k H(t-x-2(k+1)) - \\ & - \frac{1}{2} qx \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k H(t+x-2(k+1)) - \\ & - \frac{1}{2} qx \sum_{k=1}^n (-1)^k H(t-x-2(k-1)) = -1 - (-1)^n \frac{1}{2} qx \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогично для скорости в тех же областях можно получить

$$v = (-1)^{n-1} (1 - \frac{1}{2} qx) \quad (2.12)$$

Для областей вида

$$0 < x < 1, \quad -x + 2n < t < x + 2n \quad (2.13)$$

таким же путем получим

$$\sigma = (-1)^n - 1 - (-1)^n qx \quad (2.14)$$

Области вида (2.10) и (2.13) очевидно полностью исчерпывают область движения.

Полученное решение справедливо до момента времени $t=2q^{-1}$, в который, как видно из (2.12), движение прекращается одновременно во

всем стержне. После прекращения движения в стержне остаются напряжения, определяемые при $0 < x < 2q^{-1} - 2n_k \equiv x_*$ формулой (2.11), в которой нужно положить $n = n_k$, где n_k — номер предпоследнего перед остановкой фронта прямой волны, равный целой части числа q^{-1} .

В области $x_* < x < l$ напряжения определяются формулой (2.14) при $n = n_k - 1$. На фиг. 1 сплошной линией построена зависимость во времени смещений конца стержня $x=0$. Пунктиром показана та же зависимость без учета силы трения. Как видно, конец стержня совершает затухающие колебания с характерным периодом $4l/a$, равным периоду свободных колебаний такого же стержня при отсутствии трения.

Полная энергия, диссипируемая за время движения, будет равна

$$D_d = \frac{ql\sigma_0^2}{E} \left[\sum_{n=1}^{n_k} \int_{0_1}^1 dx \int_{t_1}^{t_2} |v| dt + \int_0^{x_*} dx \int_{t_1}^{t_*} |v| dt \right] =$$

$$= \frac{ql\sigma_0 n_k}{2E} (2 - qn_k) + \frac{2\sigma_0^3 l (1 - qn_k)}{3E^2} (4 - 5n_k q + n_k^2 q^2) \quad (2.15)$$

$$t_1 = 2(n-1)a, \quad t_2 = 2n - x$$

Формула (2.15) получена в предположении, что момент времени $t = t_*$ наступит до того, как последний фронт прямой волны дойдет до закрепленного конца. Если движение прекращается после отражения последнего фронта от закрепленного конца, то выражение (2.15) будет несколько другим.

Отметим отвечающую физике явления неравномерность перехода к пределу при $q \rightarrow 0$. Если в исходной постановке задачи положить $q = 0$, то, естественно, никакой диссипации в системе не будет. Если же перейти к пределу $q \rightarrow 0$ в выражении (2.15), то получим $D_d = 1/2 \sigma_0^2 l / E$. При квазистатическом нагружении силы трения совершат работу

$$D_s = 1/2 \sigma_0^2 q l (1 - 1/6 q / \sigma_0) / E \approx 1/2 \sigma_0^2 q l / E$$

Как видно из сравнения этих выражений, функциональная зависимость диссипации от параметров системы в рассмотренных крайних случаях мгновенного и квазистатического нагружений совершенно различна, причём $D_s \ll D_d$. Этот результат можно было предвидеть. В самом деле, при квазистатическом нагружении с точностью до величины порядка q по сравнению с единицей работа, совершаемая напряжением на конце стержня, равна $1/2 \sigma_0^2 l / E$ и с той же точностью она переходит в упругую потенциальную энергию стержня.

На трение расходуется лишь небольшая доля работы, пропорциональная q . При мгновенном нагружении совершается работа, в два раза большая, а в конечном состоянии запасенная потенциальная энергия в стержне будет приблизительно той же, что и в квазистатическом случае. Из этого можно сделать вывод, что диссипация в системе с трением сильно зависит от характера приложения нагрузки во времени.

3. Рассмотрим далее для той же конструкции знакопеременное, ступенчатое нагружение с амплитудой σ_0 и периодом, равным периоду свободных колебаний стержня:

$$\sigma(0, t) = -H(t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H(t - 2(k-1)) \quad (3.1)$$

или в изображениях

$$\sigma^*(0, p) = -th p$$

Если для этого случая решить задачу без учета трения, то можно убедиться в том, что закономерность изменения x в области движения та же, что и в предыдущей задаче. Таким образом, уравнение движения можно по-прежнему записать в виде (2.5), и часть решения, зависящая от q , не будет отличаться от предыдущего случая.

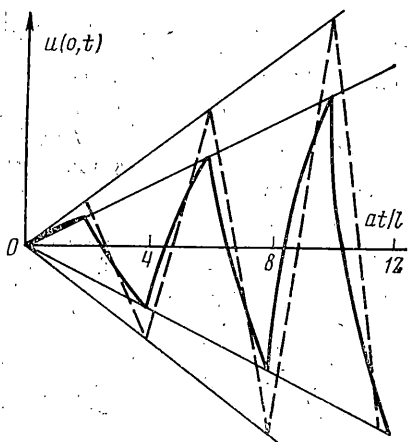
Для областей вида $0 < x < 1, x + 2(n-1) < t < -x + 2n$
 решение будет
$$\sigma = (-1)^n (1 - 1/2 q x), \quad v = (-1)^{n-1} (2n - 1 - 1/2 q t) \quad (3.2)$$

Для областей вида $0 < x < 1, -x + 2n < t < x + 2n$
 решение имеет вид
$$\sigma = (-1)^n n (2 - q), \quad v = 0 \quad (3.3)$$

Работа сил трения после первых n отражений будет равна

$$D_n = q \sigma_0^2 l n^2 (1 - 1/2 q) / E \quad (3.4)$$

Рассмотренное возбуждение, если не учитывать трение, очевидно, вызывает в стержне резонанс. Это обстоятельство иллюстрируется на фиг. 2, где пунктирными линиями показана зависимость смещения конца стержня от времени. На той же фигуре показана эта зависимость с учетом трения.



Фиг. 2

Как видно из (3.4), диссипация энергии в системе неограниченно возрастает со временем. Тем не менее, оказывается, что сухое трение не выводит систему из резонансного состояния, а лишь затягивает во времени появление больших амплитуд.

Описанный метод получения решения задач о колебаниях с учетом сухого трения может быть применен и в другом практически важном случае локализованной области контакта. Примерами такого рода могут быть система вал — втулка, соединенные внахлест панели и другие. В этих случаях силы трения можно считать сосредоточенными.

4. Рассмотрим распространение волн в стержне конечной длины l , в середине которого ($x = 1/2$) может возникать сосредоточенная сила трения; предельное значение этой силы, отнесенное к площади поперечного сечения, σ_0 , равно Q . Конец $x = 1$ будем считать по-прежнему закрепленным, а конец $x = 0$ будем возбуждать, как и в случае распределенного трения. В этом случае уравнение движения будет

$$\partial \sigma / \partial x = \partial v / \partial t + \kappa Q \delta(x - 1/2) \quad (4.1)$$

Пусть стержень возбуждается мгновенно включающимся на конце $x = 0$ напряжением -1 . Получим сначала решение без учета отражения от заделанного конца, т. е. для бесконечного стержня с сосредоточенной силой трения в сечении $x = 1/2$. Решение этой задачи может быть получено операционным методом

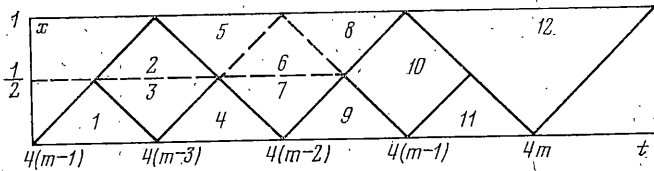
$$\begin{aligned} \sigma &= -H(t-x) + 1/2 Q [H(t-x-1) - H(t+x-1)] + \\ &\quad + 1/2 Q H(x-1/2) [H(t-x) + H(t+x-1)] \\ v &= H(t-x) + 1/2 Q [H(t-x-1) - H(t+x-1)] + \\ &\quad + 1/2 H(x-1/2) [H(t+x-1) - H(t-x)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для конечного стержня можно было бы, как и раньше, получить решение операционным методом, предварительно установив закон изменения знака скорости в области движения. Укажем, однако, другой метод построения решения. В последовательных областях плоскости движения решение найдем с помощью соотношений вдоль фронтов прямых и обратных волн

$$[\sigma] = \mp [v], \quad t-x=m-1, \quad t+x=m \quad (4.3)$$

где нумерация $m=1, 2, \dots$ для прямых волн начинается с фронта $x=t$, а обратных — с $x+t=1$.

До прихода отраженной от закрепленного конца волны, т. е. в областях 1–4 фиг. 3, решение при $m=1$ будет описываться формулами (4.2). В области 5 ($m=1$) из граничного условия при $x=1$ заключаем, что $v=0$, а для σ из (4.3) имеем $\sigma=-2+Q$.



Фиг. 3

В областях 6 и 7 ($m=1$) вследствие непрерывности при $x=1/2$ скорость должна быть одинакова, а напряжение σ_1 в области 6 связано с напряжением σ_2 в области 7 в силу уравнения движения (4.1) зависимостью $\sigma_1 - \sigma_2 = \kappa Q$.

Соотношения (4.3) дают

$$\sigma_1 + 2 - Q = -v, \quad \sigma_2 + 1 = v - 1 + Q \quad (4.4)$$

Решая эти уравнения в предположении $\kappa=+1$, получим $v=-1/2Q$, что противоречит предположению о положительном значении скорости. Принимая $\kappa=-1$, снова приходим к противоречивому результату $v=1/2Q$. Следовательно, скорость в этих областях равна нулю, а для напряжения имеем $\sigma_1 = \sigma_2 = -2 + Q$. В области 7 из граничного условия при $x=1$ имеем $v=0$, т. е. скорость непрерывна вдоль фронта волны $t+x=3$ и, следовательно, напряжение там такое же, как и в области 6.

С помощью тех же рассуждений не представляет труда получить решение в последующих областях плоскости движения.

Можно показать, что решение в областях типа 1 имеет вид $\sigma=-1$, $v=4m-3-2(m-1)Q$; в областях 2 и 3 $\sigma=-1 \pm 1/2Q$, $v=(4m-3)(1-1/2Q)$; в области 4 $\sigma=-1$, $v=4m-3-(2m-1)Q$; в областях 5–8 $\sigma=-(2m-1)(2-Q)$, $v=0$; в области 9 $\sigma=1$, $v=-(4m-1)+(2m-1)Q$; в области 10 $\sigma=1 \mp 1/2Q$, $v=0$; в области 11 $\sigma=1$, $v=-(4m-1)+2mQ$; в области 12 $\sigma=2m(1-Q)$, $v=0$. Верхние знаки относятся к областям, где $x > 1/2$, нижние — где $x < 1/2$. Рассмотренные области полностью исчерпывают область движения.

Полученное решение позволяет выяснить полную картину колебаний такой системы. Стержень совершает затухающие колебания с характерным периодом $4l/a$, равным периоду свободных колебаний такого стержня при отсутствии силы трения. Скорость сечений стержня по абсолютной величине убывает со временем. В момент, когда скорость частиц в волне, подходящей к сечению $x=1/2$, станет меньше, чем $1/2Q$, движение сечений стержня $x > 1/2$ прекращается, а часть стержня $x < 1/2$ будет совершать колебания как стержень, закрепленный в сечении $x=1/2$.

За время до окончательной остановки сечения $x=1/2$ диссипирует энергия $D_d = 2Q \sigma_0^2 m_k (1 - m_k Q) / E$, где m_k — целая часть числа $1/2Q^{-1}$.

Для сравнения приведем выражение для диссипации при квазистатическом нагружении

$$D_s = 1/2 Q \sigma_0^2 l (1 - Q) / E$$

5. Приведем решение для случая знакопеременного периодического нагружения стержня с сосредоточенной силой трения.

Уравнение движения в этом случае после подстановки в него величины η принимает вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + Q\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [H(t-x-2(k-1)) + H(t+x-2k)]$$

Граничное условие на конце $x=0$ выражается формулой (3.1). Решение имеет простой, но различный вид в областях движения, ограниченных фронтами волн $x-t=m-1$, $x+t=m$ и прямыми $x=0$, $x=1/2$, $x=1$.

В треугольных областях

$$0 < x < 1/2, x+4(m-1) < t < -x+4m-3$$

$$0 < x < 1/2, x+4m-3 < t < -x+2(2m-1)$$

напряжение $\sigma = -1$, а скорость соответственно

$$v = 4m-3+2(m-1)Q, v = 4m-3-(2m-1)Q$$

В областях

$$0 < x < 1/2, x+2(2m-1) < t < -x+4m-1$$

$$0 < x < 1/2, x+4m-1 < t < -x+4m$$

напряжение $\sigma = 1$, а скорости

$$v = -(4m-1) + (2m-1)Q, v = -(4m-1) + 2mQ$$

В четырехугольных областях движения

$$0 < x < 1, -x+4m-3 < t < x+4m-3$$

$$x+4(m-1) < t < -x+2(2m-1)$$

решение будет $\sigma = -1 \mp 1/2 Q$, $v = (4m-3)(1 - 1/2 Q)$, где в выражении для напряжений верхний знак относится к той части области, где $x < 1/2$, а нижний — к той, где $x > 1/2$.

В четырехугольных областях

$$0 < x < 1, -x+4m-1 < t < x+4m-1$$

$$x+2(2m-1) < t < -x+4m$$

решение имеет вид $\sigma = 1 \pm 1/2 Q$, $v = -(4m-1)(1 - 1/2 Q)$.

В треугольных областях

$$0 < x < 1, -x+4(m-1) < t < x+4(m-1)$$

скорость $v = 0$, а напряжение $\sigma = 2m(2-Q)$.

Наконец, в треугольных областях

$$0 < x < 1, -x+2(2m-1) < t < x+2(2m-1)$$

скорость также равна нулю, а напряжение $\sigma = -(2m-1)(2-Q)$. Рассмотренные области плоскости движения полностью ее исчерпывают.

Диссипация в системе после первых n отражений от закрепленного конца будет $D_n = Q \bar{v}_0^2 n^2 (1 - 1/2 Q) / E$.

Качественные выводы, полученные из решения задач при распределенном трении, следуют из решения для сосредоточенной силы трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1960.
2. Goodman L. E. A review of progress in analysis of interfacial slip damping. Structural damping. New York, ASME, 1959.
3. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.
4. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев, «Наукова думка», 1970.
5. Никитин Л. В. Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1.
6. Никитин Л. В. Удар жестким телом по упругому стержню с внешним сухим трением. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
7. Никитин Л. В., Тюреходжаев А. Н. Поведение под нагрузкой упругого стержня, заглубленного в грунт. В сб.: Проблемы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1966.
8. Акабиров А. Т. Распространение упругих волн напряжений в нити, намотанной на круглый цилиндр, вращающийся с постоянной скоростью. Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1965, № 5.
9. Коротков П. Ф. О волнах в упругой среде при наличии поверхностного кулонова трения. ПМТФ, 1972, № 4.