МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1978

УДК 534

НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕВЫХОДА ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ НЕКОТОРЫХ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ ЗА ДОПУСТИМЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В. Г. САРАНЧУК, В. А. ЧИСТЯКОВ, В. А. ШОЛУХА

(Ленинград)

Известно, что в настоящее время весьма актуальной является проблема исследования надежности функционирования различных механических систем. Как показано в [1], задачи оптимальной защиты машин, механизмов, аппаратуры от воздействия вибрационных возмущений также можно сформулировать в терминах теории надежности. В данной работе разыскиваются вероятности невыхода фазовых координат за допустимые пределы некоторых виброзащитных систем. Для этого решается краевая задача Фикеры применительно к уравнениям Колмогорова. Для сравнения те же задачи решены и методом Монте-Карло.

1. Рассмотрим произвольную систему, движение которой описывается уравнением

$$y_l^{\cdot}=a_l(t,y_1,\ldots,y_n)+\sum_{m=1}g_{lm}(t,y_1,\ldots,y_n)\xi_m(t),\quad y_l(0)=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ — вектор фазовых координат, ξ_m — взаимно-независимые случайные функции, обладающие свойствами белого шума $K_{\xi_m}(\tau)=\delta(\tau)$, а неслучайные функции a_l, g_{lm} предполагаются известными. Поставим перед собой цель — определить вероятность того, что компоненты векторного случайного процесса $\mathbf{y}$ за время T ни разу не выйдут из некоторой области D.

Самый простой способ решения данной задачи — это метод Монте-Карло. Многократно, N раз, для различных реализаций белого шума интегрируется система (1.1). Если при этом координаты системы за время T ни разу не вышли за пределы заданной области D в n случаях, то за искомую вероятность принимается отношение $P_N=n/N$.

При численном решении уравнения (1.1) удобно использовать допредельные модели белого шума, определяемые соотношениями $\xi_i\Delta t=\Delta\zeta_i$, $\Delta\zeta_i=\sqrt{\Delta t}\eta$, где ζ — броуновская переменная, η — случайная величина с нормальным распределением, Δt — шаг интегрирования. Однако, несмотря на простоту, метод Монте-Карло обладает рядом недостатков (связанных между собой) — это малая точность и большое время счета на ЭВМ. Поэтому, в целях экономии машинного времени, а также контроля метода Монте-Карло необходимо воспользоваться более точными методами решения.

Другим методом нахождения искомой вероятности является непосредственное решение уравнений Колмогорова.

2. Рассмотрим простейшую виброзащитную систему, колебания которой описываются уравнениями вида

$$y^{\cdot\cdot}+F(y, y^{\cdot})=x(t),\ y(0)=0,\ y^{\cdot}(0)=0 \qquad (2.1)$$

Здесь y — относительное перемещение, $F(y, y^{\cdot})$ — функция, описывающая воздействие амортизатора на защищаемый объект, $x(t)$ — внешнее воздействие, которое представляется в виде нестационарного случайного процесса.

В процессе функционирования системы требуется, чтобы относительное перемещение y и абсолютное ускорение $z=F(y, y^{\cdot})$ не превосходили допустимых значений Y_*, Z_* соответственно

$$|y|\leqslant Y_*,\ |F(y, y^{\cdot})|\leqslant Z_* \qquad (2.2)$$

Поэтому естественно поставить задачу: найти вероятность того, что фазовые координаты y, $y^{\cdot}$ ни разу не выйдут за время T за пределы области D, определяемой соотношением (2.2). Рассмотрим случаи, когда внешнее воздействие представляется в виде конечного соотношения $x(t)=A(t)\xi(t)$ или определяется одним из следующих дифференциальных уравнений:

$$x^{\cdot}+\alpha x=A(t)\xi,\ x(0)=0 \qquad (2.3)$$

$$x^{\cdot\cdot}+2hx^{\cdot}+l^2x=A(t)\xi,\ x(0)=0,\ x^{\cdot}(0)=0 \qquad (2.4)$$

Здесь ξ — белый шум, $A(t)$ — заданная функция времени, α, h, l — константы.

Пусть в уравнении (2.1) функция F удовлетворяет ограничению $F(y_1, y_2)=-F(-y_1, -y_2)$. В этом случае второе уравнение Колмогорова [2] имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}+y_2\frac{\partial p}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}[F(y_1, y_2)p]-\frac{m^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2}=0 \qquad (2.5)$$

где $p(\tau, y_1, y_2)$ — плотность вероятности того, что к моменту времени τ ординаты Y_1, Y_2 будут находиться в интервалах $(y_l, y_l+dy_l;\ l=1, 2)$, ни разу не выходя в течение интервала времени (t, τ) за границы области D; $Y_1=y$, $Y_2=y^{\cdot}$.

Уравнение (2.5) относится к уравнениям ультрапараболического типа и требует постановки граничных условий только на части границы области (2.2) [3]:

$$P|_{\Sigma_1}=0,\ \Sigma_1=\{(y_1, y_2): |F(y_1, y_2)|=$$
$$=Z_*,\ (y_1=-Y_*,\ y_2>0),\ (y_1=Y_*,\ y_2<0)\} \qquad (2.6)$$

Начальное условие, в соответствии с физическим смыслом работы виброзащитной системы, имеет вид $p=\delta(y_1)\delta(y_2)$ при $\tau=0$. Преобразуем (2.5), (2.6) по Лапласу (в дальнейшем звездочка будет обозначать изображение функции по Лапласу, а s — параметр преобразования). Решение преобразованного по Лапласу уравнения будем искать в виде

$$p^*(y_1, y_2, s)=f_0^*(y_1, y_2, s)+w_1^*(y_1, y_2, s) \qquad (2.7)$$

где f_0^* — изображение фундаментального решения уравнения (2.5), которое можно получить известными методами, а w_1^* удовлетворяет уравнению

$$sw_1^*+y_2\frac{\partial w_1^*}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial y_2}[F(y_1, y_2)w_1^*]-\frac{m^2}{2}\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial y_2^2}=0 \qquad (2.8)$$

и условиям

$$w_1^*|_{\Sigma_1}=-f_0^*(y_1, y_2, s),\ (y_1, y_2)\in\Sigma_1 \qquad (2.9)$$

Кроме условия (2.9), w_1^* удовлетворяет на линии разрыва граничных условий $y_2=0$ следующим ограничениям:

$$w_1^*(y_1, y_2, c)\big|_{y_2=+0}=w_1^*(-y_1, y_2, s)\big|_{y_2=-0}$$
$$\left.\frac{\partial w_1^*(y_1, y_2, s)}{\partial y_2}\right|_{y_2=+0}=-\left.\frac{\partial w_1^*(-y_1, y_2, s)}{\partial y_2}\right|_{y_2=-0} \tag{2.10}$$

вытекающим из центральной симметрии соотношений (2.8), (2.9). Условия (2.9) и (2.10) однозначно определяют решение уравнения (2.8). В силу симметрии задачи относительно начала координат будем искать решение в области $y_2>0$. Возьмем произвольное целое число N больше нуля. Выберем в области $\Omega=[-Y_*<y_1<Y_*,\ 0<y_2<g(y_1)]$, где $F(y_1, g(y_1))=Z_*$, сетку с координатами

$$y_{1i}=Y_*(-1+2i/N)\ (i=\overline{0, N});\ y_{2j}=g(y_{1,M-j})\ (j=\overline{M-N, M})$$
$$y_{2j}=jg(y_{1,M-N})/(M-N)\ \ (j=\overline{1, M-N-1});\ y_{2j}=0\ \ (j=0)$$

Представим функцию w_1^* и ее производные по y_1 и y_2 в виде интерполяционных полиномов по узлам введенной сетки

$$w_1^*(y_1, y_2, s)\cong\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M-i}w_{ij}^{*(1)}L_{Nij}(y_1)L_{Mji}(y_2),\quad \frac{\partial w_1^*(y_1, y_2, s)}{\partial y_1}\cong$$
$$\cong\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M-i}w_{ij}^{*(2)}L_{Nij}(y_1)L_{Mji}(y_2) \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial w_1^*}{\partial y_2}\cong\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M-i}w_{ij}^{*(3)}L_{Nij}(y_1)L_{Mji}(y_2),\quad \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial y_2^2}\cong\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M-i}w_{ij}^{*(4)}L_{Nij}(y_1)L_{Mji}(y_2)$$

$$L_{Nij}(y_1)=\omega_N(y_1)/[(y_1-y_{1i})\,\omega_N'(y_{1i})]\ (i=\overline{0, N};\ i=\overline{0, M-N})$$
$$L_{Nij}(y_1)=\omega_{M-j}(y_1)/[(y_1-y_{1i})\,\omega_N'(y_{1i})]$$
$$(i=\overline{0, M-j};\ j=\overline{M-N-1, M-1})\ L_{Nij}(y_1)=1\ \ (i=0, j=M)$$
$$L_{Mji}(y_2)=\omega_{M-i}(y_2)/[(y_2-y_{2j})\,\omega_{M-i}'(y_{2j})]$$
$$(i=\overline{0, N};\ j=0, M-i),\ \omega_k(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_k) \tag{2.12}$$

Подставив узлы (y_{1i}, y_{2j}) в уравнения (2.8) и граничные условия (2.9), (2.10), получим

$$\left[\frac{\partial F[y_{1i}, y_{2j})}{\partial y_2}-s\right]w_{ij}^{*(1)}-y_{2j}w_{2j}^{*(2)}+F(y_{1i}, y_{2j})\,w_{ij}^{*(3)}+\frac{m^2}{2}w_{ij}^{*(4)}=0$$

$$w_{0j}^{*(1)}=-f_0^*(-Y_*, y_{2j}, s)\ \ (j=\overline{0, M}),\quad w_{i,M-i}^{*(1)}=-f_0^*(y_{1i}, g(y_{1i}), s)$$
$$(i=\overline{1, N}) \tag{2.13}$$

$$w_{i0}^{*(1)}=w_{N-i,0}^{*(1)},\quad w_{i0}^{*(3)}=w_{N-i,0}^{*(3)}\ \ (i=\overline{0, N})$$
$$w_{0M}^{*(3)}=-\left.\frac{\partial f_0^*(y_1, y_2, s)}{\partial y_2}\right|_{y_1=y_{10}, y_2=y_{2M}}$$

Последнее ограничение в (2.13) приходится накладывать потому, что первые соотношения в (2.13) дают $M+N$, а не $M+N+1$ условий. Решение системы (2.12), (2.13) ищется совместно с уравнениями, полученными из

(2.11)

$$w_{i,j+1}^{*(1)}-w_{ij}^{*(1)}=\sum_{r=0}^{M-i} w_{ir}^{*(3)}\alpha_{irj},\quad w_{i,j+1}^{*(3)}-w_{ij}^{*(3)}=\sum_{r=0}^{M-i} w_{ir}^{*(4)}\alpha_{irj}$$

$$(i=\overline{0,N};\ j=\overline{0,M-i-1})$$

$$w_{i+1,j}^{*(1)}-w_{ij}^{*(1)}=\sum_{k=0}^{q} w_{kj}^{*(2)}\beta_{jik}\quad (i=\overline{0,N-1};\quad j=\overline{0,M}) \tag{2.14}$$

$$q=N \text{ при } j<M-N,\ q=M-j \text{ при } j\geqslant M-N$$

$$\alpha_{hjr}=\int_{y_{2r}}^{y_{2,r+1}} L_{Mjh}(y)\,dy,\quad \beta_{rki}=\int_{y_{1k}}^{y_{1,k+1}} L_{Nir}(y)\,dy$$

Система (2.13), (2.14) является замкнутой. Можно показать, что порядок аппроксимации дифференциального уравнения будет $A(|h_1|^N+|h_2|^{M-N})$, где A — некоторая постоянная, а, значит, по [4] ее решение существует и единственно и равномерно сходится при h_1, $h_2\to 0$ к решению уравнения (2.8). В формулах (2.13), (2.14) число неизвестных может быть сведено к числу узлов сетки. Для этого найдем решение системы (2.14). Можно показать, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} W_i^{*(3)}&=w_{i,M-i}^{*(1)}E_iA_i^{-1}-w_{i,M-i}^{*(3)}\alpha_iA_i^{-1}-W_i^{*(1)}A_i^{-1}\\ W_i^{*(4)}&=w_{i,M-i}^{*(3)}E_iA_i^{-1}-w_{i,M-i}^{*(4)}\alpha_iA_i^{-1}-W_i^{*(3)}A_i^{-1}\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$W_j^{*(2)}=B_j^{-1}W_j^{*(1)}-w_{0j}^{*(1)}-w_{0j}^{*(1)}(B_j^{-1})E_q-w_{0j}^{*(2)}(\beta_jB_j^{-1})^T \tag{2.16}$$

$$W_i^{*(k)}=\|w_{i,0}^{*(k)},\ldots,w_{i,M-i-1}^{*(k)}\|\quad (k=1,3,4)$$

$$A_i=\left\|\begin{matrix}\sum\limits_{k=0}^{M-i-1}\alpha_{i,\,0,\,M-i-1-k},\ldots,\alpha_{i,\,0,\,M-i-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{k=0}^{M-i-1}\alpha_{i,\,M-i-1,\,M-i-1-k},\ldots,\alpha_{i,\,M-i-1,\,M-i-1}\end{matrix}\right\|$$

$$B_j=\left\|\begin{matrix}\beta_{j01},\ldots,\sum\limits_{r=0}^{q-1}\beta_{jr1}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \beta_{j0q},\ldots,\sum\limits_{r=0}^{q-1}\beta_{jrq}\end{matrix}\right\|,\quad \alpha_i=\left\|\sum_{k=0}^{M-i-1}\alpha_{i,\,M-i,\,M-i-1-k},\ldots,\alpha_{i,\,M-i,\,M-i-1}\right\|$$

$$(W_j^{*(k)})^T=\|w_{1j}^{*(k)},\ldots,w_{qj}^{*(k)}\|\quad (k=1,2),\quad \beta_j=\left\|\beta_{j00},\ldots,\sum_{r=0}^{q-1}\beta_{jr0}\right\|$$

где E_i — единичная матрица размером $1\times(M-i-1)$, E_q^T — строка размером $1\times q$ (верхний индекс T обозначает транспонирование).

Подставляя (2.15) в (2.12) и используя (2.13), получаем систему, число уравнений которой равно числу неизвестных. Изображение по Лапласу вероятности невыхода

$$P(s)=2\int_0^\infty e^{-s\tau}\iint_\Omega p(y_1, y_2, \tau)\,dy_1 dy_2 d\tau$$

в соответствии с (2.7) имеет вид

$$P(s)=2\iint_\Omega f_0^*(y_1, y_2, s)\,dy_1\,dy_2+2\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M-i} w_{ij}^{*(1)}\,c_{ij} \tag{2.17}$$

где c_{ij} — вес какой-либо квадратурной формулы, построенной по узлам (y_{1i}, y_{2j}).

Для обращения выражения (2.17) будем использовать метод численного преобразования Лапласа, предложенный Папулисом [5], который требует вычислять $P(s)$ только для конечного числа действительных положительных значений s.

3. В качестве примера рассмотрим функцию $F(Y_1, Y_2)=2nY_2+k^2Y_1$, где k — собственная частота системы, n — коэффициент затухания. Численные расчеты проводились для $Y_*=0.2$, $Z_*=1$. С помощью предлагаемого метода и метода Монте-Карло вычислялась вероятность невыхода параметров виброзащитной системы из области D (эту вероятность обозначим соответственно через P_1 и P_2).

Ниже приведены значения вероятности невыхода при $n=2$, $k=1$, $m=\sqrt{2}$ (первые три строки) и при $n=7$, $k=1.65$, $m=\sqrt{2}$ (размерность t, *сек*).

t	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.08
P_1	0.923	0.766	0.624	0.510	0.331	0.213
P_2	0.919	0.768	0.634	0.538	0.346	0.234
t	0.001	0.002	0.003	0.004	0.006	0.008
P_1	0.875	0.723	0.595	0.452	0.285	0.150
P_2	0.894	0.718	0.574	0.444	0.286	0.169

Вычисления проводились на ЭВМ ОДРА-1204. Время вычисления с помощью предлагаемого алгоритма составляет около 14 минут, а с помощью метода Монте-Карло — около трех часов (для достижения дисперсии ошибки 5%).

Рассмотрим в качестве другого примера функцию $F=2nY_2+k^2Y_1^3$. В этом случае оказалось удобнее решать первое уравнение Колмогорова при соответствующих граничных и начальных условиях, определяемых из физических соображений и с помощью функции Фикеры.

Ниже приведены значения вероятности невыхода при $n=5$, $k^2=3$, $Y_*=0.6$, $Z_*=1$.

t	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
P_1	0.506	0.255	0.127	0.062	0.028	0.011	0.002
P_2	0.528	0.258	0.119	0.048	0.025	0.012	0.005

Рассмотрим в качестве следующего примера линейную виброзащитную систему с нестационарным случайным воздействием $x(t)$, получающимся на выходе линейной системы (2.3)

$$A(t)=m,\quad t\in[0, T_1];\qquad A(t)=0,\quad t>T_1,\quad T_1<T,\quad m=\text{const}$$

Легко видеть, что $x(t)$ имеет корреляционную функцию вида

$$K_x(t_1, t_2)=\frac{m^2}{2\alpha}\left[e^{-\alpha|t_1-t_2|}-e^{-\alpha(t_1+t_2)}\right],\quad t_1, t_2\in[0, T_1];$$

$$K_x(t_1, t_2)=\frac{m^2}{2\alpha}\left[e^{2\alpha t_1}-1\right]e^{-\alpha(t_1+t_2)},\quad t_1\leqslant t_2$$

$$K_x(t_1, t_2)=\frac{m^2}{2\alpha}\left[e^{2\alpha t_2}-1\right]e^{-\alpha(t_1+t_2)},\quad t_1\geqslant t_2;$$

$$K_x(t_1, t_2)=\frac{m^2}{2\alpha}\left[e^{2\alpha T_1}-1\right]e^{-\alpha(t_1+t_2)},\quad t_1, t_2>T_1$$

Если для этой задачи записать второе уравнение Колмогорова с соответствующими начальными и граничными условиями, то очевидно, что предложенный алгоритм численно-аналитического решения применим и в этом случае. На основе данного алгоритма и были проведены расчеты вероятности невыхода параметров виброзащитной системы из области $Y_*=0.2$, $Z_*=1$ при следующих данных: $n=2$, $k=1$, $m=0.7$, $\alpha=0.045$ (время вычислений по методу Монте-Карло составляет 4 часа)

t	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
P_1	1.0	1.0	0.964	0.870	0.741	0.635	0.512
P_2	1.0	1.0	0.951	0.860	0.774	0.619	0.526

Для того чтобы проверить предлагаемый в работе численный алгоритм и метод Монте-Карло, используемый для контроля, рассмотрим систему $u_1^\bullet=\sqrt{2}\,\xi(t)$, $u_2^\bullet=u_1$, для которой найдено аналитическое решение [6].

Требуется найти вероятность $P(t)$ невыхода компонент процесса из области $D=(0<a<u_1<b,\ c<u_2<d)$ для плотности вероятности начальных ординат вида

$$w_0(x_1,x_2)=\frac{\delta(x_2)}{b-a},\quad (x_1,x_2)\in D,\quad w_0(x_1,x_2)=0,\quad (x_1,x_2)\bar{\in} D$$

Значения $P_1(t)$ для области $D=(1<u_1<3,\ 0<u_2<1)$, подсчитанные изложенным выше методом, и значения $P_2(t)$, полученные методом Монте-Карло, приведены ниже

t	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4
P_1	0.880	0.649	0.490	0.412	0.296
P_2	0.882	0.642	0.492	0.398	0.283
P_3	0.882	0.645	0.488	0.397	0.284

Значения $P_3(t)$ соответствуют вероятности из [6].

Таким образом, метод, использованный в работе, дает удовлетворительную для инженерных расчетов точность.

Поступила 26 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Теория оптимальной виброзащиты при случайных воздействиях. Тр. Моск. энерг. ин-та, 1970, вып. 74.
2. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
3. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Итоги науки. Матем. анализ, 1969. М., ВИНИТИ, 1971.
4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений, т. 1–2. М., «Наука», 1962.
5. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., «Наука», 1971.
6. *Незлобин А. Н.* Определение вероятности невыхода двумерного марковского процесса за границы заданной области. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 3.