МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1978

УДК 624.07:534.1

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ

А. И. ВЕСНИЦКИЙ, С. В. КРЫСОВ, А. И. ПОТАПОВ

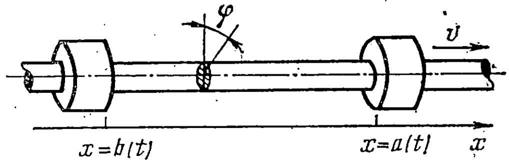
(Горький)

При обсуждении вопроса о параметрическом возбуждении колебаний часто приводится система, представляющая собой вал с диском, вдоль которого совершает поступательные движения шлицевая втулка, не проворачивающаяся относительно вала [1, 2]. В тех случаях, когда период движения втулки значительно больше времени распространения крутильных волн вдоль системы, обычно считают, что изменение длины вала приводит лишь к периодическому изменению его эффективной жесткости на кручение. При этих предположениях система ведет себя как сосредоточенная и ее колебания описываются уравнением Матье.

С ростом же частоты колебаний втулки, когда период ее движения становится сравним со временем пробега волн, последними уже нельзя пренебрегать, и исследуемую систему необходимо рассматривать как распределенную. Происходящие при этом процессы носят волновой характер и описываются уравнениями в частных производных с краевыми условиями на движущихся границах [3, 4]. В этом случае параметрическая неустойчивость имеет ряд особенностей и может, в частности, приводить к возбуждению колебаний импульсной формы [5–7].

В предлагаемой работе на примере крутильных волн в стержне строится теория параметрической неустойчивости одномерных систем с движущимися границами. Показывается, что основной причиной неустойчивости является двойной эффект Допплера, а возрастание энергии колебаний сопровождается расширением их спектра, приводящим к возбуждению волн импульсной формы. Отмечается, что если граница движется быстрее волны, то в системе возникают ударные волны. Приводятся результаты экспериментальных исследований, подтверждающие теоретические выводы.

1. В качестве исследуемой модели рассмотрим цилиндрический стержень радиуса R, протягиваемый с постоянной скоростью v через втулки, которые, в свою очередь, двигаются по некоторым законам $x=a(t)$ и $x=b(t)$ (фиг. 1). Втулки не проворачиваются из-за наличия в них шипов и продольных канавок в стержне [1].



Фиг. 1

Крутильные волны в такой системе описываются уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-(c^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2v\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}=0,\qquad c=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{1.1}$$

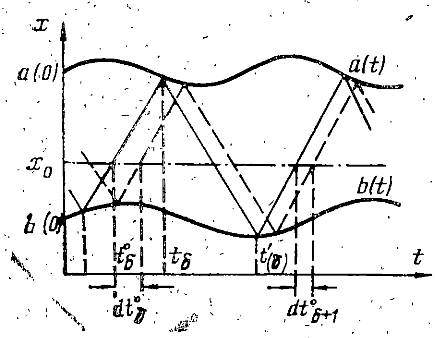
[1] Подобная ситуация может реализоваться, например, при волочении проволоки.

с краевыми и начальными условиями

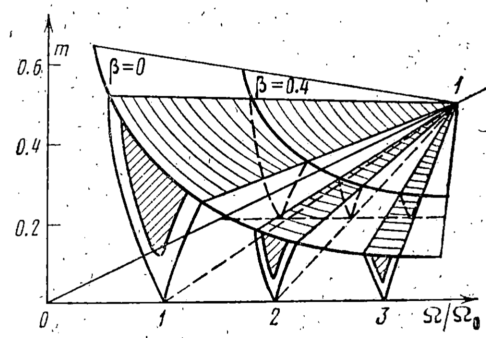
$$\varphi|_{x=b(t)}=\varphi|_{x=a(t)}=0 \tag{1.2}$$

$$\varphi|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=\Psi_0(x)\qquad (b(0)\leqslant x\leqslant a(0)) \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — угол закрутки стержня в сечении x, c — скорость распространения крутильных волн, ρ, G — соответственно линейная плотность стержня и модуль сдвига.



Фиг. 2



Фиг. 3

Записывая $\varphi(x, t)$ в виде суммы двух бегущих волн

$$\varphi(x, t)=f[t+x/(c-v)]+h[t-x/(c+v)] \tag{1.4}$$

и подставляя в краевые условия (1.2), получаем систему функциональных уравнений

$$\begin{gathered} f\left[t+\frac{b(t)}{c-v}\right]+h\left[t-\frac{b(t)}{c+v}\right]=0 \\ f\left[t+\frac{a(t)}{c-v}\right]+h\left[t-\frac{a(t)}{c+v}\right]=0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Для выявления качественных особенностей решений (1.5) удобно проследить за распространением волн в системе с помощью соответствующих графических построений на пространственно-временной плоскости (x, t) (фиг. 2). Из фиг. 2 видно, что каждая точка профиля волны движется на плоскости (x, t) вдоль своей траектории, являющейся ломаной линией, составленной из отрезков характеристик уравнения (1.1) $t-x/(c+v)=\text{const}$ и $t+x/(c-v)=\text{const}$, заключенных между граничными кривыми $x=b(t)$ и $x=a(t)$.

Величины смещений бегущих волн f и h в процессе их взаимодействия с движущимися границами, как это следует из (1.5), не изменяются. Происходит лишь их деформация: сжатие или растяжение. Проследим за движением одного из участков волны длительностью Δt, заключенного между двумя близкими точками ее профиля x и $x+\Delta x$, вдоль соответствующих траекторий. Его длительность изменяется только в результате взаимодействия волны с границами. Она уменьшается, если граница движется навстречу волне, и увеличивается, если граница и волна движутся в одном направлении.

2. Рассмотрим, как изменяется с течением времени длительность указанного участка волны в фиксированном сечении системы $b(t)<x_0<a(t)$. Для этого запишем соотношения, связывающие моменты двух последовательных (δ- и $\delta+1$-го) прохождений волны $h(t-x/(c+v))$ через сечение x_0 (фиг. 2)

$$t_\delta-t_\delta^\circ=\frac{a(t_\delta)-x_0}{c+v},\quad t_\delta'-t_\delta=\frac{a(t_\delta)-b(t_\delta')}{c-v},\quad t_{\delta+1}^\circ-t_\delta'=\frac{x_0-b(t_\delta')}{c+v} \tag{2.1}$$

Представляя их для малых приращений dt в дифференциальной форме, находим

$$\frac{d\overset{\circ}{t}_{\delta+1}}{dt_\delta^\circ}=D_a(t_\delta)D_b(t_\delta') \tag{2.2}$$

$$D_a(t_\delta)=\frac{1+a^\cdot(t_\delta)/(c-v)}{1-a^\cdot(t_\delta)/(c+v)},\qquad D_b(t_\delta')=\frac{1-b^\cdot(t_\delta')/(c+v)}{1+b^\cdot(t_\delta')/(c-v)}$$

Отсюда видно, что при взаимодействии с движущимися границами изменение длительности участка волны $dt=dx/(c\pm v)$ подчиняется закону двойного эффекта Допплера[1]. При этом, если выражение, стоящее в правой части (2.2), меньше единицы, то для рассматриваемого участка преобладает сжатие, и, кроме того, его энергия увеличивается в $dt_\delta^\circ/d\overset{\circ}{t}_{\delta+1}$ раз. Действительно, изменение плотности энергии бегущих волн f и h:

$$\varepsilon_f=\gamma[1+(1-v/c)^2][f'(t+x/(c-v))]$$

$$\gamma=\frac{\pi R^4}{4}\rho$$

$$\varepsilon_h=\gamma[1+(1+v/c)^2][h'(t-x/(c+v))]$$

происходит лишь в процессе их взаимодействия с движущимися границами в моменты времени t_δ и t_δ'. В эти моменты значения f и h связаны между собой следующими соотношениями:

$$f'\left[t_\delta+\frac{a(t_\delta)}{c-v}\right]=-\frac{1}{D_a(t_\delta)}h'\left[t_\delta-\frac{a(t_\delta)}{c+v}\right]$$

$$h'\left[t_\delta'-\frac{b(t_\delta')}{c+v}\right]=-\frac{1}{D_b(t_\delta')}f'\left[t_\delta'+\frac{b(t_\delta')}{c-v}\right]$$

которые получаются дифференцированием (1.5). Учитывая, что в промежутки времени между отражениями от границ выражения $f'[t+x/(c-v)]$ и $h'[t-x/(c+v)]$ сохраняют постоянные значения, находим связь между плотностями энергий бегущей волны h в сечении x_0 в моменты времени t_δ° и $\overset{\circ}{t}_{\delta+1}$:

$$\varepsilon_h(\overset{\circ}{t}_{\delta+1})=\varepsilon_h(t_\delta^\circ)[D_a(t_\delta)D_b(t_\delta')]^{-2} \tag{2.3}$$

Изменение же энергии участка волны с учетом (2.2) и (2.3) равно

$$\frac{dW_{\delta+1}}{dW_\delta}=\frac{\varepsilon_h(\overset{\circ}{t}_{\delta+1})\,d\overset{\circ}{t}_{\delta+1}}{\varepsilon_h(t_\delta^\circ)\,dt_\delta^\circ}=\frac{1}{D_a(t_\delta)D_b(t_\delta')}=\frac{dt_\delta^\circ}{d\overset{\circ}{t}_{\delta+1}} \tag{2.4}$$

Заметим, что если граница системы обладает линейными потерями, то изменение энергии волны в результате однократного отражения от движущихся границ будет меньше в $(\Gamma_1\Gamma_2)^2$ раз, где $\Gamma_{1,2}$ – коэффициенты отражения волн от границ системы. При k последовательных взаимодействиях с каждой из границ энергия начального участка волны изменяется следующим образом:

$$\frac{dW_k}{dW_1}=\Gamma^{2k}\prod_{\delta=1}^{k}\frac{1}{D_a(t_\delta)D_b(t_\delta')},\qquad \Gamma=\Gamma_1\Gamma_2 \tag{2.5}$$

где t_δ и t_δ' определяются из решения $2k+1$ уравнения типа (2.1).

[1] По такому же закону изменяются и «мгновенные частоты» собственных колебаний системы [3, 4].

Следовательно, неограниченное нарастание энергии в системе при $t\to\infty$ ($k\to\infty$) будет иметь место, если существует хотя бы один участок волны, для которого выполняется следующее условие:

$$\Gamma^{-2k}\prod_{\delta=1}^{k}[D_a(t_\delta)D_b(t_\delta')]|_{k\to\infty}\to 0 \qquad (2.6)$$

Последнее является критерием неустойчивости систем с движущимися границами. Оно показывает также, что увеличение энергии волны неизбежно сопровождается ее сжатием.

Исследование условия (2.6) в его общем виде затруднительно. Поэтому ограничимся далее рассмотрением одного из наиболее интересных случаев, когда границы системы движутся по периодическим законам и имеют общий период $T=pT_1=qT_2$ (p, $q=1, 2, 3, \ldots$), где T_1 и T_2 — периоды движения границ $x=a(t)$ и $x=b(t)$.

Допустим, что существует такой участок волны, который каждый k-й раз взаимодействует с движущимися границами в одной и той же фазе их движения, т. е.

$$t_k=t_1+NT,\qquad t_k'=t_1'+NT,\qquad (N,\,k=1,\,2,\,3,\ldots)$$

При этом каждые k сомножителей в (2.6) будут периодически повторяться, и условие неустойчивости сведется к неравенству

$$\prod_{\delta=1}^{k}[D_a(t_\delta)D_b(t_\delta')]<\Gamma^{2k} \qquad (2.7)$$

где t_δ и t_δ' определяются из системы $2k+1$ уравнений

$$\begin{gathered}t_1'-t_1=\frac{a(t_1)-b(t_1')}{c-v},\qquad t_2-t_1'=\frac{a(t_2)-b(t_2')}{c+v},\ldots\\ t_k-t_{k-1}'=\frac{a(t_k)-b(t_{k-1}')}{c+v},\qquad t_k=t_1+NT\end{gathered} \qquad (2.8)$$

Таким образом, в данном случае определение режимов неустойчивости свелось к нахождению условий существования решений системы (2.8), для которых выполняется неравенство (2.7). Эти условия являются необходимыми и достаточными. При $k=1$ систему (2.8) можно заменить одним уравнением

$$\tfrac{1}{2}NcT(1-v^2/c^2)=a(t_1)-b(t_1') \qquad (2.9)$$

Условие (2.7) при этом примет следующий вид:

$$D_a(t_1)D_b(t_1')<\Gamma^2,\quad t_1'=t_1+\tfrac{1}{2}NT(1+\beta),\quad \beta=v/c \qquad (2.10)$$

Его смысл состоит в том, что в режиме параметрической неустойчивости энергия, поступающая в систему, должна превышать потери в ней.

3. В качестве примера применим изложенный выше метод к исследованию неустойчивости крутильных волн в стержне, у которого одна из втулок неподвижна ($x=b(t)=0$), а другая колеблется по периодическому закону $x=a_0[1+m\sin\Omega t)$, где a_0, $\Omega=2\pi/T$ и $m<1$ — постоянные величины (фиг. 1). В этом случае уравнение (2.9) и условие существования его решений запишутся в виде

$$\tfrac{1}{2}NcT(1-\beta^2)=a_0(1+m\sin\Omega t)$$

$$\left|N\frac{\Omega_0}{\Omega}(1-\beta^2)-1\right|=\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right|\leqslant m\sin\Omega t_1$$

$$\Omega_0=\frac{\pi c}{a_0},\quad \Delta\Omega=[N\Omega_0(1-\beta^2)-\Omega]\tag{3.1}$$

где $\Delta\Omega$ — расстройка. Условие (2.10) выполняется, если

$$\cos\Omega t_1<-\frac{\Omega_0(1-\beta^2)}{\pi m\Omega}\left(\beta+\frac{1+\Gamma^2}{1-\Gamma^2}\right)^{-1}\tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2) и условия $|a^{\cdot}|<c-v$ находим неравенства, определяющие области параметрической неустойчивости

$$\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right|<m\left\{1-\left[\frac{\Omega_0(1-\beta^2)}{\pi m\Omega}\left(\beta+\frac{1+\Gamma^2}{1-\Gamma^2}\right)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$(1-\beta^2)\frac{\Omega_0}{\pi\Omega}\left(\beta+\frac{1+\Gamma^2}{1-\Gamma^2}\right)^{-1}\leqslant m<\frac{\Omega_0}{\pi\Omega}(1-\beta)\tag{3.3}$$

Второе из них указывает на то, что в системе с потерями существует порог параметрического возбуждения.

В (3.3) входят пять независимых параметров Ω/Ω_0, m, β, Γ и N, причем N может принимать лишь целочисленные значения, каждому из которых в пространстве параметров соответствует своя зона неустойчивости. Последние не имеют общих точек и поэтому значение N удобно понимать как номер зоны [1].

На фиг. 3 показаны первые три зоны неустойчивости. Сверху они ограничены поверхностью $m=\Omega_0(1-\beta)/\pi\Omega$, за которой максимальная скорость движения границы превышает скорость распространения волны (т. е. в некоторые промежутки времени граница становится «сверхзвуковой»).

Этот случай не может рассматриваться в рамках выбранной модели, так как задача (1.1)–(1.3) становится некорректной [3]. Однако физически такая ситуация вполне реализуема и, как показали экспериментальные исследования, в этом случае возбуждаются ударные волны.

Увеличение скорости протяжки вала приводит к сужению зон и смещению их в область более низких частот. В пределе при $\beta\to1$ все зоны сжимаются в одну точку.

Инкремент нарастания энергии колебаний σ для центров зон $(\Omega=N\Omega_0(1-\beta^2))$ равен

$$\sigma=\frac{1}{T}\ln\frac{dW(t+T)}{dW(t)}=\frac{1}{T}\ln\left[\Gamma^2\frac{1+Nm\pi(1-\beta)}{1-Nm\pi(1+\beta)}\right]$$

Отсюда видно, что он увеличивается с ростом номера зоны N, а порог возбуждения понижается (заштрихованные области на фиг. 3 при $\beta=0$). Это естественно, так как с ростом N увеличивается частота колебаний границы, а значит, и скорость ее движения при том же коэффициенте модуляции m. Увеличение же скорости движения приводит к увеличению энергии, передаваемой импульсу при каждом отражении от границы, т. е. к росту инкремента. Следовательно, для рассматриваемой системы необходим учет не только первой, но и высших зон неустойчивости, что является одной из ее характерных особенностей. Надо также отметить, что максимальное число одновременно возбуждаемых в системе импульсов равно номеру зоны.

В случае синхронно колеблющихся границ [3, 5]:

$$x=ma_0\sin(\Omega t+\theta),\quad x=a_0(1+m\sin\Omega t)$$

зоны неустойчивости при $\Gamma=1$ определяются неравенствами

$$\left|\frac{\Delta\Omega}{\Omega}\right|<2m\sin\left[\frac{N\pi}{2}(1+\beta)+\frac{\theta}{2}\right],\quad 0<m<\frac{\Omega_0}{\pi\Omega}(1-\beta)$$

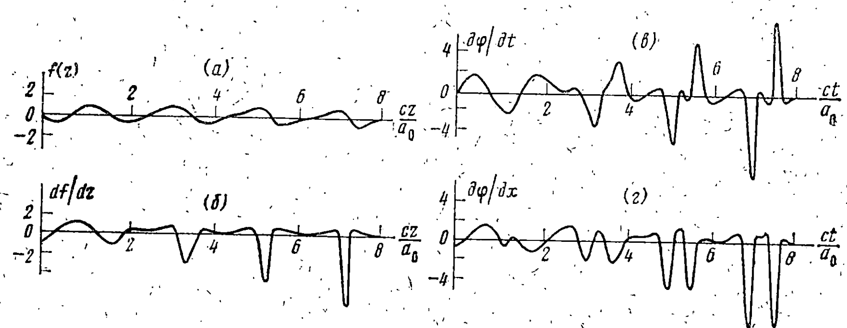
---

[1] В отличие от сосредоточенных систем, где частота изменения параметров уменьшается с ростом номера зоны $(\Omega=2\Omega_0/N)$, в данном случае частота колебаний границы увеличивается с ростом ее номера $(\Omega\sim N\Omega_0)$.

Их ширина уже немонотонно зависит от β и разности фаз θ между колебаниями границ. В частности, зоны вырождаются в отрезки прямых, если выполнено условие $\sin {}^1/_2[\pi N(1+\beta)+\theta]=0$.

Изложенный метод отыскания режимов параметрической неустойчивости по своей идее близок к методу точечных отображений в теории нелинейных колебаний [8]. В данном случае пространственно-временная плоскость (x, t) служит фазовой, роль кривых без контакта играют траектории границ. Отрезки характеристик волнового уравнения, заключенные между этими кривыми, осуществляют точечное отображение. Система уравнений (2.8) представляет собой функцию последования, заданную в неявном виде, а условие (2.7) является условием устойчивости неподвижной точки [1] точечного отображения (2.8).

4. В п. 2 качественно было показано что неустойчивость в системе с движущимися границами всегда сопровождается сжатием начального возмущения в импульсы. Процесс же формирования импульсов из заданных



Фиг. 4

начальных условий легко прослеживается при помощи метода итераций [3, 6]. Так, например, на фиг. 4 показан процесс формирования импульсов из синусоидальных начальных условий

$$\varphi(0,x)=\Phi_0\sin\frac{\pi x}{a_0},\quad \frac{\partial\varphi(0,x)}{\partial t}=\frac{\pi c}{a_0}\Phi_0\sin\frac{\pi x}{a_0}\quad \left(m=0,1;\ \Omega=\frac{\pi c}{a_0}\right)$$

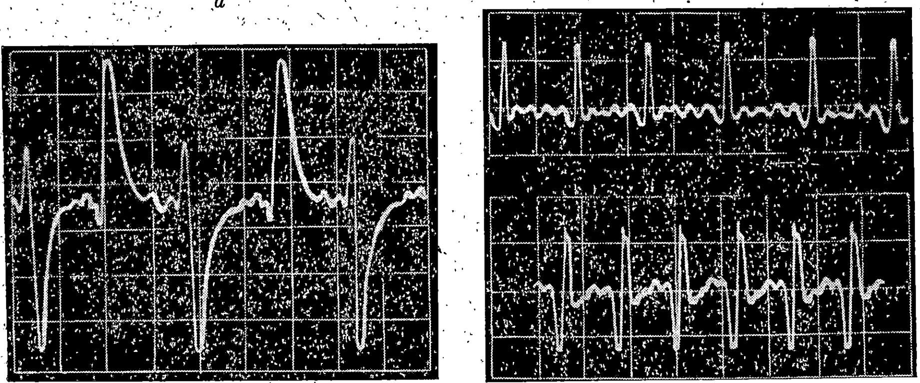
Гармоническая волна $f(z=t\pm x/c)$ с течением времени (фиг. 4, *а*) трансформируется в пилообразную и, следовательно, в ее спектре появляются все более высокочастотные составляющие. Максимальное же значение $f(z)$ остается неизменным [2]. Производная от бегущей волны $f'(z)$ представляет собой последовательность нарастающих по амплитуде однополярных импульсов (фиг. 4, *б*). Волны $\partial\varphi/\partial t$ и $\partial\varphi/\partial x$ преобразуются соответственно в последовательность двухполярных (фиг. 4, *в*) и однополярных (фиг. 4, *г*) импульсов. Расстояние между парой ближайших из них определяется временем пробега импульса от места наблюдения x_0 до границы $x=0$ и обратно.

В рамках линейной модели длительность импульсов стремится к нулю, а их энергия к бесконечности. Установление формы импульсов (см. п. 5) связано с наличием и конкуренцией в реальной системе дисперсии и нелинейности, которые здесь не учитывались.

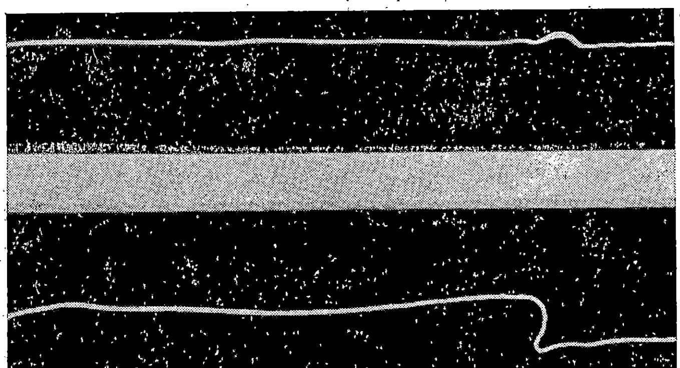
---

[1] Под неподвижной точкой (2.8) подразумевается постоянная фаза $(\Omega t_k=\Omega t_1+2\pi N)$ взаимодействия волны с движущейся границей.

[2] Это напоминает эволюцию волн Римана [9, 10], однако механизм формирования здесь иной.

а б в


Фиг. 5

а б


Фиг. 6

5. Волновые процессы в системе, изображенной на фиг. 1, моделировались на тонкой резиновой ленте (~0.5–0.7 *мм*), которая натягивалась между двумя опорами. Подвижной границей служил поршень с узкой прорезью (~1–1.5 *мм*), через которую проходила лента. Движение поршня осуществлялось при помощи кривошипно-шатунного механизма. Такая модель удобна тем, что в ней поперечные волны распространяются с небольшой скоростью (~12–13 *м/сек*) при слабой дисперсии, нелинейности и диссипации в широкой полосе частот [1]. Это позволило на относительно простой установке проверить все основные теоретические результаты, так как поведение поперечных волн в описанной системе определяется задачей, аналогичной (1.1)–(1.3) [3, 5] [2]. При этом под $\varphi(x, t)$ следует понимать поперечное смещение ленты, положив $v=0$, так как в осевом направлении она неподвижна.

Экспериментальные исследования параметрической неустойчивости проводились в системе с одной колеблющейся границей $x=a_0(1+m\sin\Omega t)$. Коэффициент модуляции $m=0.08$ при средней длине ленты $a_0=85$ *см* и натяжении ~4 *н*. Скорость распространения волн $c=12.5$ *м/сек*, а первая собственная частота стационарной системы $F_0=\Omega_0/2\pi=7.4$ *гц*.

Индикация колебаний осуществлялась микрофоном из пьезокерамики, установленным вблизи ленты, с клемм которого напряжение подавалось на осциллограф, а также визуально с использованием стробоскопического эффекта и скоростной съемки. В первом случае регистрировались осциллограммы производной от функции поперечного смещения в фиксированном сечении системы (фиг. 5), а во втором непосредственно наблюдались сами бегущие волны смещения (фиг. 6).

---

[1] Скорость сдвиговых волн в твердых телах превышает 1000 *м/сек*, что значительно затрудняет создание экспериментальной установки.

[2] См. также: *Весницкий А. И., Потапов А. И.* Параметрическое возбуждение в одномерных системах с переменной длиной. Тр. VII Всес. симпозиума по дифракции и распространению волн. Ростов-на-Дону, 1977.

Частота колебаний границы изменялась в пределах от 5 до 35 *гц* ($|a^{\cdot}|=2.1-14.7$ *м/сек*), что позволило экспериментально исследовать режимы параметрической неустойчивости в первых трех зонах и в области возбуждения ударных волн $|a^{\cdot}|>c$.

Типичные осциллограммы колебаний, наблюдаемых в сечении $x_0=0.5a_0$, приведены на фиг. 5, *а* (1-я зона, $\Omega/\Omega_0=1.09$), фиг. 5, *б* (2-я зона, $\Omega/\Omega_0=2$) и фиг. 5, *в* (3-я зона, $\Omega/\Omega_0=3$). Здесь скорость развертки равна 20 *мс/дел*. Период повторения импульсов равен периоду колебаний границы, а их форма определяется местоположением в зоне неустойчивости. Так, например, несимметричность импульсов в первой зоне (фиг. 5, *а*) объясняется тем, что этот режим соответствует высокочастотной границе области возбуждения, когда скорость движущегося поршня при взаимодействии с импульсом уменьшается. Поэтому передний фронт, отражающийся от движущейся границы раньше, заметно круче заднего. В центрах зон возбуждаемые импульсы более симметричны (см. фиг. 5, *б*, *в*). Так как наблюдаемые на осциллографе импульсы являются суперпозицией двух волн, бегущих в противоположных направлениях, то их форма не одинакова в различных сечениях ленты.

На фиг. 6, *а* приведен снимок волны, возбуждаемой в первой зоне. Она представляет собой движущийся перепад пилообразной формы, что хорошо согласуется с результатами теоретического анализа (фиг. 4, *а*). Максимальная величина поперечного смещения ленты составляла в различных зонах неустойчивости от 0.5 до 1 *см*.

Количество гармоник n, содержащихся в импульсе, легко оценивается по известной связи между периодом повторения сигнала T, его длительностью τ и шириной спектра $\Delta\omega$. Для треугольных импульсов $n\sim T/2\tau$, следовательно, в первой зоне, где $T/\tau=11$, импульсы состоят из 5–6 гармоник, во второй – из 4–5 и в третьей – из 3–4. Но несмотря на то, что количество гармоник в импульсе уменьшается с ростом номера зоны, его спектр становится шире $\Delta\omega\sim n/T$.

При частотах колебаний границы 29–30 *гц* ($|a^{\cdot}|>c$) в системе возбуждалась интенсивная ($|\varphi|_{\max}\sim5-6$ *см*) ударная волна (фиг. 6, *б*). Характерно, что на ее фронте возникал S-образный перегиб (перехлест), который сглаживался по мере распространения волны в среде. Образование перехлеста напоминает «опрокидывание» простой волны в нелинейной среде без дисперсии [10]. Поэтому по расплыванию фронта ударной волны можно судить, например, о дисперсионных и диссипативных свойствах резины.

Представляется целесообразным отметить выявленные особенности параметрической неустойчивости в системах с движущимися границами.

В отличие от сосредоточенных систем в данном случае колебания усиливаются за счет двойного эффекта Допплера и всегда принимают форму импульсов (движущихся перепадов).

Рассмотренный механизм неустойчивости имеет место лишь при частотах колебаний границы, близких или кратных низшей собственной частоте соответствующей стационарной системы.

В процессе возбуждения энергия волны возрастает не за счет увеличения амплитуды отдельной гармонической составляющей, а в результате расширения ее спектра и переноса энергии из области низких в область высоких частот. Это, по-видимому, важно учитывать при расчетах реальных систем [1], так как высокочастотные вибрации, поглощаясь материалом, приводят к более быстрому его износу.

Инкремент нарастания энергии увеличивается с ростом номера зоны, а порог возбуждения понижается, поэтому при наличии потерь в системе принципиально необходим учет высших зон неустойчивости.

В высших зонах экспериментально наблюдалось параметрическое деление частоты (пропадание одного, двух импульсов и т. д.). Эти эффекты, так же как и возбуждение ударных волн, не могут быть изучены в рамках линейной модели. Для их объяснения необходимо учитывать нелинейные и дисперсионные свойства системы.

Поступила 12 IX 1977

---

[1] Например, при динамических расчетах шахтных канатов, в которых скорость распространения поперечных волн составляет 100–200 *м/сек*, а скорости подъема груза достигают 12–16 *м/сек* [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. *Весницкий А. И., Потапов А. И.* Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами. В сб.: Динамика систем. Изд-во Горьковск. ун-та, 1978, № 13.
4. *Весницкий А. И., Потапов А. И.* О некоторых общих свойствах волновых процессов в одномерных механических системах переменной длины. Прикл. механ., 1975, т. 11, № 4.
5. *Весницкий А. И., Крысов С. В., Шохин С. Р.* Параметрическое возбуждение импульсов в распределенных механических системах с нестационарными границами. ПМТФ, 1976, № 4.
6. *Весницкий А. И., Потапов А. И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках. В сб.: Динамика систем. Изд-во Горьковск. ун-та, 1975, № 7.
7. *Красильников В. Н., Панкратов А. М.* Электромагнитные поля в резонаторах с колеблющейся границей. В сб.: Проблемы дифракции и распространения волн. Изд-во ЛГУ, 1968, № 8.
8. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
9. *Островский Л. А.* Ударные волны и солитоны. Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, № 5–6.
10. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1974.
11. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев, «Наукова думка», 1971.