МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1978

УДК 624.07:534.1

О РАСЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ

М. В. МИРОНОВ

(Ленинград)

Исследование колебаний криволинейного стержня является, как известно, сложной задачей даже для кругового однородного стержня [1]. При расчете колебаний низкой частоты, когда можно считать стержень нерастяжимым, задача упрощается. В этом случае, из-за наличия простой связи между перемещениями в нормальном и касательном направлениях, нетрудно приближенно задать форму колебаний, что позволяет с успехом использовать вариационные методы (см. [1, 2]).

При исследовании высших форм колебаний (для тонких стержней это является практически важной задачей) применение вариационных методов сильно усложняется [1]. Непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений криволинейного стержня численными методами в этом случае также связано с рядом трудностей [3].

В данной работе для расчета колебаний плоских криволинейных стержней переменного сечения использован метод медленно (точнее мало) меняющихся параметров (метод вариации произвольных постоянных). При реализации этого метода учтены идеи асимптотического интегрирования линейных дифференциальных уравнений [4–6]. Применение такого подхода в более простых случаях (см. [7, 8]) показывает, что он особенно эффективен при исследовании высших форм колебаний.

Рассматриваются стержни без сосредоточенных масс, промежуточных опор и угловых точек, хотя в сочетании с методом матриц переноса данный подход может быть распространен и на эти случаи. Изучаются только колебания в плоскости стержня, но полученные результаты легко переносятся и на колебания криволинейного стержня, перпендикулярные его плоскости. Случай кратных корней характеристического уравнения и вопросы устойчивости в данной работе не обсуждаются.

1. Переход к мало изменяющимся переменным. При обычных предположениях уравнения форм колебаний криволинейного стержня, происходящих в его плоскости, имеют вид [1, 9]:

$$N'-T/\rho+\omega^2\mu v=-f_N(x),\quad T'+M'/\rho+\omega^2\mu u=-f_T(x) \tag{1.1}$$

$$N=M',\ M=-c_v(v''+v/\rho^2),\ T=c_u(u'+v/\rho) \tag{1.2}$$

Здесь ω – частота колебаний, штрихами обозначены производные по дуговой координате x, отсчитываемой по нейтральной поверхности недеформированного стержня; $v(x)$ и $u(x)$ – амплитуды нормального (поперечного) и касательного (продольного) смещений; $\mu(x)$ – погонная масса стержня; $\rho(x)$ – радиус кривизны нейтральной поверхности; $f_N(x)$ и $f_T(x)$ – амплитуды нормальной и касательной составляющих внешней гармонической нагрузки; N, M, и T – амплитуды перерезывающей силы, изгибающего момента и растягивающей силы; $c_v(x)$ и $c_u(x)$ – изгибная и продольная жесткости стержня (при учете сил неупругого сопротивления жесткости c_v и c_u – комплексные величины). Стержень предполагается тонким, т. е. для него отношение $\nu=c_v/(c_u\rho^2)$ является весьма малым (в дальнейшем предполагается, что $\nu\leqslant 1/300$).

Выражение (1.2) изгибающего момента совпадает с полученным в [9], но отличается от выражения, приведенного в [1] ($v\rho^{-2}$ вместо $-u'\rho^{-1}$). Хотя это отличие мало влияет на конечные результаты, следует предпочесть выражение (1.2) как более удобное (оно не изменяется при переходе от нерастяжимого стержня к растяжимому) и более точное. В последнем можно убедиться, рассматривая продольную деформацию ($u'\neq 0$; v, $v''=0$). При этом $M=0$, ибо продольные волокна стержня испытывают одинаковые относительные деформации. Отсюда следует, что изгибающий момент в первом приближении от u' не зависит. В [9] показано, что он пропорционален изменению кривизны стержня $v''+v\rho^{-2}$.

Вместо двух переменных v и u введем шесть

$$v,\ L=v',\ M=-c_v(L'+v\rho^{-2}),\ N=M',\ u,\ T=c_u(u'+v\rho^{-1}) \tag{1.3}$$

Учитывая уравнения форм, запишем шесть уравнений первого порядка для указанных переменных

$$\begin{gathered} v'=L,\ L'=-M/c_v-v/\rho^2,\ M'=N,\ N'=T/\rho-\omega^2\mu v-f_N \\ u'=T/c_u-v/\rho,\ T'=-N/\rho-\omega^2\mu u-f_T \end{gathered} \tag{1.4}$$

Пусть f_N, $f_T=0$, а ρ, c_v, c_u, μ постоянны. Анализ, проведенный с учетом результатов [1], показывает, что в этом случае общее решение системы (1.4) приближенно может быть записано в виде

$$Y_v=\Psi_v V,\ Y_u=\Psi_u U \tag{1.5}$$

$$Y_v=\begin{Vmatrix} v \\ M \\ N \end{Vmatrix},\quad V=\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Vmatrix},\quad \Psi_v=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & (\xi\rho)^{-1} \\ \eta_{M1} & -\eta_{M2} & \eta_{M3} \\ -\tau & \tau & \eta_T \end{Vmatrix}$$

$$Y_u=\begin{Vmatrix} L \\ N \\ u \end{Vmatrix},\quad U=\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ y_3 \end{Vmatrix},\quad \Psi_u=\begin{Vmatrix} \varkappa & \lambda & -1/\rho \\ \eta_{N1} & -\eta_{N2} & -\eta_{N3} \\ \chi_1 & -\chi_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\eta_{M_1}=c_v(\lambda_0^2+{}^1/{}_2\rho^{-2}),\quad \eta_{M_2}=c_v(\lambda_0^2+{}^1/{}_2\rho^{-2}),\quad \eta_{M_3}=c_v(\theta^2-\rho^{-2})/(\xi\rho)$$

$$\eta_{N1}+\varkappa\eta_{M1},\quad \eta_{N2}=\lambda\eta_{M2},\quad \eta_{N3}=\xi\eta_{M3},\quad \tau=2c_v\lambda_0^2/\rho$$

$$\eta_T=\omega^2\mu/\xi,\ \chi_1=(1+\sigma)/(\varkappa\rho),\ \chi_2=(1-\sigma)/(\lambda\rho),\ \sigma=2\nu\lambda_0^2\rho^2$$

$$\lambda_0^4=\omega^2\mu/c_v,\ \theta^2=\omega^2\mu c_v^{-1}-\rho^{-2},\ \varkappa^2=\lambda_0^2+{}^3/{}_2\rho^{-2},\ \lambda^2=\lambda_0^2-{}^3/{}_2\rho^{-2}$$

$$\begin{gathered} v_1=a\sin\varkappa x+b\cos\varkappa x,\ u_1=a\cos\varkappa x-b\sin\varkappa x \\ v_2=p\exp(-\lambda x)+q\exp[\lambda(x-l)],\quad u_2=-p\exp(-\lambda x)+q\exp[\lambda(x-l)] \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь l — длина стержня; a, b, p, q, g, h — постоянные интегрирования. Вид функций v_3, u_3 зависит от численного значения величины θ^2:

$$\begin{gathered} v_3=g\cos\theta x-h\sin\theta x,\ u_3=g\sin\theta x+h\cos\theta x\quad (\theta^2>0,\ \xi=\theta) \\ v_3\approx g(1-{}^1/{}_2\theta^2x^2)-hx(1-{}^1/{}_6\theta^2x^2) \\ u_3\approx g\theta^2x+h(1-{}^1/{}_2\theta^2x^2)\quad (\theta^2\approx 0,\ \xi=1) \\ v_3=g\operatorname{ch}\theta_*x+h\operatorname{sh}\theta_*x,\ u_3=g\operatorname{sh}\theta_*x+h\operatorname{ch}\theta_*x \\ (\theta_*^2=-\theta^2>0,\ \xi=-\theta_*) \end{gathered} \tag{1.7}$$

О применимости приближенного решения (1.5) следует судить по величине невязок $r_v, \ldots, r_T$, которые возникают при его подстановке в уравнения (1.4). Значения этих невязок приведены ниже.

Рассмотрим плоские колебания плоского криволинейного стержня, радиус кривизны, поперечное сечение, плотность и модуль упругости которого зависят от дуговой координаты. Используем формулы (1.5) и соотношения, подобные (1.6), (1.7), для перехода от переменных (1.3) к новым переменным $a(x)$, $b(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Преимущество этих переменных состоит в том, что их полное изменение по длине стержня существенно меньше, чем изменение переменных (1.3).

Для стержня с переменными параметрами составляющие векторов V и U выберем равными

$$v_1=a\sin \mathrm{K}+b\cos \mathrm{K},\ u_1=a\cos-b\sin \mathrm{K} \tag{1.8}$$

$$v_2=P+Q,\ u_2=-P+Q,\ P=pe^{-\Lambda_x},\ Q=q\exp(\Lambda_x-\Lambda_l)$$

$$\mathrm{K}(x)=\langle\varkappa\rangle_0{}^x+\varphi,\qquad \Lambda_x\equiv\Lambda(x)=\langle\lambda\rangle_0{}^x\equiv\int\limits_0^x\lambda(\zeta)\,d\zeta\qquad(\varphi=\mathrm{const})$$

$$v_3=g\cos\Theta-h\sin\Theta,\ u_3=g\sin\Theta+h\cos\Theta$$
$$\Theta(x)=\langle\Theta\rangle_0{}^x+\varphi_\theta\,(\varphi_\theta=\mathrm{const})\quad(\mathrm{Re}\,\theta^2>0,\ \xi=\theta)$$

$$v_3=g(x),\ u_3=g(x)\Theta^{(2)}+h(x),\ \Theta^{(2)}=\langle\theta^2\rangle_0{}^x\ (\mathrm{Re}\,\theta^2\approx0,\ \xi=1) \tag{1.9}$$

$$v_3=g\,\mathrm{ch}\,\Theta_*+h\,\mathrm{sh}\,\Theta_*,\ u_3=g\,\mathrm{sh}\,\Theta_*+h\,\mathrm{ch}\,\Theta_*$$
$$\Theta_*(x)=\langle\theta_*\rangle_0{}^x+\varphi_\theta\quad(\varphi_\theta=\mathrm{const})\quad(\mathrm{Re}\,\theta_*{}^2>0,\ \theta_*{}^2=-\theta^2,\ \xi=-\theta_*)$$

В некоторых случаях при $\mathrm{Re}\,\theta^2\approx0$ предпочтительнее использовать более сложные выражения

$$v_3=g(1-\langle\Theta^{(2)}\rangle_0{}^x)-h(x-\langle\!\langle\zeta\theta^2\rangle_0{}^x\rangle_0{}^x),\ u_3=g\Theta^{(2)}+h(1-\langle\zeta\theta^2\rangle_0{}^x)$$

Элементы матриц Ψ_v и Ψ_u будем определять прежними формулами, в которых координата x будет входить в качестве параметра.

Учитывая, что при вычислениях проще иметь дело с суммами, а не с интегралами, заменим данный стержень ступенчатым стержнем, состоящим из достаточно большого числа n участков, в пределах которых параметры стержня постоянны. Внешнюю нагрузку аппроксимируем системой сосредоточенных сил, приложенных на стыках участков. Ясно, что получаемая при этом погрешность окажется малой, если число участков ступенчатого стержня будет достаточно велико. Для того, чтобы найти функции $a(x),\ \ldots,\ h(x)$, следует составить уравнения, описывающие их изменения в пределах каждого участка, а также составить условия сопряжения участков.

2. Исследование одного из участков ступенчатого стержня. Для участка, где параметры стержня постоянны и отсутствует нагрузка, решение (1.5) при постоянных значениях коэффициентов $a,\ \ldots,\ h$ является приближенным. Найдем, каким уравнениям должны подчиняться эти коэффициенты для того, чтобы в пределах указанного участка соотношения (1.5) удовлетворяли уравнениям (1.4) точно. Для краткости номер участка $s=1,\ldots,n$ будем в начале п. 2 опускать.

Подставляя выражения (1.5), где функции $v_1,\ \ldots,\ u_3$ определяются соотношениями (1.8), (1.9), в уравнения (1.4), при $f_N,\ f_T=0$ получим

$$v_j{}^\vee=z_{vj},\ u_j{}^\vee=z_{uj}\quad(j=1,\ 2,\ 3) \tag{2.1}$$

$$z_{v1}=\frac{1}{D_v}\left[\left(\eta_{M3}+\frac{\eta_{M2}}{\xi\rho}\right)r_T-\left(\eta_T-\frac{\tau}{\xi\rho}\right)r_M-(\eta_{M2}\eta_T+\tau\eta_{M3})r_v\right]$$

$$z_{v2}=\frac{1}{D_v}\left[\left(-\eta_{M3}+\frac{\eta_{M1}}{\xi\rho}\right)r_T+\left(\eta_T+\frac{\tau}{\xi\rho}\right)r_M-(\eta_{M1}\eta_T+\tau\eta_{M3})r_v\right]$$

$$z_{v3}=\frac{1}{D_v}(-2c_v\lambda_0^2r_T-2\tau r_M+c_v\tau\rho^{-2}r_v)$$

$$z_{u1}\approx-\frac{\lambda}{D_u}\left(1-\frac{1}{\lambda^2\rho^2}\right)r_N,\qquad z_{u2}\approx\frac{\varkappa}{D_u}\left(1+\frac{1}{\varkappa^2\rho^2}\right)r_N$$

$$z_{u3}=\frac{2r_N}{\rho D_u}\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)^{-1/2},\qquad \varepsilon=\frac{1}{\lambda_0^2\rho^2}$$

$$D_v=\det\Psi_v=-2c_v\lambda_0^2\eta_T(1+5\varepsilon^2) \tag{2.2}$$

$$D_u=\det\Psi_u=-2c_v\lambda_0^4[1-\varepsilon^2(^{21}/_4-\theta^2\rho^2)](1-{}^9/_4\varepsilon^2)^{-1/2}$$

$$r_w=r_{w1}+r_{w2}+r_{w3}\ (w=v,M,T,N)$$

$$r_{v1}=r_{v2}=r_{M1}=r_{M2}=0,\ r_{v3}=r_{M3}=0 \text{ при } \theta^2\not\approx0$$

$$r_{v3}=-u_3/\rho,\ r_{M3}=-\eta_3u_3 \text{ при } \theta^2\approx0$$

$$r_{Tj}=\frac{c_v\lambda_0}{\rho^3}\left[1+(-1)^j\frac{3\varepsilon}{4}-2\nu\lambda_0^4\rho^4\right]\left[1-(-1)^j\frac{3\varepsilon}{2}\right]^{-1/2}u_j\quad (j=1,2)$$

$$r_{T3}=\frac{\eta_{N3}u_3}{\rho}\text{ при }\theta^2\not\approx0,\qquad r_{T3}=\left(\frac{\eta_{N3}}{\rho}-\omega^2\mu\right)u_3\text{ при }\theta^2\approx0$$

$$r_{Nj}={}^3/_4c_vv_j\rho^{-4},\ r_{N3}=\theta^2\eta_{M3}v_3\quad (j=1,2)$$

где $(\ldots)\check{}$ означает производную по x, вычисляемую посредством функций $a,\ldots,h$; D_v, D_u — определители.

Нетрудно убедиться, что при $\theta^2\not\approx0$ величины $z_{v1},\ldots,z_{u3}$ будут малы при $|\lambda_0\rho|^4\geqslant10$. При $|\lambda_0\rho|\geqslant5$ ими можно пренебречь и, следовательно, считать коэффициенты $a,\ldots,h$ постоянными в пределах данного участка.

Разрешая уравнения (2.1) относительно $a',\ldots,h'$ и интегрируя полученные таким образом уравнения, для s-го участка стержня найдем

$$\Delta a_s(x)=\langle z_{v1}\sin\mathrm{K}+z_{u1}\cos\mathrm{K}\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

$$\Delta b_s(x)=\langle z_{v1}\cos\mathrm{K}-z_{u1}\sin\mathrm{K}\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

$$\Delta' P_s(x)={}^1/_2\langle(z_{v2}-z_{u2})\exp(\Lambda_\zeta-\Lambda_x)\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

$$\Delta' Q_s(x)={}^1/_2\langle(z_{v2}+z_{u2})\exp(\Lambda_x-\Lambda_\zeta)\rangle_{x}^{x_s} \tag{2.3}$$

при $\operatorname{Re}\theta^2>0$

$$\Delta g_s(x)=\langle z_{v3}\cos\Theta+z_{u3}\sin\Theta\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

$$\Delta h_s(x)=\langle -z_{v3}\sin\Theta+z_{u3}\cos\Theta\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

при $\operatorname{Re}\theta^2\approx0$

$$\Delta g_s(x)=\langle z_{v3}\rangle_{x_{s-1}}^{x},\qquad \Delta h_s(x)=\langle z_{u3}-z_{v3}\Theta^{(2)}\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

при $\operatorname{Re}\theta^2<0$

$$\Delta g_s(x)=\langle z_{v3}\operatorname{ch}\Theta_*+z_{u3}\operatorname{sh}\Theta_*\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

$$\Delta h_s(x)=\langle -z_{v3}\operatorname{sh}\Theta_*+z_{u3}\operatorname{ch}\Theta_*\rangle_{x_{s-1}}^{x}$$

$$\Delta' P_s = \exp(-\Lambda_x)\Delta p_s,\ \Delta' Q_s = \exp(\Lambda_x - \Lambda_l)\Delta q_s$$

$$\Delta q_s(x) = q(x_s) - q(x),\ \Delta c_s(x) = c(x) - c(x_{s-1})\quad (c = a,\ b,\ p,\ g,\ h)$$

Величины $\Delta' P_s$, $\Delta' Q_s$ введены вместо Δp_s, Δq_s для удобства вычислений. Соотношения (2.2) являются интегральными уравнениями, ибо содержат справа неизвестные $a, \ldots, h$.

3. Сопряжение двух участков стержня. Пусть x^* — координата сечения, где параметры стержня изменяются скачком и (или) приложена сосредоточенная нагрузка (для краткости номер сечения $s=1, \ldots, n-1$ в п. 3 опускаем). С учетом сделанных ранее предположений условия сопряжения двух участков в сечении $x = x^*$ будут иметь вид

$$Y_v^+ = Y_v^- + F_v^*,\ Y_u^+ = Y_u^- + F_u^* \tag{3.1}$$

Здесь $W^\pm = W(x^\pm)$ $(x^\pm = x \pm 0)$, $F_v^* = \{0,\ 0,\ -f_T^*\}$, $F_u^* = \{0,\ -f_N^*,\ 0\}$ — векторы сосредоточенных нагрузок.

Подставив в соотношения (3.1) выражения (1.5) и обозначая $\Delta^* W = W^+ - W^-$, после несложных преобразований получим

$$\Psi_v^+ \Delta^* V = -\Delta^* \Psi_v V^- + F_v^*,\ \Psi_u^+ \Delta^* U = -\Delta^* \Psi_u U^- + F_u^*$$

или

$$\Delta^* v_j = -\sum_k \beta_{jk} v_k^- + f_{vj}^*,\qquad \Delta^* u_j = -\sum_k \gamma_{jk} u_k^- + f_{uj}^* \tag{3.2}$$

$$\beta_{jk} = D_{vj}^+(\Delta^* \psi_{vk})/D_v^+,\ \gamma_{jk} = D_{uj}^+(\Delta^* \psi_{uk})/D_u^+,\ f_{wj}^* = D_{wj}^+(F_w^*)/D_w^+$$

$$D_{w1}^+(B) = |B,\ \psi_{w2}^+,\ \psi_{w3}^+|,\ D_{w2}^+(B) = |\psi_{w1}^+,\ B,\ \psi_{w3}|,\ D_{w3}^+ = |\omega_{w1}^+,\ \psi_{w2}^+,\ B| \tag{3.3}$$

$$(j,\ k = 1,\ 2,\ 3;\ w = v,\ u)$$

где $D_w^+ = D_w(x^+)$ — определители (2.2), в определителях (3.3) ψ_{wj}^+ — столбцы матрицы Ψ_w^+.

Разрешив уравнения (3.2) относительно приращений $\Delta^* a, \ldots, \Delta^* h$, будем иметь

$$\begin{gathered}
\Delta^* a = -{}^1/_2(\beta_1+\gamma_1)a^- + {}^1/_2(\beta_1-\gamma_1)(a^- \cos 2K^* - b^- \sin 2K^*) - \\
-(\beta_{12}v_2^- + \beta_{13}v_3^- - f_{v1}^*)\sin K^* - (\gamma_{12}u_2^- + \gamma_{13}u_3^- - f_{u1}^*)\cos K^* \\
\Delta^* b = -{}^1/_2(\beta_1+\gamma_1)b^- - {}^1/_2(\beta_1-\gamma_1)(a^- \sin 2K^* + b^- \cos 2K^*) - \\
-(\beta_{12}v_2^- + \beta_{13}v_3^- - f_{v1}^*)\cos K^* + (\gamma_{12}u_2^- + \gamma_{13}u_3^- - f_{u1}^*)\sin K^* \\
\Delta^* p = {}^1/_2\{-(\beta_2+\gamma_2)p^- + [-\beta_{21}v_1^- + \gamma_{21}u_1^- - (\beta_2-\gamma_2)Q^- - \\
-\beta_{23}v_3^- + \gamma_{23}u_3 + f_{v2}^* - f_{u2}^*]\exp \Lambda^*\} \\
\Delta^* q = {}^1/_2\{-(\beta_2+\gamma_2)q^- - [\beta_{21}v_1^- + \gamma_{21}u_1^- + (\beta_2-\gamma_2)P^- + \\
+\beta_{23}v_3 + \gamma_{23}u_3^- - f_{v2}^* - f_{u2}^*]\exp(\Lambda_l - \Lambda^*)\}
\end{gathered} \tag{3.4}$$

при $\operatorname{Re}\theta^2 > 0$

$$\begin{gathered}
\Delta^* g = -{}^1/_2(\beta_3+\gamma_3)g^- - {}^1/_2(\beta_3-\gamma_3)(g^- \cos 2\Theta^* - h^- \sin 2\Theta^*) - \\
-(\beta_{31}v_1^- + \beta_{32}v_2^- - f_{v3}^*)\cos\Theta^* - (\gamma_{31}u_1^- + \gamma_{32}u_2^- - f_{u3}^*)\sin\Theta^* \\
\Delta^* h = -{}^1/_2(\beta_3+\gamma_3)h^- + {}^1/_2(\beta_3-\gamma_3)(g^- \sin 2\Theta^* + h^- \cos 2\Theta^*) + \\
+(\beta_{31}v_1^- + \beta_{32}v_2^- - f_{v3}^*)\sin\Theta^* - (\gamma_{31}u_1^- + \gamma_{32}u_2^- - f_{u3}^*)\cos\Theta^*
\end{gathered} \tag{3.5}$$

при $\operatorname{Re}\theta^2\approx 0$

$$\Delta^* g=-\beta_3 g^- -\beta_{31}v_1^- -\beta_{32}v_2^- +f_{v3}^*,\quad \Delta^* h=(\beta_3-\gamma_3)g^-\Theta^{(2)*}- \\ -\gamma_3 h^- +(\beta_{31}v_1^- +\beta_{32}v_2^- -f_{v3}^*)\Theta^{(2)*}-\gamma_{31}u_1^- -\gamma_{32}u_2^- +f_{u3}^* \tag{3.6}$$

при $\operatorname{Re}\theta_*^2>0$

$$\Delta^* g=-\beta_3 g^- -(\beta_3-\gamma_3)\operatorname{sh}\Theta_*^*(g^-\operatorname{sh}\Theta_*^*+h^-\operatorname{ch}\Theta_*^*)- \\ -(\beta_{31}v_1^- +\beta_{32}v_2^- -f_{v3}^*)\operatorname{ch}\Theta_*^*+(\gamma_{31}u_1^- -\gamma_{32}u_2^- -f_{u3}^*)\operatorname{sh}\Theta_*^* \\ \Delta^* h=-\gamma_3 h^- +(\beta_3-\gamma_3)\operatorname{sh}\Theta_*^*(g^-\operatorname{ch}\Theta_*^*+h^-\operatorname{sh}\Theta_*^*)+ \\ +(\beta_{31}v_1^- +\rho_{32}v_2^- -f_{v3}^*)\operatorname{sh}\Theta_*^*-(\gamma_{31}u_1^- +\gamma_{32}u_2^- -f_{u3}^*)\operatorname{ch}\Theta^*_* \tag{3.7}$$

В приведенных уравнениях $\Gamma^*=\Gamma(x^*)$ $(\Gamma=\mathrm{K},\ \Lambda,\ \Theta,\ldots)$, $\beta_j=\beta_{jj}$, $\gamma_j=\gamma_{jj}$.

Структура уравнений (3.4)–(3.7) указывает на замену переменных, позволяющую выделить асимптотические части функции a, b и g, h (при $\operatorname{Re}\theta^2>0$). Именно это обстоятельство объясняет особенность излагаемого здесь метода, состоящую в том, что его точность возрастает вместе с номером исследуемого главного колебания.

Введем ступенчатые функции $\eta_j(x)$, определяемые разностными уравнениями $\Delta^*\eta_j=\mu_j\eta_j^+$ или

$$\Delta^*\eta_j=\mu_j\eta_j^-/(1-\mu_j)\qquad (j=1,2,3) \tag{3.8}$$

где для уравнений (3.4), (3.5) $\mu_j={}^1/_2(\beta_j+\gamma_j)$. Умножим указанные уравнения соответственно на η_1^+, η_2^+ и η_3^+. Заметив, что из соотношения

$$\Delta^*(\alpha\beta)=\alpha^+\Delta^*\beta+\beta^-\Delta^*\alpha \tag{3.9}$$

следует

$$\eta_j^+\Delta^* c+\mu_j\eta_j^+c^-=\eta_j^+\Delta^* c+c^-\Delta^*\eta_j=\Delta^*(\eta_j c)\qquad (c=a,\ b,\ p,\ldots)$$

и делая замену переменных $a_\eta=\eta_1 a,\ldots,h_\eta=\eta_3 h$, получим

$$\Delta^* c_\eta=\Delta^* c_\eta^{(0)}+\Delta^* c_\eta^{(f)}\qquad (c=a,\ b,\ P,\ Q,\ q,\ h) \tag{3.10}$$

$$\Delta^* a_\eta^{(f)}=\eta_1^+(f_{v1}^*\sin\mathrm{K}^*+f_{u1}^*\cos\mathrm{K}^*),\qquad \Delta^* b_\eta^{(f)}=\eta_1^+(f_{v1}^*\cos\mathrm{K}^*-f_{u1}^*\sin\mathrm{K}^*)$$

$$\Delta^* P_\eta^{(f)}={}^1/_2\eta_2^+(f_{v2}^*-f_{u2}^*),\qquad \Delta^* Q_\eta^{(f)}={}^1/_2\eta_2^+(f_{v2}^*+f_{u2}^*)$$

$$\Delta^* a_\eta^{(0)}={}^1/_2\alpha_1(\beta_1-\gamma_1)(a_\eta^-\cos 2\mathrm{K}^*-b_\eta^-\sin 2\mathrm{K}^*)- \\ -(\beta_{12}^\alpha v_{2\eta}^- +\beta_{13}^\alpha v_{3\eta}^-)\sin\mathrm{K}^*-(\gamma_{12}^\alpha u_{2\eta}^- +\gamma_{13}u_{3\eta}^-)\cos\mathrm{K}^*$$

$$\Delta^* b_\eta^{(0)}=-{}^1/_2\alpha_1(\beta_1-\gamma_1)(a_\eta^-\sin 2\mathrm{K}^*+b_\eta^-\cos 2\mathrm{K}^*)- \\ -(\beta_{12}^\alpha v_{2\eta}^- +\beta_{13}^\alpha v_{3\eta}^-)\cos\mathrm{K}^*+(\gamma_{12}^\alpha u_{2\eta}^- +\gamma_{13}^\alpha u_{3\eta})\sin\mathrm{K}^*$$

$$\Delta^* P_\eta^{(0)}={}^1/_2[-\beta_{21}^\alpha v_{1\eta}^- +\gamma_{21}^\alpha u_{1\eta}^- -\alpha_2(\beta_2-\gamma_2)Q_\eta^- +\beta_{23}^\alpha v_{3\eta}^- +\gamma_{23}^\alpha u_{3\eta}^-]$$

$$\Delta^* Q_\eta^{(0)}=-{}^1/_2[\beta_{21}^\alpha v_{1\eta}^- +\gamma_{21}^\alpha u_{1\eta}^- +\alpha_2(\beta_2-\gamma_2)P_\eta^- +\beta_{23}^\alpha v_{3\eta}^- +\gamma_{23}^\alpha u_{3\eta}^-]$$

при $\operatorname{Re}\theta^2>0$

$$\Delta^* g_\eta^{(f)}=\eta_3^+(f_{v3}^*\cos\Theta^*+f_{u3}^*\sin\Theta^*),\qquad \Delta^* h_\eta^{(f)}=\eta_3^+(-f_{v3}^*\sin\Theta^*+f_{u3}^*\cos\Theta^*)$$

$$\Delta^* g_\eta^{(0)}={}^1/_2\alpha_3(\beta_3-\gamma_3)(-g_\eta^-\cos 2\Theta^*+h_\eta^-\sin 2\Theta^*)- \\ -(\beta_{31}^\alpha v_{1\eta}^- +\beta_{32}^\alpha v_{2\eta}^-)\cos\Theta^*-(\gamma_{31}^\alpha u_{1\eta}^- +\gamma_{32}^\alpha u_{2\eta}^-)\sin\Theta^*$$

$$\Delta^* h_\eta^{(0)} = {}^1/_2\alpha_3(\beta_3-\gamma_3)(g_\eta^- \sin 2\Theta^* + h_\eta^- \cos 2\Theta^*) +$$
$$+(\beta_{31}{}^\alpha v_{1\eta}^- + \beta_{32}{}^\alpha v_{2\eta}^-)\sin\Theta^* - (\gamma_{31}{}^\alpha u_{1\eta}^- + \gamma_{32}{}^\alpha u_{2\eta})\cos\Theta^*$$
$$\alpha_{jk}=\eta_j^+/\eta_k^-, \quad \alpha_{jj}=\alpha_j, \quad \beta_{jk}{}^\alpha=\alpha_{jk}\beta_{jk}, \quad \gamma_{jk}{}^\alpha=\alpha_{jk}\gamma_{jk}$$

Функции $P_\eta=p_\eta \exp(-\Lambda^*)$, $Q_\eta=q_\eta \exp(\Lambda^*-\Lambda_l)$ введены вместо p_η, q_η для удобства вычислений.

Переходя к уравнениям (3.6), (3.7), заметим, что при $|\lambda_0\rho|^4\geqslant 10$ параметр $\gamma_3\ll\beta_3$. Поэтому, если $\operatorname{Re}\theta^2\leqslant 0$, имеет смысл преобразовывать только уравнение для $\Delta^* g$.

Введем функцию $\eta_3(x)$, определяемую соотношением (3.8) при $\mu_3=\beta_3$. Умножая первые уравнения систем (3.6), (3.7) на η_3^+ и используя разложение (3.10), получим

при $\operatorname{Re}\theta^2\approx 0$

$$\Delta^* g_\eta^{(f)} = \eta_3^+ f_{v3}^*, \qquad \Delta^* h^{(f)} = -f_{v3}^*\Theta^{(2)*} + f_{u3}^*$$
$$\Delta^* g_\eta^{(0)} = -\beta_{31}{}^\alpha v_{1\eta}^- - \beta_{32}{}^\alpha v_{2\eta}^-, \qquad \Delta^* h^{(0)} = (\beta_3-\gamma_3) g^-\Theta^{(2)*} -$$
$$-\gamma_3 h^- + (\beta_{31} v_1^- + \beta_{32} v_2^-)\Theta^{(2)*} - \gamma_{31} u_1^- - \gamma_{32} u_2^-$$

при $\operatorname{Re}\theta_*^2 > 0$

$$\Delta^* g_\eta^{(f)} = \eta_3^+(f_{v3}^* \operatorname{ch}\Theta_*^* - f_{u3}^* \operatorname{sh}\Theta_*^*), \qquad \Delta^* h^{(f)} = -f_{v3}\operatorname{sh}\Theta_*^* + f_{u3}\operatorname{ch}\Theta_*^*$$
$$\Delta^* g_\eta^{(0)} = -\alpha_3(\beta_3-\gamma_3)\operatorname{sh}\Theta_*^*(g_\eta^-\operatorname{sh}\Theta_*^* + h_\eta^-\operatorname{ch}\Theta_*^*) -$$
$$-(\beta_{31}{}^\alpha v_{1\eta}^- + \beta_{32}{}^\alpha v_{2\eta}^-)\operatorname{ch}\Theta_*^* + (\gamma_{31}{}^\alpha u_{1\eta}^- + \gamma_{32}{}^\alpha u_{2\eta})\operatorname{sh}\Theta_*^*$$
$$\Delta^* h^{(0)} = -\gamma_3 h^- + (\beta_3-\gamma_3)\operatorname{sh}\Theta_*^*(g^-\operatorname{ch}\Theta_*^* + h^-\operatorname{sh}\Theta_*^*) +$$
$$+(\beta_{31} v_1^- + \beta_{32} v_2^-)\operatorname{sh}\Theta_*^* - (\gamma_{31} u_1^- + \gamma_{32} u_2^-)\operatorname{ch}\Theta_*^*$$

4. Приближенное решение уравнений для мало изменяющихся переменных. Найдем выражение для функций a, b, P, Q, g, h на s-м участке ступенчатого стержня. Сначала определим функции $a_\eta, \ldots, h_\eta$. Суммируя приращения (2.3), (3.10), вычисленные на участках, предшествующих данному, найдем

$$c_\eta(x) = c_\eta^{(0)}(x) + c_\eta^{(f)}(x) \qquad (c=a, \ldots, h) \tag{4.1}$$

$$c_\eta^{(f)}(x) = \sum_{\sigma=1}^{s-1} \Delta^* c_{\eta\sigma}^{(f)} \qquad (c=a, b, P, g, h), \qquad Q_\eta^{(f)}(x) = -\sum_{\sigma=s}^{n-1} \Delta^* Q_{\eta\sigma}^{(f)}$$

$$c_\eta^{(0)}(x) = c_\eta^0 + S_c(x, A_\eta), \quad A_\eta = \{a_\eta, \ldots, h_\eta\} \tag{4.2}$$
$$c_\eta^\circ = c_\eta(0) \quad (c=a, b, g, h), \quad P_\eta^\circ = P(0)e^{-\Lambda_x}, \quad Q_\eta^\circ = Q_\eta(l)\exp(\Lambda_x - \Lambda_l)$$

$$S_c(x, A_\eta) = \Delta c_{\eta s}(x) + \sum_{\sigma=1}^{s-1}[\Delta c_{\eta\sigma}(x_\sigma^*) + \Delta^* c_{\eta\sigma}] \qquad (c=a, b, g, h)$$

$$S_P(x, A_\eta) = \Delta' P_{\eta s}(x) + \sum_{\sigma=1}^{s-1}[\Delta' P_{\eta\sigma}(x_\sigma^*) + \Delta^* P_{\eta\sigma}]\exp(\Lambda_\sigma - \Lambda_x)$$

$$S_Q(x, A_\eta) = -\Delta' Q_{\eta s}(x) - \sum_{\sigma=s}^{n-1}[\Delta'(Q_{n\sigma+1}(x_{\sigma+1}^*) + \Delta^* Q_{\eta\sigma}]\exp(\Lambda_x - \Lambda_\sigma)$$

Здесь $x \in (x^*_{s-1},\ x_s^*)$, $\Lambda_\sigma = \Lambda(x_\sigma)$. Кроме того, учитывая, что при $x \in (x^*_{s-1}, x_s^*)$ $\eta_j(x) = \text{const}$, обозначено $c_\eta = \eta_j c$, $\Delta c_{\eta\sigma} = \eta_j \Delta c_\sigma$.

Если параметры стержня достаточно мало изменяются по его длине, то этого же следует ожидать и от функций $a_\eta^{(0)}, b_\eta^{(0)}, p_\eta^{(0)}, q_\eta^{(0)}, g_\eta^{(0)}, h_\eta^{(0)}$. Это обстоятельство делает уравнения (4.1) удобными для приближенного решения. Хорошие результаты можно получить, используя метод последовательных приближений (ср. [5, 7, 8]). Запишем уравнения (4.2) в следующем виде:

$$\frac{c_\eta^{(0)}(x)}{d} = \frac{c_\eta^0}{d} + S_c\left(x, \frac{A_\eta}{d}\right), \quad S_c\left(x; \frac{A_\eta}{d}\right) = \frac{1}{d} S_c(x; A_\eta) \qquad (4.3)$$

Здесь $d = a_\eta^\circ$ при $c = a$, b, P, Q и $d = g_\eta^\circ$ при $c = g$, h. Предполагается, что фазы φ и φ_θ выбраны так, что $|a_\eta(0)| \gg |b_\eta(0)|$, и при $\operatorname{Re}\theta^2 > 0$ величина $|g_\eta(0)| \gg |h_\eta(0)|$.

В нулевом приближении отбросим вторые слагаемые в правых частях уравнений (4.3). В результате получим $c_{\eta 0}^{(0)}(x) = c_{\eta 0}^\circ$ $(c = a, b, P, Q, g, h)$.

Постоянные $a_{\eta 0}^\circ$, $b_{\eta 0}^\circ$, $P_{\eta 0}(0)$, $Q_{\eta 0}(l)$, $g_{\eta 0}^\circ$, $h_{\eta 0}^\circ$ определяются из системы уравнений, выражающих граничные условия. При исследовании свободных колебаний, приравнивая определитель этой системы нулю, получим уравнение для вычисления собственных частот колебаний в нулевом приближении.

Первые приближения для искомых величин получим, вычислив содержащиеся в уравнениях (4.3) суммы S_c в нулевом приближении

$$c_{\eta 1}^{(0)}(x) = c_{\eta 1}^0 + d_1 S_c\left(x, \frac{A_{\eta 0}}{d_0}\right), \qquad A = \{a_{\eta 0}^0, \ldots, h_{\eta 0}^0\}$$

Определив приближенные значения функции $c_\eta(x)$, по формуле $c(x) = c_\eta(x)/\eta_j(x)$ вычислим функции a, b, P, Q, g, h, а затем с помощью соотношений (1.5), (1.8), (1.9) найдем v, L, M, N, u, T.

Приведенный способ построения первого приближения несколько отличается от изложенного в [8], но оба способа приводят к близким конечным результатам. Построение второго приближения, как правило, связано со сложными вычислениями. Поэтому, если первое приближение не обеспечивает необходимой точности, предпочтительнее несколько видоизменить данный метод, а именно применять его в сочетании с методом матриц переноса. Однако следует отметить, что в большинстве случаев (исключение составляют стержни, параметры которых сильно изменяются по их длине, и незамкнутые кольца, длина которых существенно превышает их радиус) первое приближение обеспечивает достаточную точность даже для основной частоты.

Как и в более простых случаях, рассмотренных в [7, 8], с ростом номера главного колебания точность метода увеличивается. Не приводя здесь численных результатов, заметим, что при расчете данным методом свободных колебаний криволинейных стержней в нулевом и первом приближениях получается точность того же порядка, какая была отмечена в [7, 8].

Соотношения, следующие из граничных условий, приобретают особенно простой вид для стержня с подвижными (в направлении касательной) шарнирными опорами [8], а также для замкнутого симметричного кольца. В последнем случае для одной из половин кольца в силу симметри имеют место следующие шесть граничных условий (l – длина половины кольца)

$$L(0) = L(l) = 0, \quad N(0) = N(l) = 0, \quad u(0) = u(l) = 0$$

Отсюда с учетом соотношений (1.5) найдем $\Psi_u(0)U(0) = 0$; $\Psi_u(l)U(l) = 0$. Так как $\det \Psi_u(x) \neq 0$, полученные однородные системы имеют нулевые решения $u_j(0) = u_j(l) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. Последняя система легко решается, а при исследовании свободных колебаний дает простые частотные уравнения.

Поступила 4 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Waltking F. W.* Schwingungszahlen und Swingungsformen von Kreisbogenträgern. Ingr-Arch., 1934, Bd 5, H 6, S. 429–449.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.
3. *Бидерман В. Л.* Некоторые вычислительные методы решения задач строительной механики, приводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 17. М., «Машиностроение», 1976.
4. *Гогенемзер К., Прагер В.* Динамика сооружения. М.– Л., ОНТИ, 1936.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
6. *Коул Дж.* Методы возмущения в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
7. *Миронов М. В.* О расчете свободных колебаний стержней переменного сечения методом меняющихся параметров. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
8. *Миронов М. В.* Применение метода медленно меняющихся параметров для приближенного расчета поперечных колебаний стержней. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
9. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959.