МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1978

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМУМА В ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

А. П. СЕЙРАНЯН

(Москва)

Задачи об осесимметричных колебаниях оптимальных круглых пластинок заданного объема были рассмотрены в [1]. Критерием оптимальности пластинки считался максимум частоты первого тона собственных колебаний, а варьируемой функцией служила толщина пластинки. В этой работе с использованием вариационного принципа Рэлея было получено необходимое условие экстремума (условие стационарности), затем для трех видов граничных условий с помощью итерационных процедур вычислены экстремальные решения.

В [2] исследовалась задача о свободно опертой круглой пластинке минимального объема при ограничениях на частоту поперечных собственных колебаний первого тона и величину среднего прогиба при действии изгибающей нагрузки. При отсутствии изгибающей нагрузки эта задача аналогична описанной выше, поскольку условия стационарности в этих задачах совпадают, и решение одной может быть получено из решения другой простым пересчетом [2]. В работе [2] приведены численные решения, полученные с применением градиентного метода в пространстве варьируемых функций. Результаты численных расчетов в [1, 2] хорошо согласуются между собой.

В [3, 4] рассматривались задачи о круглых пластинках заданного веса, обладающих максимальной и минимальной собственной частотой колебаний первого тона. В отличие от [1, 2] толщина пластинки h здесь предполагалась ограниченной снизу и сверху положительными константами. В [3] высказывается мнение о невозможности решения задачи без ограничений на толщину, в связи с этим решения, полученные в [1], подвергаются в [3] критике и сомнению.

В предлагаемой работе исследуется характер экстремума в задаче о свободно опертой круглой пластинке минимального объема при заданной частоте осесимметричных поперечных собственных колебаний первого тона. На основе анализа условия стационарности, условия Лежандра и функции Гамильтона делается вывод о том, что экстремали, полученные в [1, 2], соответствуют слабому минимуму функционала объема, а при наложении дополнительных ограничений – сильному минимуму.

1. Уравнение осесимметричных поперечных собственных колебаний круглой пластинки переменной толщины запишем в безразмерных переменных [1, 2]:

$$L_h w = \omega^2 h(r) w(r) r, \quad r \in (0, 1) \tag{1.1}$$

где L_h – линейный дифференциальный оператор четвертого порядка; ω – частота собственных колебаний; $h(r)$, $w(r)$ – толщина и амплитуда колебаний пластинки соответственно.

Объем пластинки выражается соотношением

$$v = \int_0^1 h(r) r\, dr \tag{1.2}$$

Считая частоту собственных колебаний первого тона заданным числом $\omega = \omega_0 > 0$, сформулируем оптимальную задачу: требуется найти функции

$h_0(r)$, $w_0(r)$, удовлетворяющие уравнению (1.1) и граничным условиям свободного опирания, так что функционал объема (1.2) принимает минимальное значение.

2. Для удобства дальнейших рассуждений и выкладок поставленную задачу сформулируем в терминах теории оптимального управления [6]. Для этого введем новые переменные

$$y(r)=w(r),\ \varphi(r)=w'(r),\ M(r)=-h^3(w''+\nu w'/r)r$$
$$Q(r)=[h^3(w''+w'/r)'+(h^3)'(w''+\nu w'/r)]r$$

Переменные $M(r)$ и $Q(r)$ с точностью до множителя r представляют собой радиальный изгибающий момент M_r и перерезывающую силу Q_r, записанные в безразмерных переменных, т. е. $M(r)=M_r r$, $Q(r)=Q_r r$ [5].

В новых переменных исходная краевая задача преобразуется к системе дифференциальных уравнений первого порядка и граничным условиям вида

$$\frac{dy}{dr}=\varphi,\qquad \frac{d\varphi}{dr}=-\frac{M}{rh^3}-\frac{\nu\varphi}{r},\qquad y(1)=0,\qquad \varphi(0)=0 \tag{2.1}$$
$$\frac{dM}{dr}=\frac{\nu M}{r}-(1-\nu^2)\frac{\varphi h^3}{r}-Q$$
$$\frac{dQ}{dr}=\omega^2 hyr,\qquad M(1)=0,\qquad Q(0)=0$$

Функции $y(r)$, $\varphi(r)$, $M(r)$, $Q(r)$ являются функциями состояния, а функция толщины пластинки $h(r)$ – управлением. Наложим на него ограничение

$$h(r)\geqslant 0,\ r\in[0,1] \tag{2.2}$$

Задача состоит в отыскании кусочно-непрерывной функции управления $h_0(r)$ и непрерывных функций состояния $y_0(r)$, $\varphi_0(r)$, $M_0(r)$, $Q_0(r)$, удовлетворяющих (2.1), (2.2) при фиксированном значении $\omega=\omega_0>0$, так что функционал (1.2) принимает минимальное значение.

Введем сопряженные переменные p_1, p_2, p_3, p_4 и составим гамильтониан системы [6]:

$$H=-hr+p_1\varphi-p_2\left(\frac{M}{rh^3}+\frac{\nu\varphi}{r}\right)+ \tag{2.3}$$
$$+p_3\left[\frac{\nu M}{r}-(1-\nu^2)\frac{\varphi h^3}{r}-Q\right]+p_4\omega^2 hyr$$

Предположим, что оптимальное управление $h_0(r)$ отлично от нуля при $r\in(0,1)$. Необходимым условием оптимальности $h_0(r)$ в этом случае является стационарность гамильтониана (2.3) по управлению и существование нетривиальных сопряженных переменных, удовлетворяющих следующим уравнениям и условиям трансверсальности:

$$\frac{dp_1}{dr}=-\omega^2 hp_4 r,\qquad p_1(0)=0$$
$$\frac{dp_2}{dr}=\frac{\nu p_2}{r}+(1-\nu^2)\frac{p_3h^3}{r}-p_1,\qquad p_2(1)=0 \tag{2.4}$$
$$\frac{dp_3}{dr}=\frac{p_2}{rh^3}-\frac{\nu p_3}{r},\qquad \frac{dp_4}{dr}=p_3,\qquad p_3(0)=0,\qquad p_4(1)=0$$

Условие стационарности гамильтониана по управлению имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial h}=-r+\frac{3Mp_2}{rh^4}-(1-\nu^2)\frac{3\varphi p_3h^2}{r}+\omega^2p_4yr=0,\qquad r\in(0,1)$$

Сравнивая системы (2.1), (2.4), замечаем, что они совпадают с точностью до обозначений, поскольку исходная краевая задача является самосопряженной [1, 4]. Поэтому можно положить

$$p_1(r)=cQ(r),\ p_2(r)=cM(r),\ p_3(r)=-c\varphi(r),\ p_4(r)=-cy(r)\qquad(2.5)$$

где c — произвольная постоянная ($c\neq0$). С учетом (2.5) условие стационарности запишем в форме

$$\left[\frac{3M^2}{r^2h^4}+(1-\nu^2)\frac{3\varphi^2h^2}{r^2}-\omega^2y^2\right]=\frac{1}{c},\qquad r\in(0,1)\qquad(2.6)$$

Если вернуться к старым переменным, т. е. выразить M, φ, y через функцию $w(r)$ и ее производные, то придем к выражению, полученному в [1, 2]:

$$3h^2[w''^2+2\nu w''w'/r+(w'/r)^2]-\omega^2w^2=1/c\qquad(2.7)$$

Нетрудно установить, что $c>0$. Действительно, умножим обе части (2.7) на hr и проинтегрируем от нуля до единицы. В результате будем иметь [2]:

$$3(L_hw,w)-\omega^2(whr,w)=3\omega^2(whr,w)-\omega^2(whr,w)=$$

$$=2\omega^2\int_0^1 w^2hr\,dr=\frac{1}{c}\int_0^1 hr\,dr$$

Здесь скобками обозначено скалярное произведение. Поскольку $h\geqslant0$, то из последнего равенства следует $c>0$. Без ограничения общности можно положить $c=1$ вследствие того, что краевые задачи (2.1), (2.4) линейны и однородны.

Таким образом, для определения экстремалей h_0, w_0 имеем уравнения (1.1), (2.7) и граничные условия из (2.1). В [1] было исследовано поведение экстремалей в окрестности границы $r=1$ и показано, что h_0, w_0 в окрестности $r=1$ допускают представления

$$\begin{gathered}w_0(r)=a_1(1-r)+a_2(1-r)^{3/2}+a_3(1-r)^2+\dots\\ h_0(r)=b_1(1-r)^{1/2}+b_2(1-r)+\dots\end{gathered}\qquad(2.8)$$

где a_i, b_i — коэффициенты разложений.

Решение уравнений (1.1), (2.7) с граничными условиями и с учетом (2.8) осуществлялось в [1, 2] различными численными методами, при этом оказалось, что результаты расчетов хорошо согласуются между собой.

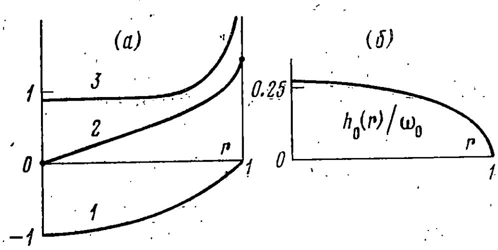
На фиг. 1, *а*, *б* представлены экстремали h_0, w_0, полученные в [1, 2]. Кривые *1*—*3* на фиг. 1, *а* соответствуют функциям $w_0(r)$, $^1/_2w_0'(r)$, $^1/_2w_0''(r)$. Управление $h_0(r)$ выходит на ограничение $h\geqslant0$ лишь на границе $r=1$.

3. Перейдем к исследованию необходимых условий минимума. Рассмотрим гамильтониан (2.3). С использованием (2.5) и с учетом $c=1$ гамильтониан запишем в форме

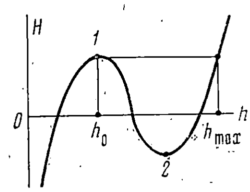
$$H=-hr-\frac{M^2}{rh^3}+(1-\nu^2)\frac{\varphi^2h^3}{r}-\omega^2y^2hr+\psi(\varphi,M,Q)\qquad(3.1)$$

где $\psi(\varphi, M, Q)$ — члены гамильтониана (2.3), не содержащие управления h. Из рассмотрения (3.1) заключаем, что гамильтониан представляет собой кривую, которая в области $h \geqslant 0$ имеет, вообще говоря, две стационарные точки *1* и *2* (фиг. 2). Чтобы дать ответ на вопрос, какой из точек соответствуют экстремали h_0, w_0, представленные на фиг. 1, обратимся к условию Лежандра.

Если экстремали h_0, w_0 сообщают слабый минимум функционалу объема (1.2) при рассматриваемых ограничениях, то на них должно выполняться условие Лежандра $\partial^2 H/\partial h^2 \leqslant 0$, $r \in [0, 1)$, а в точке выхода управления на ограничение, т. е. в граничной точке $r=1$, — условие $\partial H/\partial h \leqslant 0$. Это будет



Фиг. 1



Фиг. 2

означать, что экстремалям h_0, w_0 соответствует при $r \in (0, 1)$ точка *1* на фиг. 2. Дифференцируя дважды (3.1), выпишем условие Лежандра

$$-2M^2/(rh^5)+(1-\nu^2)\varphi^2 h/r \leqslant 0 \qquad (3.2)$$

Предварительно будем предполагать, что $r \in (0, 1)$, а затем установим справедливость неравенства (3.2) при $r \to 0$ предельным переходом и проверим выполнение условия $\partial H/\partial h \leqslant 0$ при $r=1$.

Разделим обе части неравенства на hr и перейдем от переменных φ, M к w. Тогда (3.2) преобразуется следующим образом:

$$2(w_0''+\nu w_0'/r)^2 \geqslant (1-\nu^2)(w_0'/r)^2$$

Здесь w заменено на w_0, поскольку условие Лежандра должно выполняться на экстремали. Запишем последнее неравенство в форме

$$(w_0'' r/w_0'+\nu)^2 \geqslant {}^1/_2(1-\nu^2) \qquad (3.3)$$

Рассмотрим экстремали, представленные на фиг. 1. Относительно $w_0''(r)$ сделаем предположение о монотонности и положительности, основанное на численных результатах, полученных в [1, 2]: для $1>b\geqslant a\geqslant 0$.

$$w_0''(b) \geqslant w_0''(a) \geqslant w_0''(0) > 0 \qquad (3.4)$$

Как нетрудно установить, из (3.4) и граничного условия $w_0'(0)=0$ следует $w_0'(r)>0$, $r \in (0, 1)$. Далее, для любых точек c, $d \in [0, 1)$ имеем $w_0'(c)-w_0'(d)=w_0''(\zeta)(c-d)$, где ζ лежит между c и d. Положив $c=0$, $d=r$ и используя (3.4), получим $w_0'(r)=w_0''(\zeta)r \leqslant w_0''(r)r$. Или, поскольку $w_0'(r)>0$, $r \in (0, 1)$, то $w_0''(r)r/w_0'(r)+\nu \geqslant 1+\nu$. Возводя в квадрат, найдем

$$(w_0''(r)r/w_0'(r)+\nu)^2 \geqslant (1+\nu)^2 > {}^1/_2(1-\nu^2), \quad r \in (0, 1) \qquad (3.5)$$

для любых $\nu \geqslant 0$. Таким образом, условие Лежандра внутри отрезка $[0, 1]$ выполняется. Отметим, что функция $w_0(r)$ и ее производные определены с точностью до константы, однако это обстоятельство не влияет на вывод (3.5). Действительно, если $w_0(r)$ взять с обратным знаком, то функция

$w_0'(r)$ станет вогнутой, но отрицательной. Поэтому неравенство $w_0''r/w_0' \geqslant \geqslant 1$ останется в силе, а отсюда следует (3.5).

Остается проверить выполнение необходимых условий слабого минимума на границе отрезка [0, 1]. При $r=1$ производная гамильтониана (3.1) по управлению в силу $y(1)=0$, $M(1)=0$ имеет вид

$$\left.\frac{\partial H}{\partial h}\right|_{r=1} = -1+(1-\nu^2)\varphi^2(1)3h_0^2(1) = -1<0$$

так как $h_0(1)=0$.

Для исследования условия Лежандра в окрестности точки $r=0$ запишем (3.2) через w_0 следующим образом:

$$P(r)=rh_0[2(w_0''+\nu w_0'/r)^2-(1-\nu^2)(w_0'/r)^2]\geqslant 0$$

При $r\to 0$ имеем $w_0'(r)/r\to w_0''(0)$, так как $w_0'(0)=0$. Следовательно, $P(0)=0$, однако

$$\frac{dP}{dr}=\lim_{r\to 0}\frac{P(r)}{r}=h_0(0)w_0''^2(0)[2(1+\nu)^2-(1-\nu^2)]>0$$

поскольку $h_0(0)>0$, $w_0''(0)\neq 0$, а выражение в квадратных скобках положительно для любых $\nu\geqslant 0$. Поэтому в окрестности $r=0$, $P(r)>0$, и условие Лежандра выполнено.

Таким образом, установлено, что экстремали h_0, w_0, полученные в [1, 2], удовлетворяют необходимым условиям слабого локального минимума.

Теперь покажем, что экстремалей, соответствующих точке *2* на фиг. 2, не существует. Действительно, пусть существуют экстремали $h_1(r)$, $w_1(r)$, так что $\partial H/\partial h=0$ и $\partial^2 H/\partial h^2\geqslant 0$ при $h=h_1$, $r\in(0, 1)$. Последнее условие соответствует (3.3), в котором знак неравенства заменен на обратный, т. е.

$$(w_1''(r)r/w_1'(r)+\nu)^2\leqslant {}^1/_2(1-\nu^2) \tag{3.6}$$

С другой стороны, как показано в [1], экстремали в окрестности точки $r=1$ описываются разложениями (2.8). В силу (2.8)

$$\lim_{r\to 1}(w_1''(r)r/w_1'(r)+\nu)^2\to+\infty$$

и существует окрестность границы $r=1$, в которой неравенство (3.6) не выполняется.

4. Из вида гамильтониана (3.1) следует (фиг. 2), что необходимое условие сильного локального экстремума (условие максимума функции Гамильтона на экстремалях в области $h\geqslant 0$) в рассмотренной постановке задачи не выполняется. Покажем, однако, что если на функцию $h(r)$ наложить ограничение вида $0\leqslant h(r)\leqslant h_0(r)(1+\alpha)$, где $\alpha=\text{const}>0$, то на экстремалях, полученных в [1, 2], выполнится и необходимое условие сильного минимума.

Получим оценку для α. С этой целью зафиксируем $r\in(0, 1)$ и разложим гамильтониан (3.1) в окрестности h_0 (точка *1* на фиг. 2)

$$H(h)=H(h_0)+{}^1/_2H''(h_0)(h-h_0)^2+{}^1/_6H'''(\zeta)(h-h_0)^3 \tag{4.1}$$

где $\zeta\in[h_0, h]$. Выполнение условия максимума $H(h)\leqslant H(h_0)$ эквивалентно неравенству

$$H(h)-H(h_0)={}^1/_2[H''(h_0)+{}^1/_3H'''(\zeta)(h-h_0)](h-h_0)^2\leqslant 0 \tag{4.2}$$

Выше было показано $H''(h_0)<0$ и, как нетрудно убедиться

$$H'''(\zeta)=\frac{60M^2}{r\zeta^6}+\frac{6(1-\nu^2)\varphi^2}{r}>0 \text{ при } r\neq 0$$

Следовательно, неравенство (4.2) всегда выполняется при $h<h_0$.

Рассмотрим случай ζ, $h>h_0$. При $\zeta\geqslant h_0$ имеем $H'''(\zeta)\leqslant H'''(h_0)$, поскольку $H^{IV}(\zeta)=-360\,M^2/(r\zeta^7)<0$ при $\zeta>0$. С учетом этого обстоятельства проведем цепочку неравенств, используя прежние переменные и обозначение $z^2(r)=(w_0''(r)r/w_0'(r)+\nu)^2$:

$$-\frac{3H''(h_0)}{H'''(\zeta)}\geqslant-\frac{3H''(h_0)}{H'''(h_0)}=\frac{3h_0[2z^2(r)-(1-\nu^2)]}{10z^2(r)+(1-\nu^2)}=$$

$$=\frac{3h_0}{5}\left[1-\frac{6(1-\nu^2)}{10z^2(r)+(1-\nu^2)}\right]\geqslant\frac{3h_0}{5}\left[1-\frac{6(1-\nu^2)}{10+(1-\nu^2)}\right] \tag{4.3}$$

Последнее неравенство справедливо, так как, согласно (3.5), $z^2(r)\geqslant\geqslant(1+\nu)^2\geqslant1$ при $\nu\geqslant0$. Далее имеем

$$\frac{3h_0}{5}\left[1-\frac{6(1-\nu^2)}{10+(1-\nu^2)}\right]=\frac{3h_0(1+\nu^2)}{11-\nu^2}\geqslant\frac{3h_0}{11}\quad\text{при }\nu\leqslant1 \tag{4.4}$$

Таким образом $\alpha=3/11$. Действительно, если $h-h_0\leqslant\alpha h_0$ или $h\leqslant(1+\alpha)h_0$, то в силу (4.3), (4.4) $(h-h_0)\leqslant-3H''(h_0)/H'''(\zeta)$, и условие максимума функции Гамильтона (4.2) на экстремалях h_0, w_0, полученных в [1, 2], выполнено при любом $r\in(0, 1)$.

Очевидно, что наилучшую оценку $0\leqslant h\leqslant h_{max}(r)$, при которой на экстремалях h_0, w_0 выполняется принцип максимума, можно получить при каждом фиксированном r решением уравнения $H(h)=H(h_0)$; h_{max} является положительным корнем этого уравнения (фиг. 2).

Возможность появления разрывных оптимальных решений в задачах о колебаниях пластин связана [7] с применением теории тонких пластин, не описывающей, строго говоря, ребристые конструкции.

Поступила 28 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Olhoff N.* Optimal design of vibrating circular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1970, vol. 6, No. 1.
2. *Гура Н. М., Сейранян А. П.* Оптимальная круглая пластинка при ограничениях по жесткости и частоте собственных колебаний. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
3. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Об оптимальных круглых пластинках. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
4. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев, «Наукова думка», 1975.
5. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
7. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* О применении теоремы Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.