

РЕАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ
НА ДЕЙСТВИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

В. И. ПОЖУЕВ

(Запорожье)

Задачи о динамическом воздействии движущихся сил на пластины и оболочки, контактирующие с упругой средой, исследовались многими авторами [1-4]. Реакция упругой пластинки, подпертой полубесконечной средой, на действие движущейся линейной нагрузки изучалась в [1]. Аналогичные осесимметричные задачи для цилиндрических оболочек в упругой среде, или содержащих упругий наполнитель, рассмотрены в [2-4]. При этом в [4] исследованы случаи докритической и закритических скоростей движения нагрузки.

В данной работе изучается реакция бесконечно длинной цилиндрической оболочки со сплошным упругим наполнителем на действие неосесимметричной нагрузки, движущейся вдоль оси с постоянной скоростью, меньшей скорости распространения волны сдвига в наполнителе. Получено распределение перемещений и напряжений в оболочке и наполнителе для докритических скоростей движения и показана возможность отрыва оболочки от наполнителя.

1. Для неосесимметричного движения уравнение цилиндрической оболочки с учетом нормальной реакции наполнителя можно записать в виде [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & \frac{\nu}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{w}{a^2} = -\rho \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1-\nu}{2Gh} (q_c - p) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлении осей x, θ, r ; p, q_c — нормальное давление и реакция со стороны наполнителя; h, a — толщина и радиус срединной поверхности оболочки.

Движение наполнителя описывается динамическими уравнениями теории упругости, которые в векторной форме имеют вид [6]:

$$(\lambda_c + 2\mu_c) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu_c \text{rot rot } \mathbf{u} = \rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{u}(u_x, u_\theta, u_r)$ — вектор перемещения; $G, \nu, \rho, G_c, \nu_c, \rho_c$ — модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность для оболочки и наполнителя соответственно; $\lambda_c = 2\nu_c G_c / (1 - 2\nu_c)$; $\mu_c = G_c$.

Задача сводится к совместному интегрированию дифференциальных уравнений движения оболочки (1.1) и наполнителя (1.2) при выполнении граничных условий на боковой поверхности наполнителя, которые для

скользящего контакта имеют вид

$$\sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rr} = -q_c, u_r = w \text{ при } r = a \quad (1.3)$$

где σ_{rr} — нормальное напряжение; $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}$ — касательные напряжения.

Поскольку скорость движения нагрузки постоянна и рассматривается установившийся процесс, решение проводится в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой $r, \theta, \eta = (x - ct)/a$, c — скорость движения нагрузки.

В подвижной системе координат уравнения (1.1), (1.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1-\nu}{2G} \rho c^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \left(1 - \frac{\rho c^2}{G}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12a^2} \nabla^2 \nabla^2 w + w + \rho c^2 \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{(1-\nu)a^2}{2Gh} q_c = - \frac{(1-\nu)a^2}{2Gh} p$$

$$(\lambda_c + 2\mu_c) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu_c \text{rot rot } \mathbf{u} = \rho_c \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} \quad (1.5)$$

Рассмотрим единичную нормальную нагрузку с произвольной зависимостью от угловой координаты, изменяющуюся вдоль η синусоидально и движущуюся с постоянной скоростью вдоль оси оболочки

$$p(\theta, \eta) = P(\theta) \exp(i\xi\eta) \quad (1.6)$$

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (1.6), поэтому решение уравнений (1.4), (1.5) ищем в форме

$$\{u, v, w, q_c, \mathbf{u}\} = \{u_0, v_0, w_0, q_{c0}, \mathbf{u}_0\} \exp(i\xi\eta) \quad (1.7)$$

Вводя безразмерные величины и параметры

$$\begin{aligned} \{u_*, v_*, w_*\} &= \frac{1}{h} \{u_0, v_0, w_0\}, \quad \kappa = \frac{h}{a} \\ c_0 &= c \left(\frac{3}{2} \frac{\rho}{G}\right)^{1/2}, \quad \{p^*, q_{c0}^*\} = \frac{a\{P(\theta), q_{c0}\}}{2(1+\nu)Gh} \end{aligned}$$

будем искать решение уравнений (1.4) в виде рядов Фурье по θ , предполагая, что реакция заполнителя и нормальная нагрузка разложимы в ряды Фурье по угловой координате

$$\begin{aligned} \{u_*, w_*, q_{c0}^*, p^*\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{u_n, w_n, q_{c,n}^*, p_n^*\} \cos(n\theta) \\ v_* &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\xi) \sin(n\theta) \end{aligned}$$

Тогда для n -го члена разложения получим

$$\begin{aligned} - \left[\left(1 - \frac{1-\nu}{3} c_0^2\right) \xi^2 + \frac{(1-\nu)n^2}{2} \right] u_n + i\xi \frac{(1+\nu)n}{2} v_n + i\xi \nu w_n = 0 \\ i\xi \frac{(1+\nu)n}{2} u_n + \left[\frac{(1-\nu)}{2} \left(1 - \frac{2}{3} c_0^2\right) \xi^2 + n^2 \right] v_n + n w_n = 0 \end{aligned}$$

$$i\xi v u_n + n v_n + \left[\frac{\kappa^2}{12} (n^2 + \xi^2)^2 + 1 - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 \right] w_n - \frac{1-\nu}{\kappa} g_{c,n}^* = - \frac{1-\nu}{\kappa} p_n^* \quad (1.8)$$

Неизвестная реакция заполнителя $q_{c,n}^*$ находится из уравнений (1.5) с учетом условий (1.3).

2. Для интегрирования (1.5) аналогично [7, 8] вводим потенциальные функции

$$\{\Phi, \Psi\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_n, \psi_n\} \cos(n\theta) \exp(i\xi\eta) \quad (2.1)$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \sin(n\theta) \exp(i\xi\eta)$$

Между компонентами перемещений и потенциальными функциями имеют место зависимости

$$u_{r,n} = \frac{d\varphi_n}{dr} - i \frac{\xi}{a} \frac{d\psi_n}{dr} + \frac{n}{r} \chi_n$$

$$u_{\theta,n} = -\frac{n}{r} \varphi_n + i \frac{\xi}{a} \frac{n}{r} \psi_n - \frac{d\chi_n}{dr} \quad (2.2)$$

$$u_{\eta,n} = i \frac{\xi}{a} \varphi_n + \frac{d^2\psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \psi_n$$

где $u_{r,n}$, $u_{\theta,n}$, $u_{\eta,n}$ — компоненты разложений амплитуд элементарных перемещений в ряды Фурье.

Тогда из (1.5) получаем для потенциальных функций видоизмененные волновые уравнения

$$\frac{d^2\varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m^2\xi^2}{a^2} \right) \varphi_n = 0$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m_s^2\xi^2}{a^2} \right) \psi_n = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2\chi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi_n}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m_s^2\xi^2}{a^2} \right) \chi_n = 0$$

$$m = \sqrt{1-M^2}, \quad m_s = \sqrt{1-M_s^2}, \quad M = c/c_p, \quad M_s = c/c_s$$

где c_p , c_s — скорости распространения волн растяжения — сжатия и сдвига в заполнителе.

Для скоростей движения нагрузки, меньших c_s ($m^2 > 0$, $m_s^2 > 0$), решение уравнений (2.3) для сплошного заполнителя имеет вид

$$\varphi_n(\xi, r) = A_n(\xi) I_n\left(\frac{m\xi r}{a}\right), \quad \psi_n(\xi, r) = B_n(\xi) I_n\left(\frac{m_s\xi r}{a}\right) \quad (2.4)$$

$$\chi_n(\xi, r) = C_n(\xi) I_n\left(\frac{m_s\xi r}{a}\right)$$

где I_n — функции Бесселя первого рода от мнимого аргумента.

Воспользовавшись далее законом Гука и учитывая граничные условия, находим связь между реакцией заполнителя и радиальными перемещениями оболочки

$$q_{c,n} = \mu_c \kappa \varphi(n, \xi) w_n \quad (2.5)$$

$$\varphi(n, \xi) = \frac{e_3 d_1 + 2e_4 - 2(e_2 - 1) d_2}{e_1 d_1 + m_s^2 e_2}$$

$$e_1 = n + m_s \xi \frac{I_{n+1}(m_s \xi)}{I_n(m_s \xi)}, \quad e_2 = n + m_s \xi \frac{I_{n+1}(m_s \xi)}{I_n(m_s \xi)}$$

$$e_3 = (1 + m_s^2) \xi^2 + 2n^2 - 2e_1, \quad e_4 = m_s^2 \xi^2 + n^2 - e_2$$

$$e_5 = n^2 + \frac{m_s^2 \xi^2}{2} - e_2, \quad d_2 = 2e_1 d_1 + (1 + m_s^2) e_2$$

$$d_1 = [n^2(e_2 - 1) - (1 + m_s^2) e_2 e_5] / [2e_1 e_5 - n^2(e_1 - 1)]$$

3. Подставляя (2.5) в (1.8), получаем систему алгебраических уравнений относительно u_n, v_n, w_n , общее решение которой можно записать в форме

$$\{u_n, v_n, w_n\} = \frac{\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}}{\det \|a_{ij}(\xi, n)\|} \quad (i, j=1, 2, 3, n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

$$a_{11} = - \left(1 - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \right) \xi^2 - \frac{(1-\nu)n^2}{2}$$

$$a_{12} = a_{21} = i\xi \frac{(1+\nu)n}{2}, \quad a_{13} = a_{31} = i\nu \xi$$

$$a_{22} = \frac{1-\nu}{2} \left(1 - \frac{2}{3} c_0^2 \right) \xi^2 + n^2, \quad a_{23} = a_{32} = n$$

$$a_{33} = \frac{\kappa^2}{12} (n^2 + \xi^2)^2 + 1 - \frac{1-\nu}{3} c_0^2 \xi^2 - \frac{1-\nu}{2\kappa} \frac{G_c}{G} \varphi(n, \xi)$$

Определители Δ_k ($k=1, 2, 3$) получаются из $\det \|a_{ij}\|$ заменой k -го столбца столбцом с элементами $\{0, 0, -p_n^*(1-\nu^2)/\kappa\}$.

Таким образом, нормальное перемещение оболочки, вызванное движением единичной синусоидальной нагрузки, будет иметь вид

$$w_* = \frac{1-\nu^2}{\kappa} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^*(\xi)}{F(n, \xi)} \cos(n\theta) \right\} \exp(i\xi\eta) \quad (3.2)$$

$$F(n, \xi) = \frac{\nu \xi^2}{\varepsilon_1} [(1+\nu)n\varepsilon_4 - \nu] + 2n\varepsilon_4 - \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = a_{11}, \quad \varepsilon_2 = a_{22}, \quad \varepsilon_3 = a_{33}, \quad \varepsilon_4 = \frac{2\varepsilon_1 n + \nu(1+\nu)n\xi^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 + (1+\nu)^2 n^2 \xi^2}$$

Для контактного напряжения имеем

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = - \frac{1-\nu}{2\kappa} \frac{G_c}{G} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n, \xi)}{F(n, \xi)} p_n(\xi) \cos(n\theta) \right\} \exp(i\xi\eta) \quad (3.3)$$

Имея перемещения и напряжения для единичной синусоидальной силы, решение для произвольной нагрузки получаем путем суперпозиции,

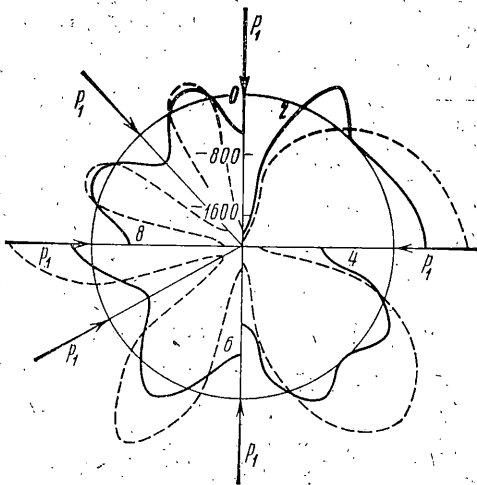
используя представление нагрузки интегралом Фурье. Для системы l сосредоточенных равномерно вдоль окружности сил

$$p(\theta, \eta) = p_1 \delta(\eta) \sum_{k=1}^l \delta(\theta - \theta_k)$$

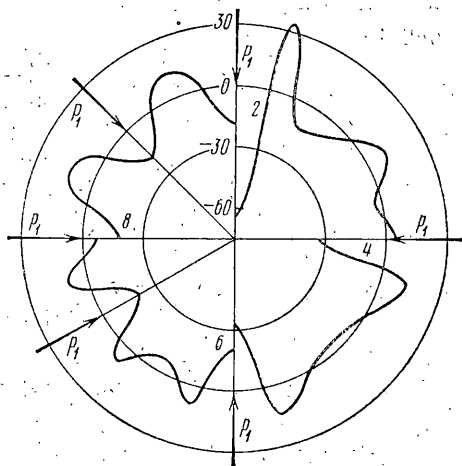
решение получается следующим образом. Функцию Дирака можно представить в виде интеграла с бесконечным верхним пределом

$$\delta(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi \eta) d\xi$$

Реакцию на косинусоидальную нагрузку единичной амплитуды можно получить, если брать действительные части полученных выражений (3.2),



Фиг. 1



Фиг. 2

(3.3). Линейной суперпозицией получаем затем решение для сосредоточенной силы путем интегрирования результатов для косинусоидальной нагрузки по волновому числу ξ в пределах от 0 до ∞ . Если принять, что $p_1 = 2\pi p_0/l$, где p_0 — интенсивность равномерно распределенной вдоль окружности нагрузки, то при $r=a$ имеем

$$\frac{2Gw}{p_0} = \frac{2}{l} \frac{1-\nu}{\kappa} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\theta)}{F(n, \xi)} \right] \cos(\xi \eta) d\xi, \quad \gamma = \frac{G}{G_c} \quad (3.4)$$

где a_n — коэффициенты Фурье функции $\sum \delta(\theta - \theta_k)$.

Контактное давление определяется по формуле

$$\frac{\sigma_{rr}|_{r=a}}{p_0} = -\frac{1}{l} \frac{1-\nu}{\kappa \gamma} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Phi(n, \xi)}{F(n, \xi)} \cos(n\theta) \right] \cos(\xi \eta) d\xi \quad (3.5)$$

4. Для конкретного значения скорости движения нагрузки с знаменатели подынтегральных выражений в (3.4), (3.5) представляют собой трансцендентные функции относительно ξ с действительными коэффициентами, зависящими от n , c и механических характеристик оболочки и заполнителя. Если для некоторого значения c

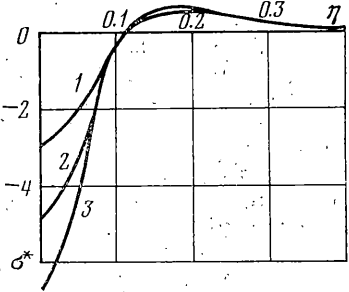
имеется один действительный положительный корень знаменателя, то интегралы в (3.4), (3.5) следует понимать в смысле главного значения по Коши. Если же для некоторого c имеется двойной положительный корень, то интегралы не существуют даже в смысле главного значения. Эта скорость движения нагрузки называется критической (c_*) и аналогично [1, 4] она может быть найдена из анализа дисперсионных кривых.

В [9] показано, что для оболочки с заполнителем разница между скоростями осесимметричных и неосесимметричных волн мала для всех значений волнового числа, кроме близких к нулю (область очень длинных волн). Минимумы дисперсионных кривых для осесимметричных и неосесимметричных волн совпадают и поскольку критическая скорость соответствует минимуму кривой дисперсии [1], то эту скорость можно определять из решения соответствующей осесимметричной задачи.

Принимались следующие значения безразмерных параметров: $\kappa=0.02$, $\nu=\nu_c=0.3$, $\rho_*/\rho_c=12.5$, параметры γ и c_0 варьировались. Из решения соответствующей осесимметричной задачи получено, что при $\gamma=250$ критическая скорость $c_*=0.31$.

Далее дальнейшее рассмотрение ограничено докритическими скоростями движения ($c_0 < c_*$). В этом случае интегралы (3.4), (3.5) не являются особыми и вычисляются по формулам Файлона [10]. В качестве примера рассмотрено движение вдоль оболочки двух, четырех, шести и восьми сосредоточенных на одинаковом расстоянии вдоль окружности сил. При проведении расчетов использовалось представление дельта-функции конечным рядом Фурье с улучшенной сходимостью [11]

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) \cos(n\theta) \right] \quad (4.1)$$



Фиг. 3

С использованием (4.1) коэффициенты Фурье в формулах (3.4), (3.5) принимают вид

$$a_n = \frac{l}{2\pi} \quad \text{при } n=0 \quad (l=2, 4, 6, 8)$$

$$a_n = \frac{lN}{n\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) \quad \text{при } n=lj \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

При $n \neq lj$ коэффициенты $a_n=0$.

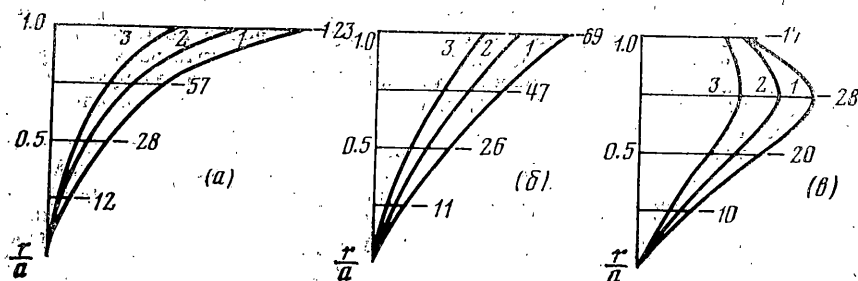
На фиг. 1 показано распределение безразмерных прогибов оболочки $2Gw/p_0$ по окружности в сечении $\eta=0$ для двух, четырех, шести и восьми сосредоточенных сил ($p_1=2\pi r_0/l$) при $c_0=0.1$, $\gamma=250$.

Пунктирные кривые относятся к оболочке без заполнителя, причем для наглядности изображения для каждой такой кривой выбран свой масштаб, отличный от масштаба для оболочки с заполнителем. Как видно из фиг. 1, наличие заполнителя оказывает существенное влияние на характер распределения прогибов, особенно для двух и четырех сил. С увеличением числа сил влияние заполнителя на характер изменения прогибов по окружности уменьшается.

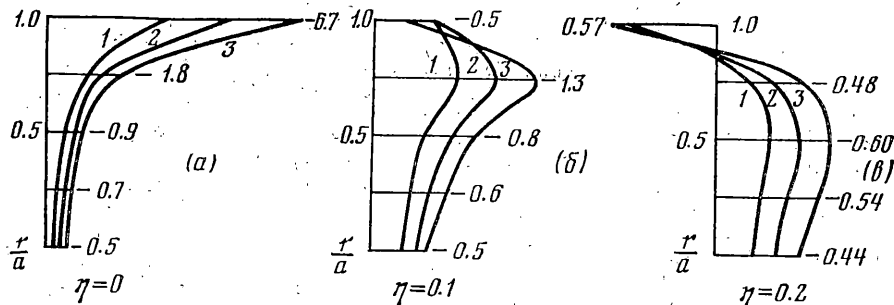
Фиг. 2 иллюстрирует изменение контактных напряжений $\sigma^* = \sigma_{rr} a/p_0$ в том же сечении и для тех же значений параметров. Как видно из фиг. 2, сжимающие контактные напряжения имеют место только в некоторой окрестности приложения силы. С удалением от этой точки по окружности напряжения для всех рассмотренных случаев меняют знак. Это является следствием предположения о двустороннем характере связи между оболочкой и заполнителем. Если принять связь односторонней, то станет возможным выключение связей на тех участках, где возникают растягивающие напряжения и произойдет отрыв оболочки от заполнителя.

На фиг. 3 показано распределение контактных напряжений по длине оболочки для осесимметричного случая при различных значениях относительной жесткости заполнителя (1 - $\gamma=250$, 2 - $\gamma=125$, 3 - $\gamma=62.5$). Из фиг. 3 видно, что отрыв оболочки от заполнителя происходит не только по окружности, но и по длине, причем жесткость заполнителя оказывает малое влияние на размеры зоны контакта.

На фиг. 4 приведено распределение радиальных перемещений $2Gu_r/p_0$, а на фиг. 5 - радиальных напряжений $\sigma_{rr} a/p_0$ по толщине заполнителя для различных



Фиг. 4



Фиг. 5

сечений $\eta = \text{const}$ при движении осесимметричной кольцевой нагрузки. Смысл индексов 1-3 тот же, что и на фиг. 3. Для наглядности изображения в каждом сечении выбран свой масштаб.

Как видно из фиг. 4, 5, с удалением от места приложения нагрузки характер распределения существенно изменяется, особенно для напряжений. Причем, если для сечений $\eta=0$ (фиг. 4, а; 5, а) и $\eta=0.1$ (фиг. 4, б; 5, б) все напряжения являются сжимающими, то уже для сечения $\eta=0.2$ (фиг. 4, в; 5, в) в части заполнителя, примыкающей к оболочке, появляются растягивающие напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 4 VII 1977

1. Achenbach J. D., Keshava S. P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1967, № 4.)
2. Пожухов В. И., Львовский В. М. Реакция цилиндрической оболочки в упругой среде на действие подвижной нагрузки. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1976, № 2.
3. Кюркчиев Р. Цилиндрическая оболочка с упругим заполнителем под действием подвижной кольцевой нагрузки. Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1970, № 6.
4. Корбут В. А., Нагорный Ю. И. Реакция цилиндрической оболочки с заполнителем на действие движущейся нагрузки. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М., «Наука», 1972.
6. Слеллан Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
7. Parnes R. Response of an infinite elastic medium to traveling loads in a cylindrical bore. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1969, № 1.)
8. Пожухов В. И., Львовский В. М. Пространственная задача о вынужденных колебаниях цилиндрической оболочки в упругой среде. В сб.: Динамика и прочность машин, вып. 23. Изд-во Харьковск. ун-та, 1976.
9. Масгиновский Ю. В., Нагорный Ю. И. Стационарные неосесимметричные волны в цилиндрической оболочке, содержащей заполнитель. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
10. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.
11. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.