

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОБОЛОЧКЕ С РАССЛОЕНИЯМИ

А. П. МАЛЫШЕВ

(Москва)

Проведенные ранее исследования оболочек с расслоениями силового пакета выявили существенное влияние дефектов такого вида на устойчивость и собственные колебания [1-4]. При этом предполагалось, что отсутствует взаимодействие между расслоившимися поверхностями, т. е. рассматривались неконтактные задачи. В предлагаемой работе на примере сферической оболочки исследуется влияние расслоений на характер волновых переходных процессов. Задача решается в контактной постановке конечно-разностным методом.

4. Влияние расслоений на вид переходного процесса исследуется на примере сферической оболочки. Сферическую оболочку с расслоением можно рассматривать как систему трех оболочек (фиг. 1), где оболочка 1 соответствует нерасслоившемуся пакету, а оболочки 2 и 3 моделируют слой пакета по обе стороны от места расслоения. Осесимметричное движение однородных сферических оболочек с учетом сдвига и инерции вращения сечений описывается следующей системой уравнений [5]:

$$\begin{aligned} hU' &= N_1' + B_1(N_1 - N_2) + T, & hW' &= T' - N_1 - N_2 + B_1T \\ h^3\Phi' &= M_1' + B_1(M_1 - M_2) + \gamma Q_1, & U &= u, & W &= w, & \Phi &= \varphi \\ \alpha &= \alpha^\circ / R, & T &= N_1\theta + Q_1, & \theta &= w' - u, & \gamma &= 12R^2 / h_0, & h &= h^\circ / h_0 \\ B &= B^\circ / R, & N_j &= N_j^\circ / b_0, & M_j &= M_j^\circ \gamma / (b_0 R) & (j=1, 2) \\ Q_1 &= Q_1^\circ / b_0, & t &= t^\circ c_0 / R, & u &= u^\circ / R, & w &= w^\circ / R \\ m_0 &= \rho h_0, & b_0 &= E h_0 / (1 - \mu^2), & c_0 &= (b_0 / m_0)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

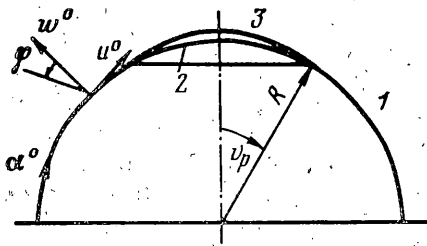
Здесь E , μ , ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки; N_j° и M_j° — усилия в срединной поверхности и изгибающие моменты, причем $j=1$ соответствует меридиональному направлению, $j=2$ — окружному; Q_1° — перерезывающая сила; t° — время; h_0 — характерная толщина; h° , B° и R — толщина оболочки, радиус направляющей и радиус кривизны срединной поверхности. В дальнейшем считается, что различием R для всех трех оболочек можно пренебречь.

Силовые факторы связаны с перемещениями срединной поверхности следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} N_1 &= h(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), & M_1 &= h^3(\kappa_1 + \mu\kappa_2) & (1 \Rightarrow 2) \\ Q_1 &= g\varepsilon_{1z}, & g &= 1/2 k_c^2 h(1 - \mu), & \varepsilon_1 &= u' + w \\ \varepsilon_2 &= B_1 u + w, & \kappa_1 &= \varphi', & \kappa_2 &= B_1 \varphi, & \varepsilon_{1z} &= \theta - \varphi \end{aligned}$$

где k_c — коэффициент сдвига [5]; в расчетах принято $k_c^2 = 5/6$.

Хотя исследование однородных анизотропных оболочек, как будет видно далее, не вносит никаких принципиальных осложнений в реализацию выбранного способа численного решения задачи, в работе рассматривают-



Фиг. 1

ся изотропные оболочки, чтобы четче выявить эффекты, обусловленные раслоением.

2. Для исследования переходных процессов используется разностная схема решения систем уравнений гиперболического типа [6]. Поверхность оболочек параллелями $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \dots, \alpha_N$ разбивается на N расчетных ячеек, причем $\alpha_n - \alpha_{n-1} = \Delta\alpha = \text{const}$. Значения параметров переходного процесса на следующем временном слое $t_i =$

$= t_{i-1} + \Delta t$ в ячейке $n - 1/2$, образованной параллелями α_{n-1} и α_n , определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} N_j^* &= a_{j4} U^* + a_{j5} W^* + Y_j, & M_j &= a_{j6} \Phi^* + Y_{j+2} \\ Q_1^* &= a_{36} (U^* + \Phi^*) + Y_5, & hU^* &= B_t (N_1^* - N_2^*) + \Delta t T^* + Y_6 \\ hW^* &= B_t T^* - \Delta t (N_1^* + N_2^*) + Y_7 \\ h^3 \Phi^* &= B_t (M_1^* - M_2^*) + \gamma_t Q_1^* + Y_8 \quad (j=1, 2) \\ a_{24} &= hB_t, \quad a_{14} = \mu a_{24}, \quad a_{16} = h^2 a_{14}, \quad a_{26} = h^2 a_{24}, \quad a_{36} = -g\Delta t, \quad B_t = B_1 \Delta t \\ \gamma_t &= \gamma \Delta t, \quad (\dots)_\Delta = [(\dots)_n - (\dots)_{n-1}] k_\alpha, \quad k_\alpha = \Delta t / \Delta \alpha, \quad Y_1 = hU_\Delta + (N_1)_{n-1/2} \quad (2.1) \\ Y_2 &= \mu h U_\Delta + (N_2)_{n-1/2}, \quad Y_3 = h^3 \Phi_\Delta + (M_1)_{n-1/2} \\ Y_4 &= \mu h^3 \Phi_\Delta + (M_2)_{n-1/2}, \quad Y_5 = gW_\Delta + (Q_1)_{n-1/2} \\ Y_6 &= N_{1\Delta} + h(U)_{n-1/2}, \quad Y_7 = T_\Delta + h(W)_{n-1/2} \\ Y_8 &= M_{1\Delta} + h^3(\Phi)_{n-1/2} \end{aligned}$$

Здесь $(\dots)^*$ — параметры в ячейке $n - 1/2$ на слое $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, $(\dots)_{n-1/2}$ — параметры в этой ячейке на предыдущем слое $t = t_{i-1}$, $(\dots)_n$ и $(\dots)_{n-1}$ — значения параметров при $\alpha = \alpha_n$ и $\alpha = \alpha_{n-1}$ на промежуточном слое $t = t_{i-1} + \omega \Delta t$, $0 \leq \omega \leq 1$.

Скорости U^* , W^* , Φ^* определяются из системы уравнений, полученной после исключения из (2.1) N_j^* , M_j^* , Q_1^* :

$$a_{m1} U^* + a_{m2} W^* + a_{m3} \Phi^* = c_m \quad (m=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Коэффициенты a_{mn} и c_m не приводятся, так как их определение элементарно. Значения параметров с целочисленными индексами n и $n-1$ вычисляются при помощи соотношений на характеристиках системы уравнений (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} N_{1n} + f_1^s U_n &= F_1^s, \quad T_n + f_2^s W_n = F_2^s, \quad M_{1n} + f_3^s \Phi_n = F_3^s, \quad s = -\text{sign}(\text{tg } \beta) \\ f_1^s &= (sh)_{n+1/2s}, \quad f_2^s = (shc)_{n+1/2s}, \quad f_3^s = (sh^3)_{n+1/2s}, \quad c = (gp^{-1}h^{-1})^{1/2} \quad (2.3) \\ F_1^s &= \{N_1 + f_1^s U + \omega [a_{14} U + a_{15} W + s(B_t(N_1 - N_2) + \Delta t T)]\}_{n+1/2s} \\ F_2^s &= \{T + f_2^s W + \omega [N_1 \Delta t W_\Delta + \theta(a_{24} U_\Delta + a_{15} W) + \\ &+ (\theta a_{14} - N_1 \Delta t + a_{36}) U + a_{36} \Phi + sc(B_t T - \Delta t(N_1 + N_2))]\}_{n+1/2s} \\ F_3^s &= \{M_1 + f_3^s \Phi + \omega [a_{16} \Phi + s(B_t(M_1 - M_2) + \gamma_t Q_1)]\}_{n+1/2s} \end{aligned}$$

Здесь β — угол наклона характеристики в плоскости αt . В промежуточных ячейках разностной сетки

$$U_n = \frac{F_1^+ - F_1^-}{f_1^+ - f_1^-}, \quad W_n = \frac{F_2^+ - F_2^-}{f_2^+ - f_2^-}, \quad \Phi_n = \frac{F_3^+ - F_3^-}{f_3^+ - f_3^-} \quad (2.4)$$

Нижний торец оболочки 1 жестко заделан: $U_n = \Phi_n = W_n = 0$. В полюсах оболочек 2 и 3 выполняются условия симметрии: $U_n = \Phi_n = Q_{1n} = 0$. Осталь-

ные параметры с целочисленными индексами определяются при помощи соотношений (2.3) после подстановки в них величин, заданных на граничных контурах или определенных при помощи (2.4).

На границе расслоения силового пакета, соответствующей стыку оболочек 1—3, выполняются условия равновесия сил и моментов сверху и снизу от границы

$$N^{(1)} = \sum_i L_i A_1^{(i)}(N, T), \quad T^{(1)} = \sum_i L_i A_2^{(i)}(N, T)$$

$$M_1^{(1)} = \sum_i [M_1^{(i)} + z_{1i} A_1^{(i)}(N, T)]$$

$$L_i = -s^{(1)} s^{(i)}, \quad A_1^{(i)}(X, S) = X^{(i)} \cos \beta_i - S^{(i)} \sin \beta_i \quad (i=2,3) \quad (2.5)$$

$$A_2^{(i)}(X, S) = X^{(i)} \sin \beta_i + S^{(i)} \cos \beta_i, \quad \beta_i = \theta^{(i)} - \theta^{(1)}, \quad z_{1i} = \gamma(z_1 - z_i)/R$$

и условия равенства линейных и угловых скоростей

$$U^{(1)} = A_1^{(i)}(U, W) - z_{1i} \Phi, \quad W^{(1)} = A_2^{(i)}(U, W), \quad \Phi^{(1)} = \Phi^{(i)} = \Phi \quad (2.6)$$

где z_{1m} — расстояние от внутренней поверхности оболочки до срединной поверхности m -й оболочки, верхний индекс в скобках указывает, к какой оболочке относится данная величина, нижний индекс i для краткости опущен.

Значения параметров с целочисленными индексами на границе расслоения определяются в результате совместного решения (2.3), (2.5) и (2.6).

Исходный зазор между оболочками 2 и 3 задается как начальная погибь оболочки 3.

При описании взаимодействия расслоившихся частей предполагается, что локальное сжатие материала на поверхности контакта можно не учитывать. Это предположение аналогично используемому обычно в теории оболочек допущению о том, что нормальными межслоевыми напряжениями в них можно пренебречь. Расчет параметров процесса для оболочек 2 и 3 на каждом временном слое сначала проводится в предположении, что они не соприкасаются один с другим. Если после этого для каких-либо ячеек разностной сетки оказывается, что $w^{(2)} - w^{(3)} > 0$, то параметры в них пересчитываются из условия совместного движения оболочек 2 и 3 по нормали: $W^{(2)} = W^{(3)} = W$.

Чтобы исключить реакцию взаимодействия оболочек, для описания их совместного движения по нормали используется уравнение, получающееся почленным суммированием соответствующих уравнений (1.1) для оболочек 2 и 3. Слагаемые, описывающие силы взаимодействия, при этом взаимно уничтожаются, так как силы равны и противоположно направлены. В уравнениях, описывающих движение соприкасающихся оболочек 2 и 3 в меридиональном направлении, а также поворот их сечений, силы взаимодействия отсутствуют, так как трение между соприкасающимися поверхностями не принимается во внимание.

В связи со сказанным выше расчетные соотношения для определения скоростей в случае контакта оболочек 2 и 3 имеют вид

$$a_{mz}^{(i)} U^{(i)*} + a_{mz}^{(i)} W* + a_{mz}^{(i)} \Phi^{(i)*} = c_m^{(i)} \quad (i=2,3) \quad (2.7)$$

$$\sum_i a_{21}^{(i)} U^{(i)*} + W* \sum_i a_{22}^{(i)} + \sum_i a_{23}^{(i)} \Phi^{(i)*} = \sum_i c_2^{(i)} \quad (m=1,3)$$

Изложенная выше схема численного расчета была реализована в виде программы на языке АЛГОЛ-60. Расчеты проводились на ЭЦВМ БЭСМ-6.

3. В момент времени $t=0$ оболочкам 1 и 3 сообщается начальная скорость W_h в направлении внутренней нормали к срединной поверхности. Начальный зазор в месте расслоения принимался равным $w_h^{(3)}$:

$$W_h = -J/h^{(1)}, \quad w_h^{(3)} = \delta R^{-1} \sin(\pi\alpha^{(3)}/L^{(3)}), \quad J = J_0 c_0 / b_0$$

где J_0 — импульс, отнесенный к единице площади срединной поверхности, δ — амплитуда начального зазора, $\alpha^{(3)}$ — координата вдоль образующей, отсчитываемая от нижнего торца оболочки 3, $L^{(3)}$ — полная длина образующей этой оболочки.

Была исследована зависимость прогиба в полюсе оболочки 2 w_q от v_p , δ и J . При этом принималось

$$h_0 = h^{(1)}, \quad \mu = 0.33, \quad h^{(2)} = h^{(3)} = 0.5h^{(1)}, \quad R/h_0 = 50$$

$$\Delta t = \Delta\alpha, \quad \omega = 0.5; \quad J = 10^{-3}, \quad 0.5 \cdot 10^{-3}, \quad 0.25 \cdot 10^{-3}$$

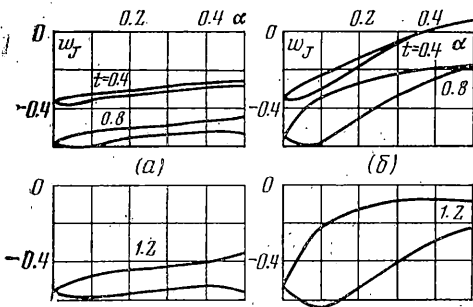
Для проверки сходимости расчет проводился с шагами $\Delta t = 0.02, 0.01, 0.005$. Результаты расчетов при всех трех Δt совпали с четырьмя значащими цифрами.

На фиг. 2 приведены полученные зависимости первого по времени экстремума w_m прогиба w_q от параметров расслоения и начального импульса.

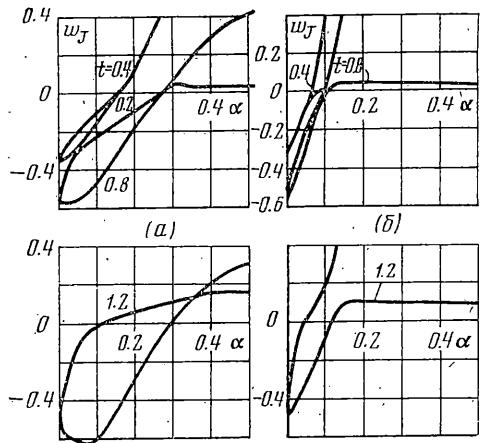
Здесь $\delta_* = \delta/(Rl)$, $w_* = w_m/w_m(0)$, $w_m(0)$ — первый экстремум прогиба w_q при $\delta=0$, кривая 1 соответствует

$$\varphi_p = \pi/48, \quad 2 - \pi/32, \quad 3 - \pi/24, \quad 4 - \pi/12, \quad 5 - \pi/6, \quad 6 - \pi/4$$

Принципиальной особенностью этих зависимостей является то, что при увеличении δ_* , начиная с некоторого значения φ_p , w_* меняет знак, т. е. на первой фазе



Фиг. 3



Фиг. 4

движения полюс оболочки 2 начинает смещаться в направлении внешней нормали — навстречу оболочке 3. В зависимости w_* от δ_* появляется минимум, который соответствует некоторой критической величине начального зазора. Причина этого явления становится ясной, если рассмотреть во времени движение оболочек 2 и 3.

На фиг. 3 и 4 показано положение противоположащих поверхностей этих оболочек в различные моменты времени при $\varphi_p = \pi/6$, $J = 0.5 \cdot 10^{-3}$, $w_J = w/J$. При малом начальном зазоре ($\delta_* = 0.2$ фиг. 3, а) зона контакта оболочек 2 и 3 в начале движения занимает почти всю их поверхность, и оболочка 2 получает импульс в направлении внутренней нормали. С увеличением зазора ($\delta_* = 0.8$, фиг. 3, б) зона соприкосновения оболочек сужается, принимая вид бегущего контакта, и при еще больших зазорах ($\delta_* = 1.6$, фиг. 4, а) полюс оболочки 2, за счет обжатия ее оболочкой 3, начинает смещаться наружу. И, наконец, при больших зазорах ($\delta_* = 4$, фиг. 4, б) контакт между оболочками наблюдается только на части их противоположащих по-

верхностей, после чего оболочки расходятся. В связи с этим уменьшается импульс, передаваемый оболочке 2, и уменьшается ее нормальное смещение в полюсе.

Следует отметить, что для начального зазора, который выше был назван критическим, максимальный прогиб может на 20% превышать тот, который наблюдается при отсутствии начального зазора.

При большой площади расслоения ($\Phi_p \gg \pi/6$) ее дальнейшее увеличение практически не влияет на первый максимум прогиба внутренних отслоившихся слоев. Возрастание w_* с увеличением начального зазора при малой площади расслоения объясняется возрастанием изгибающих моментов на краю расслоения, причем надо иметь в виду, что зоны динамических краевых эффектов на границе расслоения при малых Φ_p перекрываются, захватывая и окрестность полюса оболочки 2.

Из приведенных результатов видно, что наличие расслоений в оболочках не только существенно влияет на количественные характеристики переходного процесса, но может и качественно изменить его вид. При исследовании переходных процессов использование контактной постановки может оказаться принципиально важным, как это имеет место в рассмотренной задаче.

Поступила 14 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Л. В., Ободан Н. И. Задачи устойчивости цилиндрической оболочки с переменной жесткостью при внешнем давлении. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 12.
2. Качанов Л. М. Расслоение стекловолоконистых труб при внешнем давлении. Механика полимеров, 1975, № 6.
3. Kulkarni S. V., Frederick D. Frequency as a parameter in delamination problems — a preliminary investigation. J. Composite Materials, 1971, vol. 5, No. 1.
4. Kulkarni S. V., Frederick D. Buckling of partially debonded layered cylindrical shells. AIAA Paper, 1973, No. 366.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.