МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 539.3

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

В. А. ЛЮБЧАК, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Сумы)

Первая краевая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами рассматривалась в [1]. Ниже изучена вторая краевая задача для анизотропной среды с разрезами, выяснены некоторые ее особенности.

1. Рассмотрим упругую анизотропную среду, ослабленную k-криволинейными разрезами L_j $(j=\overline{1,k})$. На берегах L_j зададим смещения $u^\pm(t)+iv^\pm(t)$, расклинивающие трещину (плюс относится к левому берегу L_j при движении от начала a_j к концу b_j).

Организованные таким образом разрывы в смещениях порождают сингулярное поле напряжений в среде. Требуется определить напряжения и смещения в окрестности трещины.

Пусть D — область, занятая средой, $L=\cup L_j$ — граница D. Будем предполагать, что L_j — простые разомкнутые непересекающиеся дуги Ляпунова.

Согласно [2], напряжения и смещения в среде выражаются через две аналитические относительно своих аргументов функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$.

Краевое условие второй основной задачи представим в виде

$$a(\psi)\Phi_1^\pm(t_1)+b(\psi)\overline{\Phi_1^\pm(t_1)}+\Phi_2^\pm(t_2)=F^\pm(t)$$

$$a(\psi)=a_0\frac{\mu_1\cos\psi-\sin\psi}{\mu_2\cos\psi-\sin\psi},\quad t\in L$$

$$b(\psi)=b_0\frac{\bar\mu_1\cos\psi-\sin\psi}{\mu_2\cos\psi-\sin\psi},\quad t_\nu=\operatorname{Re}t+\mu_\nu\operatorname{Im}t$$

$$a_0=\frac{\bar s_2g_1-s_1\bar g_2}{\bar s_2g_2-s_2\bar g_2},\quad b_0=\frac{\bar s_2\bar g_1-\bar s_1\bar g_2}{\bar s_2g_2-s_2\bar g_2} \tag{1.1}$$

$$F^\pm(t)=\left[\bar s_2\frac{dv^\pm(t)}{ds}-\bar g_2\frac{du^\pm(t)}{ds}\right][(\bar s_2g_2-s_2\bar g_2)(\mu_2\cos\psi-\sin\psi)]^{-1}$$

$$s_\nu=\mu_\nu^2\beta_{11}+\beta_{12}-\mu_\nu\beta_{16},\quad g_\nu=\mu_\nu\beta_{12}+\frac{\beta_{22}}{\mu_\nu}-\beta_{26}\quad(\nu=1,2)$$

Здесь β_{ik} — коэффициенты закона Гука для анизотропной среды, μ_ν — соответствующие характеристические числа [2], ψ — угол между положительным направлением нормали к левому берегу в точке t и осью ox, ds — элемент дуги L_j.

Предполагаем, что $F^\pm(t)$ удовлетворяет на L_j (быть может, исключая концы) условию H [3].

Краевые условия (1.1) при некоторых дополнительных соотношениях определяют функции $\Phi_\nu(z_\nu)$. Представим их в виде

$$\Phi_1(z_1)=A_1+\frac{1}{2\pi i}\int_L p(t)\frac{dt_1}{t_1-z_1}$$

$$\Phi_2(z_2)=A_2+\frac{1}{2\pi i}\int_L q(t)\frac{dt_2}{t_2-z_2}, \quad z_\nu\in D_\nu \quad (\nu=1,2) \tag{1.2}$$

$$p(t)=\{p_j(t),\, t\in L_j\},\ q(t)=\{q_j(t),\, t\in L_j\},\ t\in L$$

Здесь D_ν — соответствующие аффинные отображения области D. Так как на бесконечности напряжения отсутствуют, константы A_1 и A_2 определяются вращением на бесконечности ω.

Вычисляя предельные значения функций (1.2) и подставляя их в краевые условия (1.1) с учетом соотношений

$$2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{A_1}{\mu_1}+\frac{A_2}{\mu_2}\right\}=\frac{\omega}{\beta_{22}},\quad 2\,\mathrm{Re}\{A_1\mu_1^3+A_2\mu_2^3\}=-\frac{\omega}{\beta_{11}}$$

находим

$$q(t)=F_1(t)-a(\psi)p(t)-b(\psi)\overline{p(t)} \tag{1.3}$$

$$F_1(t)=F^+(t)-F^-(t),\ t\in L_j \quad (j=\overline{1,k})$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p(t)\,dt_1}{t_1-t_{10}}+\int_L K(t,t_0)p(t)\,dt_1+\int_L K_*(t,t_0)\overline{p(t)\,dt_1}=N(t_0) \tag{1.4}$$

$$K(t,t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{d}{dt_{10}}\left[\ln\frac{\bar t_2-\bar t_{20}}{t_1-t_{10}}\right]\right\}$$

$$K_*(t,t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{a_0}{b_0}\frac{d}{dt_{10}}\left[\ln\frac{\bar t_2-\bar t_{20}}{\bar t_1-\bar t_{10}}\right]\right\}$$

$$N(t_0)=\frac{1}{2\overline{b(\psi_0)}}\left\{\overline{F_2(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_L \overline{F_1(t)}\frac{\overline{dt_2}}{\bar t_2-\bar t_{20}}\right\}-$$

$$-\frac{\omega(g_2\cos\psi_0-s_2\sin\psi_0)}{\overline{(s_2g_1-s_1g_2)(\mu_1\cos\psi_0-\sin\psi_0)}}$$

$$F_2(t)=F^+(t)+F^-(t),\ \psi_0=\psi(t_0)$$

$$t_{\nu 0}=\mathrm{Re}\,t_0+\mu_\nu\,\mathrm{Im}\,t_0,\ t_0\in L_j \quad (j=\overline{1,k})$$

Формула (1.3) дает связь между плотностями $p(t)$ и $q(t)$. Соотношения (1.4) представляют собой систему сингулярных интегральных уравнений. В силу предположений относительно L, ядра K и K_* могут иметь не более чем слабую особенность.

К (1.4) присоединим дополнительные условия, заключающиеся в равенстве нулю главного вектора усилий, возникающих на каждом из L_j. После вычислений находим

$$\mathrm{Re}\left\{A\int_{L_j} p(t)\,dt_1+\mu_2\int_{L_j} F_1(t)\,dt_2\right\}=0$$

$$\operatorname{Re}\left\{B\int_{L_j} p(t)\,dt_1+\int_{L_j} F_1(t)\,dt_2\right\}=0$$

$$A=\mu_1-\mu_2a_0-\bar{\mu}_2\bar{b}_0,\quad B=1-a_0-\bar{b}_0 \tag{1.5}$$

Решение системы (1.5) дает

$$\int_{L_j} p(t)\,dt_1=\Lambda_j,\quad \Lambda_j=\frac{2(1-\mu_2)}{A\bar{B}-\bar{A}B}\int_{L_j} F_1(t)\,dt_2 \qquad (j=\overline{1\ k})$$

$$A\bar{B}-\bar{A}B=\frac{\beta_{11}^2}{\bar{s}_2g_2-s_2\bar{g}_2}|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1-\bar{\mu}_2|^2(\mu_2-\bar{\mu}_2)(\bar{\mu}_1-\mu_1)\neq0 \tag{1.6}$$

Зафиксируем жесткий поворот ω, фигурирующий в правой части интегрального уравнения (1.4). Для этого привлечем условие равенства нулю главного момента всех усилий на L

$$\operatorname{Re}\int_L \{t_1p(t)\,dt_1+t_2q(t)\,dt_2\}=0 \tag{1.7}$$

Таким образом система уравнений (1.4) в совокупности с дополнительными условиями (1.6) и (1.7) полностью определяют искомое решение.

Параметризуем контур L_j (ниже индекс j опускаем). Пусть

$$t=t(\beta),\quad t_\nu=\operatorname{Re}t+\mu_\nu\operatorname{Im}t=t_\nu(\beta)$$

$$a=t(-1),\quad b=t(1),\quad -1\leqslant\beta\leqslant1$$

$$p(t)=\Omega(\beta)=\frac{\Omega^\circ(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad F_1(t)=\frac{F_1^\circ(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Асимптотические значения напряжений в окрестности концов трещин вычисляются по формулам

$$\sigma_1=2\operatorname{Re}[\mu_1^2\Phi_1(z_1)+\mu_2^2\Phi_2(z_2)]$$

$$\sigma_2=2\operatorname{Re}[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)]$$

$$\tau_{12}=-2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)] \tag{1.8}$$

$$\Phi_1(z_1)=\mp\frac{\Omega^\circ(\pm1)\sqrt{t_1'(\pm1)}}{2\sqrt{2}\sqrt{\mp(z_1-c_1)}}$$

$$\Phi_2(z_2)=\mp\frac{\{F_1^\circ(\pm1)-a[\psi(c)]\Omega^\circ(\pm1)-b[\psi(c)]\overline{\Omega^\circ(\pm1)}\}\sqrt{t_1'(\pm1)}}{2\sqrt{2}\sqrt{\mp(z_2-c_2)}}$$

$$t_1'=\frac{dt_1}{d\beta},\quad z\in0(c),\quad c_\nu=\operatorname{Re}c+\mu_\nu\operatorname{Im}c \qquad (\nu=1,2)$$

Здесь верхний знак соответствует концу трещины $c=b$, нижний — началу $c=a$, $\psi(c)$ — значение угла ψ в точке c.

2. Пусть в среде имеется прямолинейная, ориентированная вдоль оси ox трещина длиной $2l$. На берегах ее зададим смещения

$$u^\pm(x)=0,\quad v^\pm(x)=\pm\alpha\sqrt{l^2-x^2},\quad \alpha=v_{\max}/l$$

Здесь плюс соответствует верхнему берегу. В данном случае (1.4) имеет вид

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\Omega(\beta)\frac{d\beta}{\beta-\beta_0}=N(\beta_0),\quad N(\beta_0)=\frac{s_2(i\alpha-\omega)}{s_2g_1-s_1g_2}\tag{2.1}$$

Его решение определяется выражением

$$\Omega^\circ(\beta)=\Omega(\beta)\sqrt{1-\beta^2}=i\beta\frac{s_2(i\alpha-\omega)}{s_2g_1-s_1g_2}\tag{2.2}$$

Дополнительное условие (1.7) дает

$$\omega\,\mathrm{Im}\left[\frac{s_2-s_1}{s_2g_1-s_1g_2}\right]=\alpha\,\mathrm{Re}\left[\frac{s_2-s_1}{s_2g_1-s_1g_2}\right]\tag{2.3}$$

В частности, для ортотропного тела из (2.3) получаем $\omega=0$. Используя (1.8), находим асимптотические значения напряжений на продолжении трещины за точку c_j

$$\sigma_1=\sqrt{\frac{l}{2\rho}}\,\mathrm{Re}\left[(i\alpha-\omega)\frac{s_1\mu_2^2-s_2\mu_1^2}{s_2g_1-s_1g_2}\right]$$

$$\sigma_2=\sqrt{\frac{l}{2\rho}}\,\mathrm{Re}\left[(i\alpha-\omega)\frac{s_1-s_2}{s_2g_1-s_1g_2}\right]$$

$$\tau_{12}=-\sqrt{\frac{l}{2\rho}}\,\mathrm{Re}\left[(i\alpha-\omega)\frac{s_1\mu_2-s_2\mu_1}{s_2g_1-s_1g_2}\right],\quad \rho=|x-c|\tag{2.4}$$

Для ортотропного случая из формулы (2.4) следует

$$\begin{gathered}\sigma_1=\alpha E_1\sqrt{\frac{l}{2\rho}}\frac{\nu_1(r_1+r_2)}{r_1r_2(r_2+r_2)^2-(\nu_1-r_1r_2)^2},\quad \tau_{12}=0\\ \sigma_2=\alpha E_1\sqrt{\frac{l}{2\rho}}\frac{r_1+r_2}{r_1r_2(r_1+r_2)^2-(\nu_1-r_1r_2)^2},\quad r_\nu=\mathrm{Im}\,\mu_\nu\quad(\nu=1,2)\end{gathered}\tag{2.5}$$

где E_1 и ν_1 — модуль упругости в направлении оси ox и соответствующий коэффициент Пуассона.

Например, для стеклопластика типа АГ-4С с характеристиками $E_1=2.1\cdot10^5$ *кГ/см*^{2}, $\nu_1=0.09$, $\mu_1=2.128\,i$, $\mu_2=0.539\,i$ имеем $\sigma_1/E_1=0.034\,\alpha(l/2\rho)^{1/2}$, $\sigma_2/E_2=0.379\,\alpha(l/2\rho)^{1/2}$.

Для случая изотропной среды $r_1=r_2=1$ и формулы (2.5) дают

$$\sigma_1=\alpha E_1\frac{2\nu_1}{(1+\nu_1)(3-\nu_1)}\sqrt{\frac{l}{2\rho}},\quad \sigma_2=\alpha E_1\frac{2}{(1+\nu_1)(3-\nu_1)}\sqrt{\frac{l}{2\rho}}$$

Этот результат совпадает с известными соотношениями, например [4].

Поступила 24 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.– Л., Гостехиздат, 1950.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.