МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1978

УДК 539.31

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С РАЗРЕЗАМИ

А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Б. М. ЗИНОВЬЕВ

(Новосибирск)

Решение задачи теории упругости для тела с разрезом сводится к численному определению плотностей обобщенных нагрузок и сил, распределенных в сплошном теле по области предполагаемого разреза. Приведено сравнение результатов численного и аналитического решений задач о пластине с прямолинейным разрезом и о пространстве с плоским круговым разрезом.

Работа представляет собой дальнейшее развитие опубликованных ранее исследований [1, 2].

Метод решения изложен применительно к расчету бесконечных тел, на тела произвольной формы он может быть распространен при помощи приема, изложенного в [3].

1. Метод решения задачи. Метод решения рассмотрим на примере плоской задачи; решение пространственной задачи строится по аналогии с решением плоской.

Рассмотрим напряженное и деформированное состояние упругой бесконечной пластины П с разрезом S (фиг. 1, *а*). В случае первой основной задачи, когда на берегах разреза задаются нагрузки $\mathbf{p}^+$ и $\mathbf{p}^-$, граничные условия могут быть записаны так:

$$p_i^\pm=\sigma_{1i}^\pm(S)\,n_1^\pm \qquad (i=1,\,2) \tag{1.1}$$

Здесь и далее (в п. 1, 2) $i=1, 2$ — направления осей локальной системы координат X_1, X_2; X_1 — нормаль; X_2 — касательная к S; n_1 — косинус внешней нормали к контуру берега разреза; знаками плюс и минус отмечены противоположные берега разреза.

Во второй основной задаче, когда на берегах разреза задаются перемещения $\mathbf{u}_0^\pm$, граничные условия имеют вид $\mathbf{u}_0^\pm=\mathbf{u}^\pm(S)$.

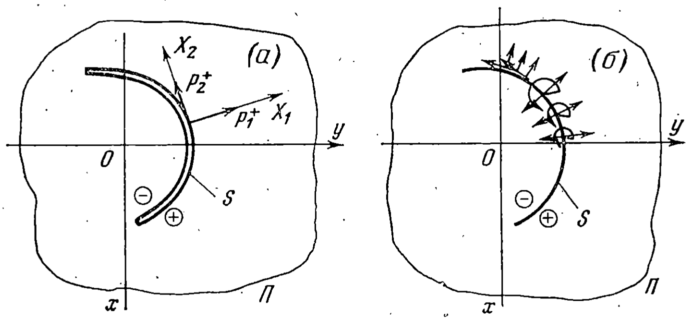
Заменим поставленную задачу эквивалентной. Рассмотрим сплошную и однородную пластину П, загруженную такими же внешними силами, как в исходной задаче, и, кроме того, системой компенсирующих нагрузок, распределенных по линии S, соответствующей разрезу (фиг. 1, *б*). Компенсирующие нагрузки найдем так, чтобы на S выполнялись заданные граничные условия. При этом входящие в правые части граничных условий напряжения и смещения будем рассматривать как пределы, вычисленные при подходе к S со стороны соответствующего берега разреза. Когда компенсирующие нагрузки будут определены, напряжения и смещения в любой точке пластины П могут быть вычислены суммированием действия заданных внешних сил и действия найденных компенсирующих нагрузок.

Приближенно задача об отыскании компенсирующих нагрузок может быть решена так: разобъем S на достаточно большое количество участков ΔS, в простейшем случае прямолинейных; зададим на каждом участке закон изменения нагрузки, например полином n-й степени с неизвестными коэффициентами; учитывая действие нагрузок на каждом участке, запишем граничные условия в дискретной форме для точек (будем называть их узловыми), распределенных на S, и получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов полиномов, аппроксимирующих компенсирующую нагрузку.

2. Определение вида компенсирующих нагрузок. В общем случае компенсирующие нагрузки должны создавать на S в сплошной пластине П разрывы в напряжениях и смещениях. Разрывы в напряжениях создают распределенные внутри пластины по отрезку L силы q. Предельные значения напряжений в произвольной точке этого отрезка, не совпадающей с его концами, могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{2} q_k A \lim_{X_1 \to \pm 0} \frac{X_1}{|X_1|} + \int\limits_{(L)} q_k \sigma_{ij}(P_k)\, dL \quad (i,j,k=1,2) \tag{2.1}$$

Здесь q_k — проекции вектора нагрузки $\mathbf{q}$ на оси X_1, X_2; $\sigma_{ij}(P_k)$ – напряжения при действии сосредоточенной силы $P_k=1$; $A=1$ при $i=j=k=1$ и $i\neq j$, $k=2$; $A=\nu$ при $i=j=2$, $k=1$; $A=0$ при $i\neq j$, $k=1$ и $i=j$, $k=2$; интеграл понимается в смысле главного значения.



Фиг. 1

В случае первой основной задачи нагрузки $\mathbf{q}$ определяются так: $\mathbf{q}=\mathbf{p}^{+}+\mathbf{p}^{-}$.

Разрывы в смещениях создают распределенные внутри пластины по отрезку L безмоментные и моментные диполи. Безмоментным, нормальным сосредоточенным диполем будем называть пару разнонаправленных сил $\mathbf{P}$ и $-\mathbf{P}$ с общей линией действия, причем $\lim Pa=\text{const}$ (при $a\to 0$, $\mathbf{P}\to\infty$), где a – расстояние между точками приложения сил. Моментным сосредоточенным диполем будем называть пару разнонаправленных параллельных сил $\mathbf{P}$ и $-\mathbf{P}$, точки приложения которых лежат на общей нормали к линиям их действия и $\lim Pa=\text{const}$ (при $a\to 0$, $\mathbf{P}\to\infty$).

Напряжения и смещения при действии сосредоточенного диполя могут быть получены дифференцированием решения о действии сосредоточенной силы [4]. Распределенные диполи обозначим $\mathbf{q}a$; ось безмоментных диполей qa_1 будем направлять по нормали к L, а направление сил q_2, составляющих моментные диполи qa_2 — совмещать с касательной к L.

Решение о действии распределенных диполей может быть получено интегрированием решения о действии сосредоточенного диполя.

Предельные значения смещений в произвольной точке отрезка L, не совпадающей с его концами, при действии распределенных внутри плоскости по этому отрезку диполей могут быть записаны так:

$$u_i = \lim_{X_1\to\pm 0} \frac{X_1}{|X_1|} \frac{(1+\nu)}{2E} B q a_k + \int\limits_{(L)} q a_k u_i (P a_k)\, dL \quad (i,k=1,2) \tag{2.2}$$

Здесь $u_i(Pa_k)$ — смещения при действии сосредоточенного диполя $Pa_k=1$, интеграл понимается в смысле главного значения, $B=1-\nu$ при $i=k=1$, $B=2$ при $i=k=2$, $B=0$ при $i\neq k$.

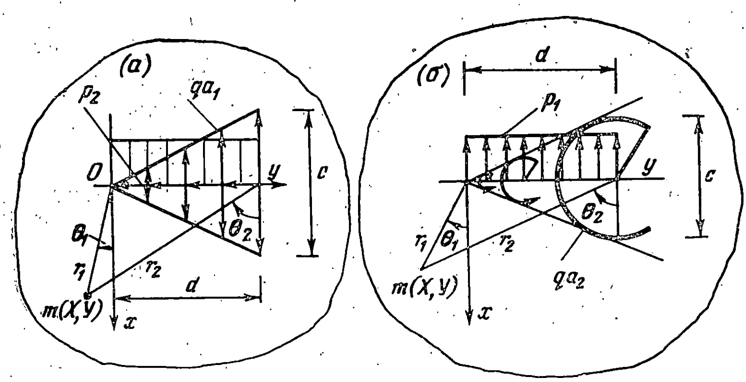
В общем случае напряжения на L, так же как и смещения, терпят разрыв. Величина скачка напряжений на L может быть получена из закона Гука и дифференциальных уравнений равновесия с использованием формул (2.1) и (2.2) или же непосредственными вычислениями

$$\Delta\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{+}-\sigma_{ij}^{-}=C\frac{\partial qa_k}{\partial x_2} \quad {\scriptstyle (i,j,k=1,2)} \tag{2.3}$$

Здесь $C=0$ при $i=j$, $k=1$ или $i\neq j$, $k=2$; $C=1$ при $i=j=1$, $k=2$; $C=\nu$ при $i\neq j$, $k=1$; $C=-(2+\nu)$ при $i=j=k=2$; σ_{ij}^{+}, σ_{ij}^{-} — предельные значения напряжений на L, вычисляемые при подходе к L с противоположных сторон.

При $\mathbf{q}\mathbf{a}=\mathrm{const}$ напряжения на L выражаются непрерывными функциями[1].

Чтобы создать нагрузки, дающие на L разрывы только в смещениях, необходимо определенным образом скомбинировать распределенные диполи и распределенные силы.



Фиг. 2

Безмоментные диполи qa_1 в сочетании с нагрузкой $p_2=-\nu\partial qa_1/\partial x_2$ дают разрыв в смещениях u_1 по нормали к L:

$$\Delta u_1=u_1^{+}-u_1^{-}=(1+\nu)(1-\nu)qa_1/E \tag{2.4}$$

без разрывов в напряжениях σ_{ij} ($i, j=1, 2$).

Моментные диполи qa_2 в сочетании с нагрузкой $p_1=-\partial qa_2/\partial x_2$ дают разрыв в касательных к L смещениях u_2:

$$\Delta u_2=u_2^{+}-u_2^{-}=2(1+\nu)qa_2/E \tag{2.5}$$

без разрывов в напряжениях σ_{1j} ($j=1, 2$) (разрыв в напряжениях σ_{22} сохраняется).

В случае плоской деформации в приведенных выше выражениях следует заменить ν на $\nu/(1-\nu)$ и E на $E/(1-\nu^2)$.

Сочетания $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}\mathbf{a}$, определяемые из данных выражений, будем называть обобщенной нагрузкой. Будем различать обобщенную безмоментную и обобщенную моментную нагрузки. В случае второй основной задачи, когда заданы смещения точек берегов разреза $\mathbf{u}_0^{+}$ и $\mathbf{u}_0^{-}$, обобщенные нагрузки легко определяются: из (2.4) и (2.5) находим qa_1 и qa_2:

$$qa_i=(u_{0i}^{+}-u_{0i}^{-})N \quad {\scriptstyle (i=1,\,2)}$$

[1] В [1, 2] рассматривалось действие равномерно распределенных диполей, поэтому не был учтен разрывной характер напряжений, имеющий место в общем случае; вследствие чего результаты решения задач, приведенных в указанных работах, были огрублены.

Здесь $N=E/(1-\nu^2)$ при $i=1$, $N=E/2(1+\nu)=G$ при $i=2$; затем по найденным qa_i определяем p_1 и p_2.

3. Напряжения и смещения при действии обобщенных нагрузок внутри упругих плоскости и пространства. 1. Приведем выражения для напряжений и смещений при действии распределенной внутри плоскости по прямолинейному отрезку обобщенной нагрузки, изменяющейся по линейному закону.

При действии безмоментных обобщенных нагрузок $p_2=-\nu k$, $qa_1=ky$ (фиг. 2, *а*)

$$\sigma_x=-K\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\{(1+\nu)\mu\cos^2\theta_i+(1-\nu)[\lambda\sin\theta_i-(1-\nu)\ln r_i]\}$$

$$\sigma_y=-K\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(1+3\nu)\lambda\sin\theta_i-(1+\nu)\mu\cos^2\theta_i-(1-\nu^2)\ln r_i] \tag{3.1}$$

$$\tau_{xy}=K\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(1+\nu)\mu\sin\theta_i-(1-\nu)\lambda]\cos\theta_i$$

$$u=K_1\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(1+\nu)f\sin\theta_i+(1-\nu)^2X\ln r_i+2(1-\nu)Y\theta_i]$$

$$v=K_1\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(1+\nu)(Y\ln r_i+f\cos\theta_i)+(1-\nu)^2r_i\sin\theta_i+$$

$$+\nu(3-\nu)r_i\sin\theta_i\ln r_i-2(1-\nu)X\theta_i]$$

$$K=k/4\pi,\ K_1=k(1+\nu)/(4\pi E),\ \lambda=\sin\theta_i+Y/r_i$$

$$\mu=(1-\nu)+2\lambda\sin\theta_i,\ \eta=1+\lambda\sin\theta_i,\ f=Y\cos\theta_i+X\sin\theta_i$$

$$r_i^2=X^2+(Y-y_i)^2,\ \cos\theta_i=X/r_i,\ \sin\theta_i=-(Y-y_i)/r_i,\ k=C/d$$

При действии моментных обобщенных нагрузок $p_1=-k$, $qa_2=ky$ (фиг. 2, *б*)

$$\sigma_x=K\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[2(1+\nu)\eta\sin\theta_i+(1-\nu)\lambda]\cos\theta_i \tag{3.2}$$

$$\sigma_y=-K\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[2(1+\nu)\eta\cos\theta_i\sin\theta_i+(3+\nu)\lambda\cos\theta_i-4(1+\nu)\theta_i]$$

$$\tau_{xy}=-K\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(3+\nu)\lambda\sin\theta_i-2(1+\nu)\eta\cos^2\theta_i-2(1+\nu)\ln r_i]$$

$$u=K_1\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(3-\nu)\sin\theta_i r_i\ln r_i+(1+\nu)(f\cos\theta_i+Y\ln r_i)-$$

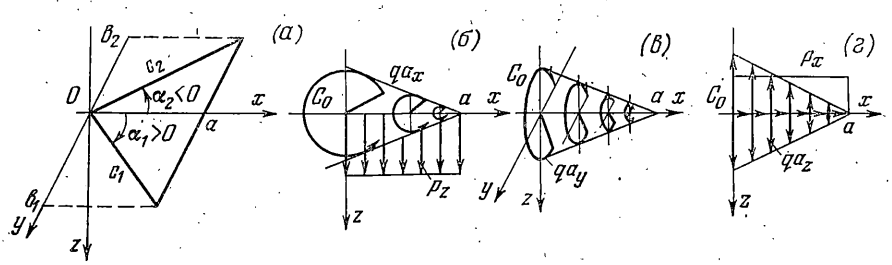
$$-(1-3\nu)r_i\sin\theta_i-4\nu X\theta_i]$$

$$v=-K_1\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(1+\nu)f\sin\theta_i-2(3+\nu)X\ln r_i-4Y\theta_i]$$

2. Приведем выражения для напряжений и смещений при действии распределенных внутри пространства по плоской треугольной площадке обобщенных нагрузок, изменяющихся по линейному закону.

Плоская треугольная площадка лежит в плоскости XOY (фиг. 3, *а*), нагрузка изменяется по линейному закону вдоль оси $0X$, оставаясь постоянной вдоль оси $0Y$.

Рассмотрено действие трех видов обобщенных нагрузок: двух моментных, одна из которых является сочетанием моментных диполей $qa_x = C_0(1-kx)$ и распределенных сил $p_z = C_0/a$ (фиг. 3, *б*), а другая представляет собой распределенные моментные диполи $qa_y = C_0(1-kx)$ (фиг. 3, *в*) — в последнем случае действие диполей qa_y, интенсивность



Фиг. 3

которых изменяется только вдоль оси $0X$, не вызывает разрыва в напряжениях на площадках, совпадающих с нагруженной, и безмоментной, представляющей собой сочетание безмоментных диполей $qa_z = C_0(1-kx)$ и распределенных сил $p_x = \nu C_0/[a(1-\nu)]$ (фиг. 3, *г*).

В приведенных ниже выражениях верхний индекс у компонент смещений и напряжений совпадает с индексом диполей, например, v^x означает смещение вдоль оси $0Y$ при действии моментных диполей qa_x (в сочетании с нагрузкой p_z, фиг. 3, *б*).

При действии обобщенной нагрузки по фиг. 3, *б* напряжения и смещения запишутся так:

$$\begin{gathered} u^x = K[(3-4\nu)\chi_1 + \chi_5 + kZ\varphi_4], \quad v^x = K[\chi_4 + kZ\varphi_5], \quad w^x = K\{\chi_2 + k[Z\theta - (3-4\nu)\varphi_3]\} \\ \sigma_x{}^x = -K_1\{(1-2\nu)\chi_9 + \Delta_9 - k[ZF_3 - 2\nu\theta]\}, \quad \sigma_y{}^x = K_1\{(1-2\nu)\chi_9 - \Delta_6 + k[ZF_4 - 2\nu\theta]\} \\ \sigma_z{}^x = K_1\{(1-2\nu)\chi_9 - \Delta_4 - k[Z(F_3+F_4) + 2(1-\nu)\theta]\} \\ \tau_{xz}{}^x = -K_1\{(1-2\nu)\chi_7 + \Delta_8 + k[(1-2\nu)\varphi_4 + Z^2F_2]\} \\ \tau_{xy}{}^x = -K_1[(1-2\nu)\chi_8 + \Delta_{10} + kZF_5], \quad \tau_{yz}{}^x = -K_1\{\Delta_5 + k[(1-2\nu)\varphi_5 + Z^2F_1]\} \end{gathered} \tag{3.3}$$

При действии диполей по фиг. 3, *в*

$$\begin{gathered} u^y = K\chi_4, \quad v^y = K[(3-4\nu)\chi_1 + \chi_6], \quad w^y = K\chi_3 \\ \sigma_x{}^y = K_1[(1-2\nu)\chi_8 - \Delta_{10}], \quad \sigma_y{}^y = -K_1[(1-2\nu)\chi_8 + \Delta_7], \quad \sigma_z{}^y = K_1[(1-2\nu)\chi_8 - \Delta_3] \\ \tau_{xz}{}^y = -K_1\Delta_5, \quad \tau_{xy}{}^y = -K_1[(1-2\nu)\chi_9 + \Delta_6], \quad \tau_{yz}{}^y = -K_1[(1-2\nu)\chi_7 + \Delta_1] \end{gathered} \tag{3.4}$$

При действии обобщенной нагрузки по фиг. 3, *г*

$$\begin{gathered} u^z = K\{\chi_2 + k\nu_1[\varphi_1 - 4(1-\nu)\varphi_3]\}, \quad v^z = K[\chi_3 + k\nu_1\varphi_6], \quad w^z = K[4(1-\nu)\chi_1 - \chi_5 - \chi_6 + k\nu_1 Z\varphi_4] \\ \sigma_x{}^z = K_1\{(1-2\nu)\chi_7 - \Delta_8 - k\nu_1[(1-2\nu)\varphi_4 + F_6]\}, \quad \sigma_y{}^z = K_1\{(1-2\nu)\chi_7 - \Delta_1 + k\nu_1[(1-2\nu)\varphi_4 - F_7]\} \\ \sigma_z{}^z = -K_1\{(1-2\nu)\chi_7 + \Delta_2 - k\nu_1[(1-2\nu)\varphi_4 - Z^2F_2]\} \\ \tau_{xz}{}^z = -K_1\{(1-2\nu)\chi_9 + \Delta_4 - k\nu_1[ZF_3 - 2(1-\nu)\theta]\} \quad \tau_{yz}{}^z = -K_1[(1-2\nu)\chi_8 + \Delta_3 + k\nu_1 ZF_5] \\ \tau_{xy}{}^z = -K_1\{\Delta_5 + k\nu_1[(1-2\nu)\varphi_5 + F_8]\} \quad \chi_1 = d\theta + kZ\varphi_4. \\ \chi_2 = -d(\varphi_4 - Z^2F_2) + k(\varphi_2 + 2Z\theta - Z^2F_3), \quad \chi_3 = -d(\varphi_5 - Z^2F_1) - k(\varphi_6 - Z^2F_5) \\ \chi_4 = Z(dF_5 + kF_8), \quad \chi_5 = d(\theta - ZF_3) + kZF_6, \quad \chi_6 = d(\theta - ZF_4) + kZF_7 \\ \chi_7 = d(F_3 + F_4) - k(\varphi_4 - Z^2F_2), \quad \chi_8 = Z(dF_1 + kF_5), \quad \chi_9 = dZF_2 + k(\theta - ZF_3) \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\Delta_1=d(2F_4+F_3+Z^2\Phi_5)+k(Z^2\Phi_7-F_7),\quad \Delta_2=-dZ^2(\Phi_4+\Phi_5)+3kZ^2(Z^2\Phi_1-F_2)$$
$$\Delta_3=dZ(3Z^2\Phi_2-2F_1)+kZ(Z^2\Phi_3-2F_5)$$
$$\Delta_4=dZ(3Z^2\Phi_1-2F_2)+k[Z(Z^2\Phi_4+F_4+3F_3)-\theta]$$
$$\Delta_5=d(Z^2\Phi_3-F_5)+k(Z^2\Phi_8-F_8),\quad \Delta_6=dZ\Phi_7+k(\theta-ZF_3+Z\Phi_6)$$
$$\Delta_7=Zd(5F_1-\Phi_8-3Z^2\Phi_2)+kZ(5F_5-3\Phi_9-Z^2\Phi_3)$$
$$\Delta_8=3\chi_7-\Delta_1-\Delta_2,\quad \Delta_9=3\chi_9-\Delta_6-\Delta_4,\quad \Delta_{10}=3\chi_8-\Delta_7-\Delta_3$$

$$\Phi_1=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i(\zeta_2\sin\alpha_i-\eta_2),\qquad \Phi_2=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\zeta_2\cos\alpha_i$$

$$\Phi_3=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[3B\zeta_2\sin\alpha_i-\rho_3\cos\alpha_2]\cos\alpha_i$$

$$\Phi_4=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[3B\zeta_2\sin^2\alpha_i-\rho_3\sin\alpha_i\cos\alpha_i-3(X-a)\eta_2]$$

$$\Phi_5=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[\rho_3\sin\alpha_i+3B\zeta_2\cos\alpha_i]\cos\alpha_i$$

$$\Phi_6=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\cos\alpha_i[B\cos\alpha_i(1-3\sin^2\alpha_i)\zeta_1+3B^3\zeta_2\cos\alpha_i\sin^2\alpha_i-$$
$$-3\zeta_3\sin\alpha_i\cos^2\alpha_i+B^2\sin\alpha_i(1-3\cos^2\alpha_i)\rho_3]$$

$$\Phi_7=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[2B\rho_3\cos\alpha_i\sin^2\alpha_i+\zeta_1\sin^3\alpha_i+3B^2\zeta_2\sin\alpha_i\cos^2\alpha_i-\eta_1]$$

$$\Phi_8=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\cos\alpha_i[2B\rho_3\sin\alpha_i\cos\alpha_i-\zeta_1\cos^2\alpha_i-3B^2\sin^2\alpha_i\zeta_2]$$

$$\Phi_9=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\cos\alpha_i[\zeta_3\cos^3\alpha_i+B\zeta_1\sin\alpha_i\cos^2\alpha_i+B^3\zeta_2\sin^3\alpha_i-B^2\rho_3\sin^2\alpha_i\cos\alpha_i]$$

$$\varphi_1=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[Bf_1\sin^2\alpha_i+\sin\alpha_i\cos\alpha_i\Delta R-(X-a)f_2]$$

$$\varphi_2=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\cos\alpha_i[Bf_1\cos\alpha_i-\Delta R\sin\alpha_i],\quad \varphi_3=\varphi_1+\varphi_2+Z\theta$$

$$\varphi_4=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i(f_1\sin\alpha_i-f_2),\qquad \varphi_5=\sum_{i=1}^{2}(-1)f_1\cos\alpha_i$$

$$\varphi_6=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[Bf_1\sin\alpha_i+\Delta R\cos\alpha_i]\cos\alpha_i$$

$$F_1=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i f_3\cos\alpha_i,\qquad F_2=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i(f_4-f_3\sin\alpha_i)$$

$$F_3=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[(X-a)f_4-Bf_3\sin^2\alpha_i+f_3\sin\alpha_i\cos\alpha_i]$$

$$F_4=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\cos\alpha_i[Bf_3\cos\alpha_i+f_5\sin\alpha_i],\quad F_5=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i[Bf_3\sin\alpha_i-f_5\cos\alpha_i]\cos\alpha_i$$

$$F_6=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\left[3\sin\alpha_i\left(1-\sin^2\frac{\alpha_i}{3}\right)f_1-2f_2-(X-a)^2f_4+Cf_3\sin\alpha_i-2Bf_5\sin^2\alpha_i\cos\alpha_i\right]$$

$$F_7=3\varphi_4-F_6-Z^2F_2,\quad F_8=\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\cos\alpha_i[Cf_3-2Bf_5\cos\alpha_i\sin\alpha_i+f_1\cos^2\alpha_i]$$

$$F_9=3\varphi_5-F_8-Z^2F_1$$

$$\theta=2\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\left[\operatorname{arctg}\frac{(\rho_2+B\cos\alpha_i)(A-c_i)/(\rho_2+R_1)+\rho_2\sin\alpha_i}{Z\cos\alpha_i}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{A(\rho_2+B\cos\alpha_i)/(\rho_2+R_0)+\rho_2\sin\alpha_i}{Z\cos\alpha_i}\right]$$

$$\zeta_1=\frac{1}{\rho_2^2}\left[\frac{(A-c_i)^3}{R_1^3}-\frac{A^3}{R_0^3}\right],\quad \zeta_2=\left(f_3-\frac{\zeta_1}{3}\right)\Big/\rho_2^2,\quad \zeta_3=\frac{1}{3}\rho_2^2\rho_3-f_5,\quad \rho_3=1/R_1^3-1/R_0^3$$

$$\eta_1=(Y-b_i)^3/(\rho_0^2R_1^3),\quad \eta_2=(f_4-\eta_1/3)/\rho_0^2,\quad f_1=\ln(r_1/\rho_1),\quad f_2=\ln(r_2)$$

$$f_3=[(A-c_i)/R_1-A/R_0]/\rho_2^2,\quad f_4=(Y-b_i)/(R_1\rho_0^2),\quad f_5=1/R_1-1/R_0,\quad \rho_0^2=Z^2+(X-a)^2$$

$$R_0^2=X^2+Y^2+Z^2,\quad R_1^2=\rho_0^2+(Y-b_i)^2,\quad \rho_1=R_0+A,\quad \rho_2^2=Z^2+B^2$$

$$r_1=R_1+A-c_i,\quad r_2=R_1+Y-b_i,\quad \Delta R=R_1-R_0$$

$$A=X\cos\alpha_i+Y\sin\alpha_i,\quad B=X\sin\alpha_i-Y\cos\alpha_i,\quad C=B^2\sin^2\alpha_i-\rho_2^3\cos^2\alpha_i$$

$$D=B^2\cos^2\alpha_i-\rho_2^2\sin^2\alpha_i$$

$$K=C_0(1+\nu)/[8\pi E(1-\nu)],\quad K_1=C_0/[8\pi(1-\nu)],\quad k=1/a,\quad d=1-kX,\quad c_i=a/\cos\alpha_i$$

$$\nu_1=\nu/(1-\nu)$$

4. Примеры решения задач. 1. Рассмотрим задачу о пластине с прямолинейным разрезом длиной $S=2a$, равномерно растягиваемой на бесконечности нормальным к оси разреза напряжением q. Берега разреза свободны от напряжений (фиг. 4, *а*)

$$\sigma_x=\tau_{xy}=0 \quad \text{при} \quad X=0, \quad -a<Y<a \tag{4.1}$$

Точное решение этой задачи известно [5].

Заменим поставленную задачу эквивалентной: рассмотрим равновесие сплошной пластины, равномерно растягиваемой заданным напряжением q и нагруженной на отрезке $-a<Y<a$ компенсирующими нагрузками. Здесь в качестве компенсирующих нагрузок ввиду симметрии граничных условий относительно оси $0Y$ выбираем обобщенные безмоментные нагрузки. Значения нагрузок отыскиваем приближенно, удовлетворяя условию (4.1) в узловых точках на S. Весь отрезок S разбиваем на $2n$ участков $\Delta a=a/n$ и полагаем, что в пределах каждого участка обобщенные нагрузки изменяются по линейному закону.

На каждом i-м участке нагрузки представляем в виде суммы двух треугольных эпюр с основанием Δa_i и неизвестными ординатами C_{2i} и C_{2i-1} на концах участка. На последних участках эпюры имеют вид треугольников с нулевыми ординатами в концевых точках S. Ввиду симметрии задачи относительно оси OX условиям (4.1) достаточно удовлетворить на одной половине отрезка S. Количество узловых точек выбирается в соответствии с количеством неизвестных.

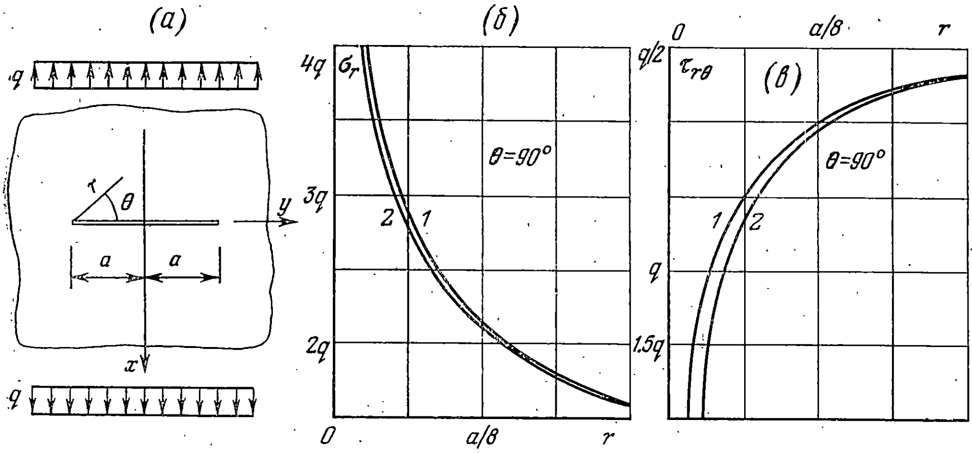
При линейной аппроксимации нагрузок на каждом участке и с учетом симметрии задачи относительно OX имеем $2n-1$ неизвестных ординат C_j $(j=1,\ldots,2n-1)$ и на каждом участке, кроме последних, имеем две узловые точки. Запишем условие $\sigma_x=0$ для точек одной половины отрезка S, учитывая действие нагрузок на всех участках, и получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания ординат C_j. Коэффициенты при C_j системы уравнений, которыми являются напряжения σ_x в узловых точках, вычисляем по соответствующей формуле из (3.1) при $C_j=1$.

Условие $\tau_{xy}=0$ на S удовлетворяется автоматически вследствие симметрии обобщенной безмоментной нагрузки относительно оси OY. После того, как в результате решения системы уравнений значения нагрузок определены, напряжения и смещения в любой точке плоскости подсчитываются по формулам (3.1) с учетом действия всех нагрузок и растяжения q на бесконечности.

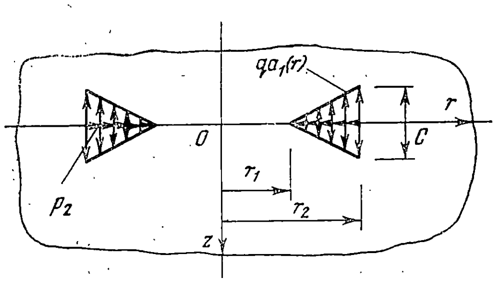
На фиг. 4, *б*, *в* приведены эпюры напряжений, полученные по результатам аналитического и численного решения при $n=70$. Результаты численного решения (кривые *2*) на некотором удалении от угловой точки разреза достаточно хорошо совпадают с точным решением (кривые *1*).

2. В качестве примера пространственной задачи рассмотрена задача об упругом пространстве с плоским круговым разрезом радиуса R_0, растягиваемым на бесконечности напряжением q, нормальным к плоскости разреза. Берега разреза свободны от напряжений: $\sigma_z=\tau_{z\theta}=\tau_{rz}=0$ при $r<R_0$, $z=0$. Точное решение этой задачи известно [6].

Заменим исходную задачу эквивалентной: рассмотрим упругое пространство без разреза, растягиваемое на бесконечности напряжением q и нагруженное по плоской круговой площадке S радиуса R_0 обобщенными безмоментными нагрузками, постоянными вдоль дуги окружности и переменными вдоль r. Обобщенные нагрузки в



Фиг. 4



Фиг. 5

данном случае представляют комбинацию распределенных безмоментных диполей $qa_z(r)$ и распределенных сил

$$p_r(r)=[-qa_z(r)]_r'\nu/(1-\nu)$$

Значения нагрузок должны быть такими, чтобы на S удовлетворялось условие $\sigma_z=0$ (условия $\tau_{rz}=\tau_{z\theta}=0$ на S удовлетворяются автоматически вследствие круговой симметрии нагрузок относительно $0Z$ и плоскости разреза). Приближенные значения нагрузок определяем по аналогии с решением предыдущей плоской задачи: круг разбиваем на n колец, на каждом кольце закон изменения нагрузки вдоль r принимаем линейным, условие $\sigma_z=0$ записываем для узловых точек на S (по две точки на каждом кольце, кроме последнего) с учетом действия нагрузок на всех участках; в результате получаем систему $2n-1$ линейных алгебраических уравнений для определения крайних ординат нагрузок для каждого кольца.

Для вычисления коэффициентов системы уравнений было получено выражение предельных значений напряжений $\lim \sigma_z$ (при $z\to 0$) при действии обобщенной безмоментной нагрузки, распределенной по кольцу внутри упругого пространства и изменяющейся по линейному закону ($p_2=-k\nu/(1-\nu)$, $qa_1(r)=k(r-r_1)$, фиг. 5):

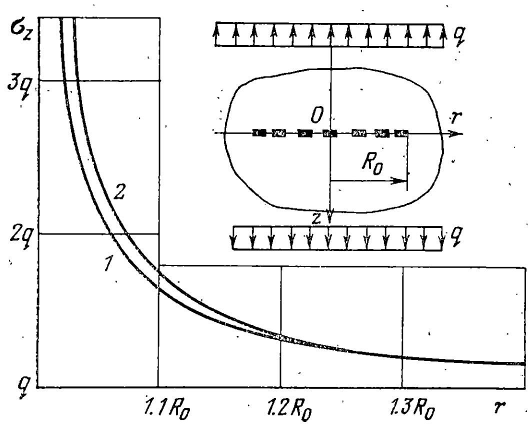
$$\lim_{z\to 0}\sigma_z=-\frac{k(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}\int_0^\pi\left\{\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{r}{r_0}-\ln r_0'\right)+\frac{r}{r_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{r_0^3}\left[R(R-r\cos\varphi)+r_1(r-R\cos\varphi)\right]\right\}\Bigg|_{r=r_1}^{r=r_2}d\varphi$$

$$r_0^2=R^2+r^2-2Rr\cos\varphi,\qquad r_0'=r_0+r-R\cos\varphi,\qquad k=C/(r_2-r_1)$$

Здесь R – координата точки, где вычисляется напряжение.

Для точек, не принадлежащих границе области интегрирования, т. е. при $R\neq r_1$ и $R\neq r_2$, подынтегральная функция является регулярной и значение интеграла может быть вычислено с любой точностью, например по методу Симпсона.



Фиг. 6

На фиг. 6 приведены эпюры напряжений σ_z в плоскости разреза, полученные по результатам аналитического (кривая *1*) и численного (кривая *2*) решений при $n=21$. При приближении к кромке разреза результаты численного и аналитического решения все более расходятся между собой. Уточнить численное решение можно путем выделения особенностей вблизи края разреза.

Поступила 6 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зиновьев Б. М.* Один приближенный метод расчета тел с разрезами. В кн.: Механика деформируемого тела и расчет сооружений. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1972, вып. 137, стр. 105.
2. *Александров А. Я., Зиновьев Б. М.* Приближенный метод решения плоских и пространственных задач теории упругости для тел с армирующими элементами и разрезами. В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975, стр. 15–25.
3. *Александров А. Я.* Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2.
4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. М., ОНТИ, 1934.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.