

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ СТРИНГЕРАМИ
ИЛИ БАЛКАМИ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Е. Л. НАХМЕЙН, Б. М. НУЛЛЕР

(Ленинград)

Рассматриваются контактные задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена периодической системой стрингеров или балочных плит, имеющих равное сопротивление продольным растягивающим и сжимающим напряжениям. Решения этих задач выражаются в квадратурах, а в некоторых частных случаях — в элементарных функциях. Рассматриваются также предельные задачи, соответствующие неограниченно большому периоду, т. е. случаю сцепления полуплоскости с одним или несколькими стрингерами или балками.

Ранее подобные контактные задачи исследовались для упругих областей, подкреплённых одиночными тонкостенными элементами [1-3], причем равное сопротивление понималось в более узком смысле. Периодические задачи о стрингерах и балках постоянной жесткости исследовались в [4-7].

1. Рассмотрим периодическую с периодом 2π контактную задачу для упругой полуплоскости $y \leq 0$, усиленной вдоль совокупности L_1 отрезков $[a_k, b_k]$ действительной оси $y=0$ системой N абсолютно гибких мелановских стержней (стрингеров) переменной жесткости. Пусть $-\pi \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_N < \pi$, L_2 — дополнение L_1 до отрезка $[-\pi, \pi]$, на L_2 касательные и нормальные напряжения равны нулю, к концам k -го стрингера a_k и b_k приложены продольные растягивающие силы P_k^a и P_k^b (фиг. 1) к его внешней поверхности — только касательная нагрузка $p(x)$. Выпишем уравнение деформации стрингера, спаянного с границей полуплоскости

$$[S(x)\sigma(x)]' - h\tau_{xy}(x, 0) = -p(x), \quad \sigma(x) = E u'(x, 0) \quad (1.1)$$

Здесь штрих означает производную по x , E — модуль упругости, $S(x)$ — площадь поперечного сечения стрингера, h — толщина пластины (полуплоскости); для случая плоской деформации полупространства, усиленного гибкими упругими накладками, в уравнении (1.1) $h=1$, $S(x)$ — толщина накладок.

Если функция $S(x)$ задана, то для определения внутренних $\sigma(x)$ и контактных $\tau_{xy}(x, 0)$ напряжений в стрингере необходимо решать сложное интегро-дифференциальное уравнение на L_1 ; даже при $S(x) = \text{const}$ и $N=1$ задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе. Если же функцию $S(x)$ нужно найти, например, из условий, налагаемых на распределение контактных напряжений $\tau_{xy}(x, 0)$ или на деформацию стрингера $u'(x, 0)$, то решение существенно упрощается. В первом случае возникает основная задача для полуплоскости, во втором — смешанная. Решение этих задач всегда существует и единственно, после его нахождения функция $S(x)$ определяется из уравнения (1.1) и из условий в точках a_k и b_k также единственным образом. Дополнительное ограничение, при котором решение может быть механически реализовано, имеет вид

$$S(x) \geq 0 \quad (x \in L_1) \quad (1.2)$$

Рассмотрим более интересный второй случай, пусть задана функция $\sigma(x)$. Тогда для нижней полуплоскости получим смешанную задачу с граничными условиями

$$\sigma_y(x, 0) = 0 \quad (x \in [-\pi, \pi]) \quad (1.3)$$

$$u'(x, 0) = E^{-1}\sigma(x) \quad (x \in L_1), \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (x \in L_2)$$

периодически с периодом 2π продолженными на всю действительную ось. Используя представление [8]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad 2\mu\varepsilon = (\kappa + 1) \operatorname{Im} \Phi(z) \quad (1.4)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}$$

где $z = x + iy$, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\kappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния, задачу (1.3) можно свести к краевой задаче Римана для периодической функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = f(x) \quad (x \in L_1) \quad (1.5)$$

$$f(x) = 4\mu E^{-1}(\kappa + 1)^{-1} \sigma(x)$$

при дополнительном условии $\Phi(z) = \bar{\Phi}(\bar{z})$.

Решение задачи (1.5) строится на основе теории краевых задач для автоморфных функций [9, 10]. Согласно [11], имеем

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{4\pi i} \int_{L_1} \frac{f(t) K(t, z) dt}{X^+(t)} + X(z) P(z) \quad (1.6)$$

$$X(z) = \prod_{k=1}^N \left(\sin \frac{z - a_k}{2} \sin \frac{z - b_k}{2} \right)^{-1/2}$$

Выбранная ветвь канонического решения $X(z)$ при $z \rightarrow \pm\infty$ определяется асимптотикой

$$X(z) = (\mp 2i)^N \exp(\pm i/2 N z i \mp \delta i) + O\{\exp[\pm i/2(N-1)zi]\}$$

$$\delta = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N (a_k + b_k) \quad (1.7)$$

при N нечетном

$$K(t, z) = [\sin i/2(t-z)]^{-1} \quad (1.8)$$

$$P(z) = \sum_{k=1}^{1/2(N+1)} \left\{ C_{k1} \cos \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) z - \delta \right] + C_{k2} \sin \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) z - \delta \right] \right\}$$

при N четном

$$K(t, z) = \operatorname{ctg} \frac{t-z}{2}, \quad P(z) = \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}N} \{C_{h1} \cos(kz-\delta) + C_{h2} \sin(kz-\delta)\} + C_{01} \quad (1.9)$$

Интеграл (1.6) понимается в смысле главного значения по Коши.

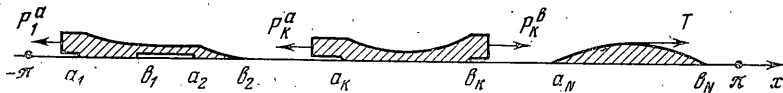
Вещественные постоянные C_{h1}, C_{h2} в случае несвязанных между собой стрингеров можно определить, следуя [11], из условий на бесконечности и из уравнений

$$\int_{a_k}^{b_k} [h\tau_{xy}(x, 0) - p(x)] dx = P_k^b - P_k^a \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (1.10)$$

Если соседние стрингеры с N_1 -го по N_2 -й соединены упругими ненагруженными связями, как два первых на фиг. 1, то $N_2 - N_1$ внутренних усилий $P_{k+1}^a = P_k^b$ становятся неизвестными. Для определения к (1.10) нужно добавить уравнения

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} \left[u'(x, 0) - \frac{P_k^b}{D(x)} \right] dx = 0 \quad (k=N_1, \dots, N_2-1) \quad (1.11)$$

где $D(x)$ — жесткость связующих стрингеров.



Фиг. 1

Следует заметить, что в ряде практически важных случаев интеграл (1.6), контактные напряжения $\tau_{xy}(x, 0)$, а иногда и форма стрингеров $S(x)$ выражаются в элементарных функциях. В частности, если $N=1$ и $\sigma(x)$ представляет собой тригонометрический полином, это достигается путем перехода от интегрирования по отрезку $[a_1, b_1]$ к интегрированию по замкнутому контуру на плоскости $w=e^{iz}$ [4, 11]. В случае неперодической задачи, когда к полуплоскости припаян один или несколько стрингеров, решение может быть получено путем непосредственного применения теории Н. И. Мусхелишвили [8] либо в результате предельного перехода, как это будет показано на примерах. Аналогичные периодические задачи для упругой полосы сводятся к нормальным системам Пуанкаре — Коха различными методами кусочно-однородных решений [7, 11]. К неперодическим задачам о нескольких стрингерах, припаянных к полосе, полуполосе или прямоугольнику, применим метод [7].

2. Рассмотрим примеры, в которых стрингеры имеют равное сопротивление разрывным напряжениям. Подобные условия естественны при проектировании упругих конструкций, несущих фиксированную нагрузку, они возникают также в задачах оптимизации: можно показать, что если допустимые нормальные напряжения в k -м однородном подкрепляющем стрингере равны σ_k , то минимальным весом обладают стрингеры с постоянными напряжениями $\sigma(x) = \sigma_k, x \in [a_k, b_k]$.

Пример 1. Пусть $N=1, \sigma(x) = \sigma_1, p(x) \equiv 0, a_1 = -a, b_1 = a$ (k -й стрингер на фиг. 1). Тогда $C_{11} = \frac{1}{4}\pi^{-1}h^{-1}(P_1^a - P_1^b), C_{12} = \frac{1}{4}\sigma_1^\infty, \sigma_1^\infty$ — однородные растягивающие напряжения на бесконечности.

Полагая $\sigma_x^\infty = 0$, в силу (1.1), (1.4), (1.6) и (1.7) получим

$$\tau_{x,y}(x, 0) = \left[\frac{4\mu\sigma_1}{E(x+1)} \sin \frac{x}{2} - \frac{P_1^a - P_1^b}{2\pi h} \cos \frac{x}{2} \right] \left(\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{-1/2}$$

$$S(x) = -\frac{8\mu h}{E(\kappa+1)} \ln \left[\cos^{-1} \frac{a}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{a}{2}} \right) \right] - \frac{P_1^a - P_1^b}{\pi \sigma_1} \arcsin \left(\sin^{-1} \frac{a}{2} \sin \frac{x}{2} \right) + \frac{P_1^a + P_1^b}{2\sigma_1} \quad (2.1)$$

Из условий $S(\pm a) \geq 0$ следует, что числа P_1^a , P_1^b , и σ_1 должны быть одного знака. Обозначим через $S(x, P_1^a, P_1^b)$ площадь сечения стрингера как функцию x , P_1^a и P_1^b . Так как $S(x, P_1^a, P_1^b) = S(-x, P_1^b, P_1^a)$, то для изучения функции $S(x)$ достаточно рассмотреть случай $\sigma_1 > 0$, $P_1^a \geq P_1^b \geq 0$.

Если при этом справедливо неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \leq \delta_1, \quad \delta_1 = \frac{(P_1^a - P_1^b)E(\kappa+1)}{8\mu h \sigma_1} \quad (2.2)$$

то в интервале $(-a, a)$ напряжения $\tau_{xy}(x, 0) < 0$, функция $S(x)$ монотонно убывает и, поскольку $S(\pm a) \geq 0$, условие (1.2) выполняется. Знак равенства может иметь место лишь при $P_1^b = 0$. В этом случае по сравнению со стрингерами постоянного сечения вес равнопрочных стрингеров при одинаковых параметрах a , $S(-a)$, h , μ , E и κ уменьшается, согласно (2.1), в два — четыре раза; равенство (2.2) определяет максимальную длину стрингеров.

Если условие (2.2) не выполняется, то функция $S(x)$ имеет минимум в точке $x_* = 2 \operatorname{arctg} \delta_1 \in (-a, a)$; параметры задачи связаны неравенством $S(x_*) \geq 0$. Отсюда, в частности, при $P_1^a = P_1^b$ получим ограничение

$$\left(1 + \sin \frac{a}{2} \right) \cos^{-1} \frac{a}{2} \leq \exp \frac{P_1 E(\kappa+1)}{8\mu h \sigma_1}$$

Разлагая функции (2.1) в ряды по степеням x и a и оставляя первые члены разложений, получим решение задачи о полуплоскости, сцепленной с одним стрингером

$$\tau_{xy}(x, 0) = \left[\frac{4\mu \sigma_1 x}{E(\kappa+1)} + \frac{P_1^b - P_1^a}{\pi h} \right] (a^2 - x^2)^{-1/2}$$

$$S(x) = -\frac{4\mu h}{E(\kappa+1)} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{P_1^b - P_1^a}{\pi \sigma_1} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{P_1^a + P_1^b}{2\sigma_1}$$

В [1] эти формулы получены иным методом.

Пример 2. Пусть $N=1$, $a_1 = -a$, $b_1 = a$, $P_1^a = P_1^b = 0$, $\sigma_x^\infty = 0$, $p(x) = T\delta(x)$, где $T > 0$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака (N -й стрингер на фиг. 1). Здесь условие равнопрочности естественно ставить отдельно для правой сжатой и левой растянутой половин стрингера, полагая $\sigma(x) = -\sigma_1 \operatorname{sign} x$, $\sigma_1 = \text{const} > 0$. Интеграл (1.6) вычисляется в элементарных функциях, контактные напряжения имеют вид

$$\tau_{xy}(x, 0) = \cos \frac{x}{2} \left(\sin^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{-1/2} \left[\frac{T}{2\pi h} - \frac{4\mu \sigma_1}{\pi E(\kappa+1)} \ln \frac{1 + \sin^{1/2} a}{1 - \sin^{1/2} a} \right] + \frac{4\mu \sigma_1}{\pi E(\kappa+1)} l(x, a)$$

$$l(x, a) = \ln \frac{\operatorname{tg}^{1/2} a + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}}{\operatorname{tg}^{1/2} a - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}} \quad (2.3)$$

Эти напряжения наряду с алгебраической особенностью у концов стрингеров характеризуются логарифмической особенностью под точками приложения сил.

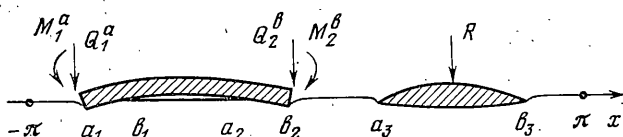
Интегрируя уравнение (1.1), в силу (2.3) получим ($x \in [-a, 0]$)

$$S(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{T}{\sigma_1} - \frac{4\mu h}{E(\kappa+1)} \ln \frac{1+\sin^{1/2} a}{1-\sin^{1/2} a} \right] \arccos \frac{|\sin^{1/2} x|}{\sin^{1/2} a} + \frac{4\mu\sigma_1}{\pi E(\kappa+1)} \int_{-a}^x l(x, a) dx, \quad S(-x) = S(x) \quad (2.4)$$

Если параметры задачи удовлетворяют соотношению

$$\sin^{1/2} a \leq \text{th}^{1/2} \delta_2, \quad \delta_2 = TE(\kappa+1) [8\mu h \sigma_1]^{-1} \quad (2.5)$$

то $\tau_{xy}(x, 0) > 0$ при $x \in (-a, 0)$; следовательно, функция $S(x)$ монотонно возрастает от нуля до $S(0) > 0$. В указанном случае условие (1.2) выполняется, поскольку функции $\tau_{xy}(x, 0)$ и $S(x)$ четны. Равенство (2.5) определяет максимальную длину, которую могут иметь равнопрочные стрингеры, при этом особенности на концах исчезают.



Фиг. 2

Если условие (2.5) не удовлетворено, задача не имеет решения, так как единственная точка минимума x_* функции $S(x)$ попадает в интервал $(-a, 0)$, $S(-a) = 0$; следовательно, $S(x_*) < 0$.

Тот же предельный переход, что и в примере 1, дает решение рассмотренной задачи и ограничение на ее параметры для полуплоскости, усиленной одним стрингером

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[\frac{T}{h} - \frac{8\mu a \sigma_1}{E(\kappa+1)} \right] + \frac{4\mu\sigma_1}{\pi E(\kappa+1)} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$S(x) = \frac{T}{\pi \sigma_1} \arccos \frac{|x|}{a} - \frac{4\mu h |x|}{\pi E(\kappa+1)} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a \leq \delta_2$$

Здесь вес стрингера уменьшается минимум в $1/2\pi$ раза.

3. Пусть на полуплоскости (фиг. 2) вместо стрингеров лежат балочные плиты переменной толщины $r(x)$. На L_1 касательные напряжения отсутствуют, нормальные перемещения и напряжения связаны между собой уравнением изогнутой оси балки (для определенности прямоугольного сечения $r(x) \times b$)

$$[D(x)v''(x, 0)]'' + h\sigma_y(x, 0) = -q(x), \quad D(x) = \frac{br^3(x)E(x)}{12(1-\nu_0^2)} \quad (3.1)$$

где ν_0 — коэффициент Пуассона, $E(x)$ — модуль упругости балки, $q(x)$ — оказываемое на нее нормальное внешнее давление. К концам балок в точках a_k, b_k приложены изгибающие моменты M_k^a, M_k^b и перерезывающие силы Q_k^a, Q_k^b ; на L_2 полуплоскость не загружена.

Выищем формулу максимальных в сечении балки продольных напряжений

$$\sigma(x) = 1/2(1-\nu_0^2)^{-1} r(x) E(x) v''(x, 0) \quad (3.2)$$

считая, что изменение функции $E(x)$ является результатом неоднородности армирования материала. В армированной, например, железобетонной балке с увеличением плотности продольной арматуры одновременно увеличиваются средний по сечению модуль упругости $E(x)$ и допускаемые растягивающие напряжения. Поэтому отношение $\sigma(x)/E(x)$, пропорциональное, согласно (3.2), величине $r(x)v''(x, 0)$, в значительной мере характеризует прочностные свойства балки. Если, в частности, $r(x)=\text{const}$ и $v''(x, 0)=\text{const}$, то можно считать, что балка постоянной толщины имеет равное сопротивление изгибающим моментам во всех ее сечениях; это согласуется с деформационным критерием прочности.

В указанном частном случае жесткость балок заданной прочности определяется тем же путем, что и жесткость стрингеров. Действительно, пусть на L_1 задана функция $v''(x, 0)=g'(x)$. Тогда возникает смешанная задача для полуплоскости $y \leq 0$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= 0 \quad (x \in [-\pi, \pi]) \\ v'(x, 0) &= g(x) + c(x) \quad (x \in L_1), \quad \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (x \in L_2) \\ c(x) &= c_k \quad (x \in [a_k, b_k], \quad c_k = \text{const}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

периодически продолженными на всю действительную ось. Такая задача рассмотрена в [12] другим методом.

Используя формулы (1.4), из условий (3.3) снова получим задачу Римана (1.5), в которой

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}(z), \quad f(x) = 4i\mu(\kappa+1)^{-1}[g(x) + c(x)] \quad (3.4)$$

Решение этой задачи существует, единственно и сохраняет свой прежний вид (1.6)–(1.9), но теперь в силу условий (3.4) коэффициенты C_{k1} и C_{k2} — мнимые числа. В общем случае, когда соседние балки связаны между собой (например, балка на нескольких участках отстает от основания, фиг. 2), оно содержит $4N-2$ параметров $M_k^a, Q_k^a, c_k, C_{k1}$ и C_{k2} , которые нетрудно определить из кинематических условий соединения балок и условий равновесия. Если нагрузка на каждую балку задана, постоянные c_k, C_{k1} и C_{k2} находятся из условий

$$\int_{a_k}^{b_k} [\sigma_y(x, 0) + q(x)] dx = Q_k^a + Q_k^b \quad (3.5)$$

$$\int_{a_k}^{b_k} [\sigma_y(x, 0) + q(x)] x dx = M_k^a - M_k^b + Q_k^a a_k + Q_k^b b_k \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

и заданного вращения на бесконечности.

После вычисления контактного давления $\sigma_y(x, 0)$ функция $E(x)$ определяется единственным образом по уравнению (3.1) и условиям в точках a_k, b_k . Для того чтобы полученное решение имело механический смысл, здесь должны быть выполнены два условия

$$E(x) \geq 0, \quad \sigma_y(x, 0) \leq 0 \quad (x \in L_1) \quad (3.6)$$

Поскольку входящие в них функции выражаются в квадратурах, которые в общем случае не берутся, эти условия проверяются численными расчетами.

Рассмотренная задача ($r(x)=\text{const}$) прежде всего связана с проблемой оптимального выбора плотности арматуры в железобетонных фундаментных плитах. Вместе с тем полученное решение удобно использовать для расчета однородных балочных плит, жесткость которых изменяется только за счет переменности толщины, а также плит с обоими параметрами $r(x)$ и $E(x)$, отличными от постоянных. В данном случае речь идет уже о полуобратном методе. Деформацию балки, близкой к равнопрочной, можно угадать. Если при $E(x)=\text{const}$ положить, например,

$v''(x, 0) = \text{const}$, то, как показывают результаты [2, 3], при определенных нагрузках одиночные плиты переменной толщины имеют естественные, плавные очертания. Хотя показатель их прочности — отношение $\sigma(x)/E$ — распределен по x неравномерно, с запасом, экономия веса по сравнению с балками постоянной толщины получается существенной, решения имеют простой вид, удобный для анализа. Та же картина наблюдается в периодических задачах.

4. В качестве примера рассмотрим случай, в котором свободный член в задаче Римана представляет собой тригонометрический полином, и часть квадратур вычисляется в элементарных функциях.

Пусть $N=1$, $a_1=-a$, $b_1=a$, $q(x)=R\delta(x)$, $R>0$, $b=h=1$, $M_1^a=M_1^b=-Q_1^a=Q_1^b=0$, $g(x)=A \sin x$, $A>0$, к каждой балке приложена только центральная сила R . Даже при $r(x)=\text{const}$ такие балки неодинаково сопротивляются изгибу, однако чем меньше их длина, тем они ближе к равнопрочным, поскольку $A \sin x \rightarrow Ax$ при $a \rightarrow 0$.

В силу соотношений (1.6), (1.8), (3.4) имеем

$$\sigma_y(x, 0) = - \frac{\cos^{1/2} x}{\sqrt{\sin^2 1/2 a - \sin^2 1/2 x}} \left[\frac{4\mu A}{\kappa+1} \left(\cos x - \cos^2 \frac{1}{2} a \right) + \frac{R}{2\pi} \right] \quad (4.1)$$

Отсюда и из уравнения (3.1) следует ($x \in [-a, 0]$)

$$D(x) = \frac{R}{A} \varphi(x) - \frac{4\mu}{\kappa+1} \psi(x), \quad \varphi(x) = \frac{x+a}{2 \cos x} + \frac{1}{\pi \cos x} \int_{-a}^x \arcsin \frac{\sin^{1/2} x}{\sin^{1/2} a} dx$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\cos x} \left[\cos \frac{x}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{a}{2}} - \right. \quad (4.2)$$

$$\left. - \cos^2 \frac{a}{2} \ln \frac{\cos^{1/2} x + \sqrt{\cos^2 1/2 x - \cos^2 1/2 a}}{\cos^{1/2} a} \right]$$

$$\varphi(-a) = \psi(-a) = 0, \quad D(-x) = D(x)$$

Согласно (4.1) и (4.2), для выполнения первого условия (3.6) необходимо, чтобы $a \leq 1/2 \pi$; второе условие (3.6) будет удовлетворено, если $\sin^2 1/2 a \leq \delta_3$, где $\delta_3 = R(\kappa+1)(8\mu A)^{-1}$.

Таким образом, предельная длина балок определяется неравенством

$$\sin^2 1/2 a \leq \delta_4, \quad \delta_4 = \min(1/2, \delta_3) \quad (4.3)$$

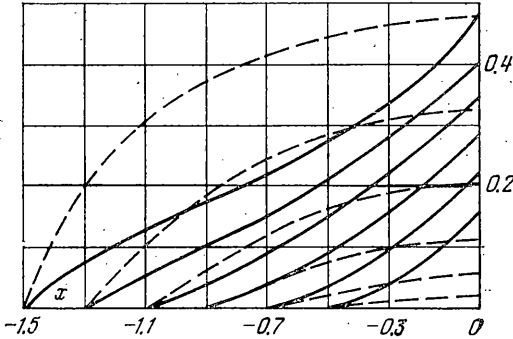
Нетрудно показать, что при его выполнении действующий на балку изгибающий момент $AD(x) \cos x$ во всем интервале $(-a, a)$ будет положительным. Следовательно, условие (4.3) является необходимым и достаточным для того, чтобы решение (4.1), (4.2) можно было механически реализовать. Предельный переход в формулах (4.1), (4.2) приводит к известному результату, полученному иным способом в [2] для плоскости, усиленной одной балкой равного сопротивления

$$\sigma_y(x, 0) = - \frac{2\mu A(a^2 - 2x^2)}{(\kappa+1)\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{R}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (4.4)$$

$$D(x) = - \frac{R|x|}{\pi A} \arccos \frac{x}{a} + \frac{R\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi A} - \frac{2\mu}{3(\kappa+1)} (a^2 - x^2)^{3/2}$$

На фиг. 3 для значений a от $1/2$ до $3/2$ изображены сплошными линиями графики функции $\varphi(x)$, пунктирными — $\psi(x)$. Они позволяют определить функцию $D(x)$ при всех допустимых параметрах задачи, так как

при $a \equiv (0 \frac{1}{2})$ с точностью до двух значащих цифр можно пользоваться формулой (4.4), а при $a > 1.57$, согласно (4.3), задача не имеет решения. Графики показывают, что наибольших значений функция $D(x)$ всегда достигает при $x=0$. Для ее построения остается найти постоянную A .



Фиг. 3

Поведение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на фиг. 3 показывает, что в этом случае за счет неоднородности армирования металлоемкость плит уменьшается в два-три раза.

Пусть $E(x) = E$, $\sigma(0) = \sigma$ — балки однородны по материалу и переменны по толщине. Тогда, согласно (3.1), (3.2) и (4.2), $r(0) = 2(1 - \nu_0^2) \sigma E^{-1} A^{-1}$; для нахождения A имеем кубическое уравнение

$$A^3 D(0) = \frac{2}{3} (1 - \nu_0^2) \sigma^3 E^{-2} \quad (4.6)$$

и дополнительное условие $A > 0$. Функция $r(x)$ имеет вид

$$r(x) = [12(1 - \nu_0^2) E^{-1} D(x)]^{1/3}$$

Не останавливаясь на исследовании уравнения (4.6), отметим, что, как и в [3], оно может иметь два положительных корня, а функция $r(x)$ — соответственно две ветви. Максимальную толщину балки имеют в точках приложения сил, здесь же возникают максимальные напряжения $\sigma(x)$. Экономия веса, согласно графикам на фиг. 3, составляет по сравнению с балками постоянной толщины не менее 25%.

Поступила 5 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 3.
2. Нуллер Б. М. Оптимальный выбор жесткости тонкостенных подкрепляющих элементов в контактных задачах теории упругости. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1975, т. 103.
3. Златин А. Н., Нуллер Б. М. Оптимальная жесткость круглых плит, лежащих на упругом полупространстве. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1976, т. 110.
4. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
6. Нуллер Б. М. О сжатии упругого слоя балочными плитами. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
7. Нуллер Б. М. Контактные задачи для полос и прямоугольных пластинок, усиленных стержнями. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Физматгиз, 1966.
9. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
10. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1962, т. 122.
11. Назмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
12. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.