МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 539.3

СДВИГ ШТАМПОМ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. М. АЙЗИКОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о деформации чистого сдвига штампом двухслойного упругого полупространства. В верхнем слое модуль сдвига изменяется по экспоненциальному закону, на границе между слоем и полупространством предполагается полное сцепление. Для решения задачи использованы асимптотические методы, позволившие представить основные характеристики задачи в простом аналитическом виде. Для контроля точности асимптотических формул использован метод коллокации по чебышевским узлам.

1. Постановка задачи. Пусть недеформируемый бесконечный штамп с плоским основанием жестко сцеплен с поверхностью Γ упругого неоднородного полупространства Ω. С полупространством связана декартова система координат x, y, z. Штамп контактирует с полупространством по поверхности: $y=0$, $|x|\leqslant a$.

На каждую единицу длины штампа действует сдвигающее усилие P, параллельное оси z. Под действием этого усилия штамп переместится в направлении оси z на величину ε, вызвав в Ω деформацию чистого сдвига. Модуль сдвига полупространства с глубиной изменяется по закону

$$G=G_0e^{\nu y},\quad \nu>0,\quad 0\geqslant y\geqslant -H;\quad G=G_1\equiv G_0e^{-H\nu},\quad -H>y>-\infty \tag{1.1}$$

Вне штампа Γ не загружена. При сделанных предположениях граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_y=\tau_{xy}=0,\quad \tau_{yz}=0,\quad y=0,\quad |x|>a\\ \sigma_y=\tau_{xy}=0,\quad w=\varepsilon,\quad y=0,\quad |x|\leqslant a\end{gathered} \tag{1.2}$$

где w — перемещение вдоль оси z. При $x\to\infty$ напряжения исчезают.

Считаем, что перемещения и напряжения сопрягаются на границе изменения закона неоднородности

$$\tau_{yz}{}^1=\tau_{yz}{}^2,\quad w^1=w^2\quad \text{при}\quad y=-H \tag{1.3}$$

Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом

$$\tau_{yz}|_{y=0}=\tau(x),\quad |x|\leqslant a \tag{1.4}$$

Методами операционного исчисления эта задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)\int_0^\infty M(u)\cos\left(u\frac{\zeta-x}{\lambda}\right)du\,d\zeta=\pi G_0\varepsilon \tag{1.5}$$

$$\lambda=\frac{H}{a}, \quad |x|\leqslant 1, \quad \tau(x)=\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$M(u)=\frac{1}{|u|}\frac{(|u|+\mu)\operatorname{sh}v+v\operatorname{ch}v}{(|u|-\mu)\operatorname{sh}v+v\operatorname{ch}v}$$

$$\mu=2\nu H, \quad v=\sqrt{\mu^2+u^2}$$

$$M(u)=e^{2\mu}|u|^{-1}-(e^{2\mu}-1)^2(2\mu)^{-1}+O(|u|) \text{ при } u\to 0 \tag{1.6}$$

$$M(u)=|u|^{-1}[1+\mu|u|^{-1}+0.5\mu^2u^2- \\ -0.125\mu^4u^{-4}]+O(u^{-6}) \text{ при } u\to\infty \tag{1.7}$$

2. Асимптотические решения при больших значениях λ.

1. Аппроксимируем $M(u)$ функцией

$$M_1(u)=(1+ce^{-\varkappa|u|})/|u|+N/(u^2+D^2) \tag{2.1}$$

$$M_1(u)=(1+c)|u|^{-1}-c\varkappa+ND^{-2}+{}^1\!/_2c\varkappa^2|u|+O(u^2) \text{ при } u\to 0$$

$$M_1(u)=|u|^{-1}+Nu^{-2} \text{ при } u\to\infty \tag{2.2}$$

Постоянные в (2.1) определяются из условий совпадения первых членов разложений (1.6) и (2.2). Продифференцируем (1.5) с $M(u)\equiv M_1(u)$ один раз по x; используя [1], получим уравнение

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-x}+\frac{c}{\varkappa}\frac{(\zeta-x)\varkappa^{-1}}{(\zeta-x)^2\varkappa^{-2}+\lambda^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{N\pi}{2\lambda}e^{-q}\operatorname{sign}\frac{\zeta-x}{\lambda}\right]d\zeta=0, \quad q=\left|\frac{\zeta-x}{\lambda}\right|D \tag{2.3}$$

Введем параметр [2-4] $\tau=\sqrt{{}^1\!/_4\lambda^2+1}-{}^1\!/_2\lambda$. Разложим третье слагаемое ядра уравнения (2.3) по степеням τ. Тогда получим

$$\frac{1}{\lambda}e^{-q_1}\operatorname{sign}t=\operatorname{sign}(t)\tau-\frac{D}{2}t\tau^2+\left(1+\frac{D}{2}t^2\right)\operatorname{sign}t\tau^3-$$

$$-2Dt\left(1+\frac{1}{12}D^2t^2\right)\tau^4+O(\tau^5), \quad t=\zeta-x, \quad q_1=\frac{|t|}{\lambda}D \tag{2.4}$$

Воспользуемся разложением [4]:

$$\frac{t}{t^2+\lambda^2}=\sum_{n=2,\,4,\,6}^{\infty}\tau^n\sum_{k=0}^{{}^1\!/_2n-1}\frac{(n-1-k)!(-1)^{n/2-k+1}}{k!(n-1-2k)!}t^{n-2k-1} \tag{2.5}$$

Решение (2.3) ищем в виде

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i(x)\tau^i \tag{2.6}$$

Подставляя (2.4)—(2.6) в (2.3), имеем

$$\int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i(\zeta)\tau^i\left[\frac{1}{\zeta-x}+\sum_{n=1}^{\infty}k_n(\zeta-x)\tau^n\right]=0 \tag{2.7}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях τ. Тогда для определения $\gamma_i(\zeta)$ получим последовательность уравнений

$$\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_n(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta=-\int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(\zeta)k_{n-i}(\zeta-x)\,d\zeta \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2.8}$$

$$k_1(t)={}^1/_2N\pi\operatorname{sign}t,\quad k_2(t)=(c\varkappa^{-2}-{}^1/_2N\pi D)t$$
$$k_3(t)={}^1/_2N\pi(1+{}^1/_2D^2t^2)\operatorname{sign}t,\quad k_4(t)=(2c\varkappa^{-2}-N\pi D)t-$$
$$-(c\varkappa^{-4}+1/12N\pi D^3)t^3$$

Решая последовательно (2.8), получим

$$\gamma_0(x)=\frac{A}{\pi\sqrt{1-x^2}}\quad \gamma_1(x)=-\frac{2AN}{\pi}\frac{S_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\gamma_2(x)=\frac{A}{\pi}\left(c\varkappa^{-2}-\frac{1}{2}N\pi D\right)\frac{x^2-{}^1/_2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{8AN}{\pi^3}(S_2{}^*(x)-D^\circ)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\gamma_3(x)=\frac{2ANS_1(x)}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{AND^2}{4\pi^2}\left[2(1+2x^2)S_1(x)-3S_4(x)+\frac{8}{9}\right]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+$$
$$+\frac{A}{2\pi^2}\left(\frac{c}{\varkappa^2}-\frac{N\pi D}{2}\right)N\frac{S_4(x)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{8AN^3}{\pi^4}\frac{[S_5(x)-2D^\circ S_1(x)]}{\sqrt{1-x^2}}$$

Функции $S_i(x)$ $(i=1-5)$ приведены в [5], $D^\circ=0.1508$. Постоянная A определяется из условия

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx=P$$

2. Используя [5], на основании (1.7) придем к выводу, что ядро уравнения (1.5)

$$K(t)=\int_0^\infty M(u)\cos ut\,du$$

с точностью до бесконечной постоянной имеет следующую структуру:

$$K(t)=-\ln|t|-{}^1/_2\pi\mu|t|+{}^1/_4\mu^2t^2\ln|t|+a_{31}t^2+O(t^3) \tag{2.9}$$

$$a_{31}=-\frac{3}{8}\mu^2+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[u^2-uM(u)+\mu u+\frac{\mu^2}{2}(1-e^{-u})\right]\frac{du}{u}$$

Для ядра вида (2.9) решение построено в [5] и имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{mn}\lambda^{-m}\ln^n\lambda \tag{2.10}$$

Численное сравнение при $\lambda=2$ показало, что решения (2.6) и (2.10) отличаются меньше чем на 5%.

3. Асимптотическое решение при малых значениях λ. Воспользуемся методом из [6]. Аппроксимируем $M(u)$ функцией

$$M_2(u)=\frac{1}{|u|}\frac{u^2+A^2\lambda^2}{u^2+B^2\lambda^2} \tag{3.1}$$

Уравнение (1.5) с функцией $M_2(u)$ можно записать так:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)\,d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|u|}\frac{u^2+A^2\lambda^2}{u^2+B^2\lambda^2}e^{-iq_2}\,du=2\pi G_0\varepsilon,\quad q_2=u\left(\frac{\zeta-x}{\lambda}\right) \tag{3.2}$$

Сделаем замену переменных $u=\alpha\lambda$ и поменяем порядок интегрирования. При этом получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|}\frac{\alpha^2+A^2}{\alpha^2+B^2}e^{-i\alpha x}\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)\,e^{i\alpha\zeta}\,d\zeta=2\pi\varepsilon G_0 \tag{3.3}$$

Используя соотношение

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)\,e^{i\alpha\zeta}\,d\zeta=T(\alpha),\quad \tau(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha \tag{3.4}$$

получим парное интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\alpha)}{|\alpha|}\frac{\alpha^2+A^2}{\alpha^2+B^2}e^{-i\alpha x}\,d\alpha=2\pi\varepsilon G_0,\quad |x|\leqslant 1 \tag{3.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}T(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha=0,\quad |x|>1 \tag{3.6}$$

Введем обозначение

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\alpha)}{|\alpha|}e^{-i\alpha x}\,d\alpha \tag{3.7}$$

Разрешим (3.5) относительно $p(x)$

$$p(x)=C_H\operatorname{ch}Ax+D_H\operatorname{sh}Ax+\frac{B^2}{A^2}\varepsilon G_0 \tag{3.8}$$

Здесь D_H, C_H — неопределенные постоянные. Так как $p(x)$ связана с искомой функцией $\varphi(x)$ соотношениями (3.4), (3.7) и $\varphi(x)$ четна, то $p(x)$ четна и $D_H=0$. Продифференцируем (3.5) по x; тогда получим

$$-i\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}\alpha\,T(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha=2\pi p'(x),\quad |x|\leqslant 1 \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}T(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha=0,\quad |x|>1 \tag{3.10}$$

Выделим вещественную часть (3.9), (3.10); затем, домножая (3.9) на $x(t^2-x^2)^{-1/2}$, а (3.10) на $x(x^2-t^2)^{-1/2}$ и интегрируя соответственно от 0 до t и от t до ∞, найдем

$$\int_{0}^{\infty}T(\alpha)J_1(\alpha t)\,d\alpha=\frac{2}{t}\int_{0}^{t}\frac{p'(x)\,x\,dx}{\sqrt{t^2-x^2}},\quad |t|\leqslant 1$$

$$\int_{0}^{\infty}T(\alpha)J_1(\alpha t)\,d\alpha=0,\quad |t|>1 \tag{3.11}$$

Обращая (3.11) по Ханкелю, имеем

$$T(\alpha)=2\alpha\int_0^1 J_1(\alpha\tau)\,d\tau\int_0^\tau \frac{p'(x)\,x\,dx}{\sqrt{\tau^2-x^2}}+\pi E J_0(\alpha) \qquad (3.12)$$

Здесь E — постоянная, определяемая из условия

$$\int_{-1}^{1}\tau(x)\,dx=P \qquad (3.13)$$

Подставляя в (3.12) значение $p(x)$ из (3.8), получим

$$T(\alpha)=C\frac{\alpha}{\alpha^2+A^2}[AI_0(A)J_1(\alpha)-\alpha I_1(A)J_0(\alpha)]+E\pi J_0(\alpha) \qquad (3.14)$$

где C — новая неопределенная постоянная.

Из (3.13) находим $E=T\pi^{-1}$. Подставим (3.14) в (3.5) и продифференцируем по x; так как $T(\alpha)$ из (3.14) должно удовлетворять исходному уравнению, то получим

$$C=T(B^2-A^2)B^{-1}\left[AI_0(A)\frac{K_1(B)}{K_0(B)}+I_1(A)B\right]^{-1}$$

Найдем выражение для

$$\tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty T(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$$

Для вычисления интегралов используем равенство Парсеваля в форме

$$\int_0^\infty f(\alpha)g(\alpha)\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(t)G_c(t)\,dt$$

$$F_c(t)=\int_0^\infty f(\alpha)\cos\alpha t,\,d\alpha,\quad G_c(t)=\int_0^\infty g(\alpha)\cos\alpha t\,d\alpha$$

Окончательно получим

$$\tau(x)=P\left[\frac{\pi^{-1}-CI_1(A)}{\sqrt{1-x^2}}+CA\Phi(x,A)\right] \qquad (3.15)$$

$$\Phi(x,A)=\int_x^1\frac{I_0(A)\alpha\operatorname{ch}A(\alpha-x)-I_1(A)\operatorname{sh}A(\alpha-x)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha$$

Функция Φ выражается через линейную комбинацию неполных цилиндрических функций в форме Пуассона, для которых в [7] построена общая теория и имеются таблицы.

Замечание. Рассмотрим более общую аппроксимацию

$$M_N(u)=\frac{1}{|u|}\prod_{i=1}^{N}\frac{(u^2+A_i^2\lambda^2)}{(u^2+B_i^2\lambda^2)}$$

Пусть

$$\prod_{i=1}^{N}{}'_k\frac{(u^2+A_i^2\lambda^2)}{(u^2+B_i^2\lambda^2)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_ik}{u^2+B_i^2\lambda^2}$$

$$\prod_{i=1}^{N}\frac{(u^2+A_i^2\lambda^2)}{(u^2+B_i^2\lambda^2)}=1+\sum_{i=1}^{N}\frac{L_i}{u^2+B_i^2}$$

где Π_k' означает, что в числителе нет сомножителя $(u^2+A_k^2\lambda^2)$; p_ik и L_i известны. Тогда контактные касательные напряжения запишутся в виде

$$\tau(x)=p\left\{\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}-\sum_{i=1}^{N}[C_iI_1(A_i)-C_iA_i\Phi(x,A_i)]\right\}$$

где постоянные C_i определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}C_ip_ik[A_iI_0(A_i)K_1(B_k)+I_1(A_i)B_kK_0(B_k)]+\frac{L_kK_0(B_k)}{B_k}=0 \quad (k=1,2,\ldots,N)$$

4. **Метод коллокации.** Решение уравнения (1.5) при $\lambda\geqslant1$ может быть построено также методом коллокации по чебышевским узлам [8, 9]. Для этого (1.5) продифференцируем по x и перепишем с использованием аппроксимации (2.1) следующим образом:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta-x}+k(\zeta-x)\right]d\zeta=0 \tag{4.1}$$

$$k(t)=c\frac{t}{t^2+\varkappa^2\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty[M(u)u-1-ce^{-\varkappa u}]\sin\frac{ut}{\lambda}du$$

Решение (4.1) ищем в виде

$$\varphi(x)=\frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.2}$$

Будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=P,\quad \pi c_1+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=P$$

Сделаем замену переменных $x=\cos\theta$, $t=\cos\tau$ и введем обозначения

$$x_k=\cos\theta_k,\quad \theta_k=(2k-1)\pi/4i \quad (k=1,2,\ldots,i)$$

Представим приближенно $\varphi_0(x)$ полиномом Лагранжа порядка k:

$$L_k(\varphi_0,x)=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\varphi_0(x_n)\left(1+2\sum_{m=1}^{k-1}\cos 2m\theta_n\cos 2m\theta\right) \tag{4.3}$$

Согласно [8], относительно $\varphi_0(x_n)\equiv\varphi_n{}^\circ$ и c_1 получим систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{k}a_{jn}\varphi_n{}^\circ+c_1b_j=0,\quad \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\varphi_0(\cos\theta_n)+c_1=\frac{P}{\pi} \quad (j=1,2,\ldots,k) \tag{4.4}$$

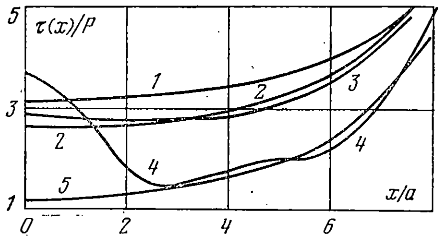
$$a_{jn}=\frac{1}{\sin\theta_j}\sum_{m=1}^{k-1}[\cos 2m\theta_n\sin 2m\theta_j]+$$

$$+\frac{k(\cos\theta_n-\cos\theta_j)-k(\cos\theta_n+\cos\theta_j)}{2}$$

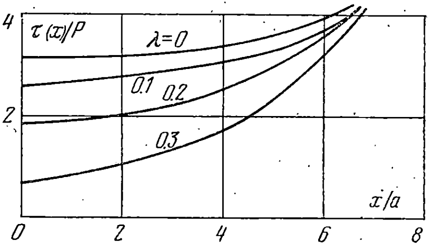
$$b_j=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}[k(\cos\theta_n-\cos\theta_j)-k(\cos\theta_n+\cos\theta_j)]$$

Подставляя определенные из (4.4) φ_n° и c_1 в (4.3) и затем в (4.2), получим решение уравнения (4.1).

5. Числовые результаты. На фиг. 1 приведены графики $\tau(x)P^{-1}$ при $\lambda=2$. Кривая *1* соответствует распределению напряжений для однородного полупространства; кривые *2*, *3* построены для случая $\mu=\ln 2$ (значения подсчитаны методами «больших λ» и коллокации соответственно); кривые *4*, *5* соответствуют аналогичным расчетам для $\mu=\ln 10$. При x, близких к нулю, асимптотический метод в случае $\lambda=2$ дает расхождение с численным. Заметим, что с увеличением λ разница уменьшается, и при $\lambda>8$ значения, подсчитанные численным и асимптотическим методом, практически совпадают.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из рассмотрения графиков при $x_0<0.8$ видно (при постоянном λ): чем больше μ, тем сильнее отличается $\tau(x_0)P^{-1}$ от значения, соответствующего однородному полупространству. Отметим, что при постоянном μ с увеличением λ распределение напряжений стремится к случаю однородного полупространства.

На фиг. 2 приведены графики $\tau(x)P^{-1}$ для $\lambda<1$, $\mu=2$; значения подсчитаны методом «малых λ». Из графиков видно, что для $\lambda<1$ при фиксированном μ с уменьшением λ распределение напряжений стремится к распределению в случае однородного полупространства. При фиксированном λ чем больше μ, тем сильнее отличается распределение напряжений от случая однородного полупространства.

Замечание. Предложенные методы позволяют решить поставленную задачу, когда $G_0(y)$ — достаточно гладкая функция, и модуль сдвига полупространства изменяется по закону

$$G=G_0(y),\quad 0\geqslant y\geqslant -H,\quad G=G_0(-H),\quad -H>y>-\infty$$

Автор благодарен В. М. Александрову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 15 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
2. *Александров В. М.* О двух новых методах решения контактных задач для упругой полосы. Научн. сообщ. Ростовск.-н/Д ун-та. Сер. точн. и естеств. наук, 1964. Изд-во Ростовск.-н/Д ун-та, 1965.
3. *Каюк Я. Ф., Алексеева М. К.* Применение метода малого параметра к расчету напряженного состояния пологих оболочек. Прикл. механ., 1965, т. 1. вып. 7.
4. *Панченков А. Н.* Гидродинамика подводного крыла. Киев, «Наукова думка», 1965.
5. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
7. *Агрест М. М., Максимов М. З.* Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М., Атомиздат, 1965.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости М., «Наука», 1973.
9. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 5.