

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА
С УЧЕТОМ ОТСТАВАНИЯ СЛОЕВ

Ю. Е. ВЛАСЕНКО, В. И. КУЗЬМЕНКО, Г. А. ФЕНЬ

(Днепропетровск)

Предлагается методика численного решения контактных задач для многослойных упругих и упругопластических тел. В процессе деформирования слои могут отставать один от другого.

Особенностью предлагаемого подхода является использование условий взаимного непроникания слоев в качестве кинематических условий на границе слоев. Указанные условия имеют вид неравенств; при этом не требуется априорного задания площадок контакта. Задача решается на основе вариационного принципа в перемещениях. После дискретизации функционала при помощи конечных элементов получается задача математического программирования. Отметим, что традиционный вариант метода конечных элементов, сводящий задачу к системе линейных алгебраических уравнений, здесь неприменим.

Подробно описана методика решения задачи о вдавливании плоского штампа в многослойную полосу в условиях плоской деформации; при этом используется теория малых упругопластических деформаций. Практически без изменений алгоритм применяется для исследования осесимметричной деформации, а также в случае вдавливания выпуклых штампов. Опыт решения задач данного класса показал, что в двумерном случае алгоритм допускает эффективную реализацию даже на ЭВМ средней производительности.

1. Рассматривается контактная задача определения напряженно-деформированного состояния многослойной полосы в условиях плоской упругопластической деформации. Полоса составлена из N однородных и изотропных слоев. Слои имеют, вообще говоря, различную толщину и различные упругопластические характеристики. Вес полосы не учитывается. Полоса находится на жестком основании и имеет конечную ширину $2b$. В полосу на заданную глубину Δ вдавливается плоский штамп шириной $2a$ (фиг. 1).

Сформулируем рассматриваемые условия контактирования на границе слоев. Воспользуемся наиболее естественным кинематическим подходом.

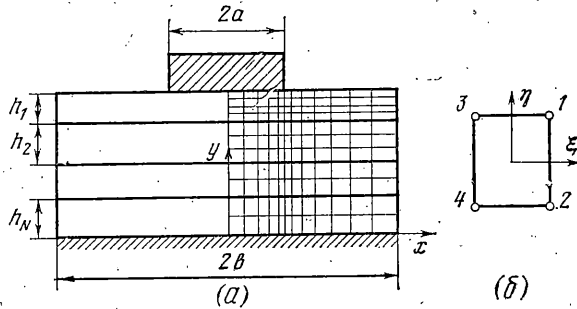
Обозначим через $u_x^{(k)}$, $u_y^{(k)}$, $u_x^{(k+1)}$, $u_y^{(k+1)}$ соответствующие компоненты перемещений в точках смежных границ k - и $(k+1)$ -го слоев (слои нумеруются сверху вниз).

Учитываются следующие три типа контактного взаимодействия слоев: слои сцеплены — любое взаимное движение границ слоев исключено, т. е. принимаются условия: $u_x^{(k)} = u_x^{(k+1)}$, $u_y^{(k)} = u_y^{(k+1)}$; смежные поверхности слоев являются гладкими — допускается отставание и взаимное скольжение слоев (перемещение границ должно удовлетворять только условию непроникания слоев $u_y^{(k)} \geq u_y^{(k+1)}$); смежные поверхности являются шероховатыми — допускается отставание, однако взаимное скольжение границ

исключено (перемещения границ должны удовлетворять условиям $u_y^{(k)} \geq u_y^{(k+1)}$), причем если $u_y^{(k)} = u_y^{(k+1)}$, то $u_x^{(k)} = u_x^{(k+1)}$.

Приведенные выше соотношения представляют собой кинематические условия, определяющие характер взаимодействия слоев. Кроме того, считается, что участки нарушения контакта свободны от напряжений, а во втором случае касательные напряжения на контактирующих поверхностях равны нулю. Отметим, что в состав многослойной полосы могут одновременно входить слои с различными свойствами контактных поверхностей (в смысле отмеченных трех случаев).

Такого же типа условия контактирования рассматриваются и для учета взаимодействия полосы со штампом и основанием.



Фиг. 1

Для решения упругопластической задачи используется теория малых упругопластических деформаций с изотропным законом упрочнения $T = g(\Gamma)\Gamma$ [1]. При расчетах функция $g_k(\Gamma)$, описывающая упрочнение k -го слоя, принимается в виде

$$g_k(\Gamma) = \begin{cases} G_k, & \Gamma \leq \Gamma_{sk}, \quad \Gamma_{sk} = \tau_{sk}/G_k \\ G_k - G_k \alpha_k \frac{(\Gamma/\Gamma_{sk} - 1)^{\beta_k}}{\Gamma/\Gamma_{sk}}, & \Gamma > \Gamma_{sk} \end{cases} \quad (1.1)$$

где G_k , τ_{sk} — модуль упругости и предел упругости, соответствующие k -му слою; параметры α_k и β_k удовлетворяют условиям $\beta_k \geq 1$, $0 \leq \alpha_k \leq 1$.

Особо отметим, что при $\beta_k = 1$, $\alpha_k = 1$ соотношения (1.1) приводят к идеальной пластичности, а при $\beta_k = 1$, $0 < \alpha_k < 1$ — к линейному упрочнению.

2. Решение задачи производится численно на основе вариационного принципа — минимального свойства действительного поля перемещений [1]. При указанных типах контактного взаимодействия этот принцип непосредственно обобщается и для составных тел, в частности многослойных полос.

Запишем начало возможных перемещений применительно к каждому слою

$$\int_{V_k} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_k} X_{ni}^{(k)} \delta u_i dS = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

Напряжения σ_{ij} при этом удовлетворяют уравнениям равновесия; возможные перемещения δu_i не должны нарушать условий п. 1. В (2.1) обозначено: S_k и V_k — поверхность и объем k -го слоя, $X_{ni}^{(k)}$ — усилия на поверхности этого слоя, в том числе контактные. Для каждого из рассматри-

ваемых типов взаимодействия интегралы по смежным поверхностям двух соседних слоев равны по модулю и имеют противоположные знаки. Поэтому, складывая равенства (2.1), получаем начало возможных перемещений в виде

$$\sum_{k=1}^N \int_{V_k} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_S X_{ni} \delta u_i dS = 0 \quad (2.2)$$

где S — поверхность всего пакета.

Следуя [1], нетрудно получить из (2.2) вариационный принцип теории малых упругоупластических деформаций для многослойных тел: среди всех кинематически возможных полей перемещений действительному полю перемещений соответствует минимум функционала

$$\Phi[u_i] = \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[\frac{1}{3} G_k \frac{1+\nu_k}{1-2\nu_k} \varepsilon^2 + \int_0^\Gamma g_k(\Gamma) \Gamma d\Gamma \right] dV - \int_{S_F} X_{ni} u_i dS \quad (2.3)$$

Здесь ν_k — коэффициент Пуассона k -го слоя, S_F — часть поверхности полосы, на которой заданы усилия. Кинематически возможными считаются непрерывные (в пределах слоя) поля перемещений, удовлетворяющие кинематическим условиям на контакте полосы со штампом и основанием, а также условиям на смежных поверхностях слоев. Обратим внимание на то, что среди этих условий могут быть условия в виде неравенств.

Применяемые здесь методы минимизации особенно эффективны для квадратичных функционалов. Поэтому задача минимизации (2.3) заменяется последовательностью задач минимизации квадратичного функционала. Такая замена осуществляется с использованием метода секущего модуля G [1]. На p -м шаге метода секущего модуля выполняется минимизация квадратичного функционала

$$\Phi^{(p)}[u_i] = \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \left[\frac{1}{3} G_k \frac{1+\nu_k}{1-2\nu_k} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} g_k(\Gamma^{(p-1)}) \Gamma^2 \right] dV - \int_{S_F} X_{ni} u_i dS \quad (2.4)$$

Значения $\Gamma^{(p-1)}$ получены в результате минимизации $\Phi^{(p-1)}$ и являются фиксированными на данном этапе. В качестве $\Phi^{(0)}$ принимается функционал, соответствующий упругим деформациям, т. е. $g_k \equiv G_k$.

3. Произведем замену переменных таким образом, чтобы все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние, имели безразмерный вид и при решении задачи принимали значения близких порядков.

$$x'_i = x_i/a, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}/\tau_{s1}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} G_1/\tau_{s1}, \quad u'_i = u_i G_1/(a\tau_{s1})$$

В дальнейшем все выкладки производятся для новых переменных; штрихи для упрощения записи опускаются.

Ввиду симметрии рассматривается лишь одна (для определенности) правая половина полосы. В связи с этим к кинематическим граничным условиям необходимо добавить условие симметрии $u_x = 0$ при $x = 0$. Для удобства записи введем обозначения $u = u_x$, $v = u_y$.

Функционал (2.4) для закона упрочнения (1.1) в случае плоской деформации имеет вид

$$\Phi^{(p)}[u, v] = \sum_{k=1}^N \frac{G_k}{G_1} \left\{ \int_{C_k} \left(\frac{2}{3} \frac{1+v_k}{1-2\nu_k} \varepsilon^2 + \Gamma^2 \right) dC - \right. \\ \left. - \alpha_k \int_{C_{p,k}} \frac{(\Gamma_{s1} \Gamma^{(p-1)} / \Gamma_{sk} - 1)^{b_k}}{\Gamma_{s1} \Gamma^{(p-1)} / \Gamma_{sk}} \Gamma^2 dC \right\} \quad (3.1)$$

где C_k — площадь сечения k -го слоя; во втором интеграле интегрирование распространяется только на область $C_{p,k}$, для которой $\Gamma^{(p-1)} \geq \Gamma_{sk} / \Gamma_{s1}$. Интеграл по S_F , входящий в (2.4), для принятых граничных условий в напряжениях равен нулю.

Минимизация функционала (3.1) при помощи метода конечных элементов [2] заменяется минимизацией функции многих переменных. Для рассматриваемой формы области естественно использовать элементы в виде прямоугольников. Разбиение области на прямоугольные элементы показано на фиг. 1, а. Для того чтобы лучше аппроксимировать интенсивно изменяющееся поле перемещений в окрестности угловой точки штампа, используется сгущенная сетка в указанной окрестности. Длины элементов возрастают в геометрической прогрессии при удалении от угловой точки влево и вправо. При этом к поверхности штампа примыкают m_1 прямоугольников, к свободной поверхности — m_2 прямоугольников. Слой с номером k разбивается по высоте на n_k равных частей.

Перемещения в прямоугольнике (фиг. 1, б) выбираются в виде

$$u(\xi, \eta) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi \eta, \quad v(\xi, \eta) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \xi \eta \quad (3.2)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 выражаются через перемещения u_1, u_2, u_3, u_4 вершин конечного элемента; коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 — через перемещения v_1, v_2, v_3, v_4 . Вдоль границ элемента перемещения распределены по линейному закону; тем самым обеспечивается непрерывность перемещений на границах элементов.

Таким образом, поле перемещений приближенно выражается через перемещения вершин конечных элементов, иначе говоря, узлов сетки. Узлы, лежащие на линии раздела слоев, но принадлежащие различным слоям, считаются различными.

Если определенным образом упорядочить узлы сетки, то соответствующие перемещения u и v в узлах образуют векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} . Подставляя выражения (3.2) в функционал (3.1), получаем функцию многих переменных

$$F^{(p)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i=1}^{m_1+m_2} f_{ij}^{(h)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.3)$$

Функция $f_{ij}^{(h)}$, представляющая собой интеграл, взятый по элементу (i, j) из k -го слоя, имеет вид

$$f_{ij}^{(h)} = t_1 (u_1 + u_2 - u_3 - u_4)^2 + t_2 (v_1 + v_3 - v_2 - v_4)^2 + t_3 (u_1 + u_3 - u_2 - u_4)^2 + \\ + t_4 (u_1 + u_2 - u_3 - u_4) (v_1 + v_3 - v_2 - v_4) + t_5 (u_1 + u_3 - u_2 - u_4) (v_1 + v_2 - v_3 - v_4) + \\ + t_6 (v_1 + v_2 - v_3 - v_4)^2 + t_7 (u_1 + u_4 - u_2 - u_3)^2 + t_8 (v_1 + v_4 - v_2 - v_3)^2 \quad (3.4)$$

причем вершины пронумерованы так, как указано на фиг. 1, б. В выражении (3.4) через t_i ($i=1, 2, \dots, 8$) обозначены величины, зависящие от механических свойств материала и разбиения области; t_i являются постоянными на данном этапе метода секущего модуля.

Нетрудно сформулировать с учетом выполненной дискретизации задачи и условия п. 1 на линии раздела слоев. Поскольку границы слоев совпадают со сторонами прилегающих к ним конечных элементов, а вдоль этих сторон перемещения распределены по линейному закону, то достаточно потребовать выполнения соответствующих условий только для узловых точек на границах. Тогда в неузловых точках эти условия будут выполнены автоматически. Аналогично видоизменяются условия на штампе и на основании.

Таким образом, задача сводится к минимизации квадратичной функции (3.3) при ограничениях в виде линейных неравенств и равенств и может быть сформулирована как задача квадратичного программирования [3].

4. Применяемый здесь метод минимизации при ограничениях может быть классифицирован как вариант метода возможных направлений [3]. Алгоритм существенно учитывает структуру минимизируемой функции и ограничений, поэтому изложение методики решения производится неформально, с использованием соответствующих кинематических понятий.

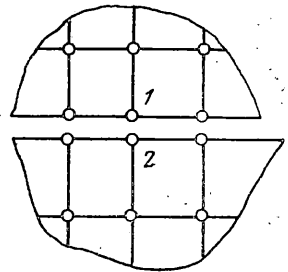
При выполнении алгоритма минимизации происходит поочередное изменение перемещений в узлах. Следуя терминологии метода локальных вариаций [4], будем называть варьированием изменение одной переменной. Однократное варьирование во всех узлах сетки в установленном порядке называется итерацией. Будем указывать номер итерации, к которой относится данная величина, верхним индексом. Варьирование должно выполняться таким образом, чтобы функция (3.3) убывала, а соответствующие условия (см. п. 1) не нарушались.

Рассмотрим варьирование в некотором внутреннем узле на s -й итерации. Перемещения внутренних узлов свободно от ограничений; очень эффективным в таком случае является применение метода последовательной верхней релаксации [5]. Этот метод развит для решения линейных алгебраических систем, однако его нетрудно применить для минимизации квадратичных функций, учитывая известную связь между указанными задачами.

На первом шаге варьирования из условия $\partial F^{(s)}/\partial u = 0$ определяется перемещение u^* в данном узле, доставляющее минимум функции (3.3) при фиксированных значениях остальных переменных. Данное уравнение является линейным и содержит только перемещения вершин не более чем четырех прямоугольников, для которых данный узел является общим. Этот шаг совпадает с варьированием по методу Гаусса — Зейделя. На втором шаге производится дополнительное изменение u ; в качестве нового значения принимается $u^{(s)} = u^{(s-1)} + \omega(u^* - u^{(s-1)})$. Постоянная ω называется параметром релаксации; если ω удовлетворяет неравенству $0 < \omega < 2$, то функция (3.3) убывает [5]. Варьирование перемещения v производится аналогично.

Покажем, как производится варьирование в узлах на границе раздела слоев. Если вдоль рассматриваемой границы слой сцеплен, то варьирование выполняется только так же, как и во внутренних узлах.

Если допускается отставание слоев, то следует различать узлы, принадлежащие границам верхнего и нижнего слоев (см. фиг. 2). При варьировании используется метод Гаусса — Зейделя. Применение релаксации может в некоторых случаях привести к возрастанию минимизируемой функции.



Фиг. 2

Обозначим через u_1, u_2, v_1, v_2 соответствующие перемещения в узлах 1 и 2 (фиг. 2). Пусть $\varphi(v_1, v_2)$ — функция от v_1 и v_2 , совпадающая с (3.3) при фиксированных на данной итерации значениях остальных переменных. Очевидно, что $\varphi(v_1, v_2)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2) \quad (4.1)$$

причем в φ_1 входят перемещения узлов только верхнего слоя, в φ_2 — только нижнего слоя.

Исходя из равенства (4.1), выполняется следующий алгоритм варьирования в узлах на границе слоев:

Определяются значения v_1^* и v_2^* , доставляющие минимум функциям φ_1 и φ_2 соответственно.

Если $v_1^* \geq v_2^*$, то варьирование считается выполненным; в качестве значений $v_1^{(s)}$ и $v_2^{(s)}$ в указанных узлах принимаются v_1^* и v_2^* .

Если $v_1^* < v_2^*$, то узлы 1 и 2 «совмещаются»; определяется значение $v^{(s)}$ из условия минимума функции $\varphi_1(v) + \varphi_2(v)$.

Производится варьирование по методу Гаусса — Зейделя перемещений u_1 и u_2 . Для гладких поверхностей перемещения u_1 и u_2 варьируются вне зависимости от результатов варьирования v_1 и v_2 . Для шероховатого контакта раздельное варьирование производится только тогда, когда при варьировании v_1 и v_2 получено отставание; в противном случае выполняется варьирование для $u = u_1 = u_2$.

Процесс минимизации прекращается после s -й итерации при выполнении неравенства $|\mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}^{(s-1)}| |\mathbf{u}^{(s)}|^{-1} + |\mathbf{v}^{(s)} - \mathbf{v}^{(s-1)}| |\mathbf{v}^{(s)}|^{-1} < \varepsilon$, где ε — выбранный параметр допустимой погрешности; под знаком $|\dots|$ понимается евклидова длина вектора. Вычислительная эффективность алгоритма существенно зависит от удачного выбора параметра релаксации ω . Некоторые результаты, связанные с оптимальным выбором ω , можно найти в [5]. Однако практически, учитывая сложность теоретического анализа задачи, значения ω определяются путем подбора для нескольких задач рассматриваемого класса. Наиболее удачными для данного класса оказались значения $\omega \approx 1.85$; затраты машинного времени уменьшаются в 7–10 раз по сравнению со временем счета по методу Гаусса — Зейделя (при $\omega = 1$).

Описанный алгоритм реализован в виде пакета подпрограмм на ФОРТРАНе для ЭВМ М-222 (транслятор Ф-20). Свободная оперативная память позволяет решать задачи с сеткой конечных элементов, содержащей до 750 узлов.

5. В качестве примера рассмотрена задача о вдавлении плоского штампа в пятислойную идеально пластическую полосу. Пакет состоит из чередующихся «твердых» и «мягких» слоев, т.е. $G_1 = G_3 = G_5$, $\tau_{s1} = \tau_{s3} = \tau_{s5}$ и $G_2 = G_4$, $\tau_{s2} = \tau_{s4}$, причем $G_1 \geq G_2$, $\tau_{s1} \geq \tau_{s2}$. Коэффициент Пуассона ν для всех слоев принимается равным 0.3.

Поверхности слоев являются шероховатыми, поверхности основания и штампа — гладкими. Слои имеют одинаковую толщину h . При расчетах принималось, что $1/2 h/a = 0.2$, $2b/(2a) = 3$.

Исследуются предельная нагрузка, развитие зон пластических деформаций, участки отставания в зависимости от отношений G_1/G_2 и τ_{s1}/τ_{s2} . Расчеты выполнены для следующих значений этих отношений: $G_1/G_2 = 1, 2, 4, 8$; $\tau_{s1}/\tau_{s2} = 1, 2, 4$.

Область разбивается сеткой конечных элементов, содержащих 460 узлов. Вычисления производились для возрастающей последовательности Δ_j осадок штампа, что позволило проследить развитие зон пластических деформаций по мере увеличения осадки. Укажем характерные особенности процесса.

Предельная нагрузка на штамп практически не зависит от отношения G_1/G_2 и определяется значением τ_{s1}/τ_{s2} . В этом смысле рассматриваемая задача аналогична простому растяжению — сжатию. Для значений $\tau_{s1}/\tau_{s2} = 1, 2, 4$ предельная нагрузка соответственно равна $5.0 a\tau_{s1}$, $3.95 a\tau_{s1}$, $3.5 a\tau_{s1}$.

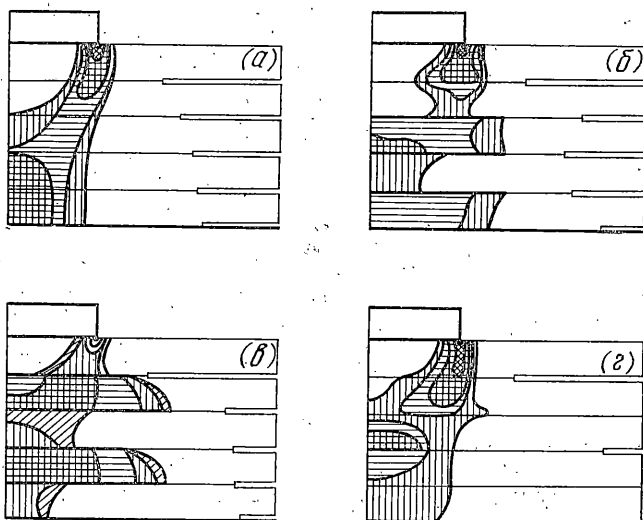
На фиг. 3, а–г показан процесс развития пластических деформаций в зависимости от осадки штампа Δ при различных значениях механических характеристик слоев. Соответствующие значения G_1/G_2 , τ_{s1}/τ_{s2} и последовательность осадок для $\Delta_j G_i / (a\tau_{s1})$ ($j=1-5$) приводятся ниже (каждой фиг. 3, а–г соответствует своя строка):

G_1/G_2	τ_{s1}/τ_{s2}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
1.0	1.0	0.6	0.9	1.2	1.3	1.8
4.0	1.0	0.8	1.2	2.0	2.8	4.0
1.0	4.0	0.2	0.4	1.0	1.4	2.0
8.0	2.0	1.6	2.0	2.8	3.2	4.0

Плотность штриховки пластических зон убывает при возрастании осадки штампа. С увеличением τ_{s1}/τ_{s2} при постоянном G_1/G_2 (фиг. 3, а; е) пластические деформации охватывают значительные области в мягких слоях $k=2$ и $k=4$. Более неожиданным оказалось то, что с увеличением G_1/G_2 при постоянном τ_{s1}/τ_{s2} (фиг. 3, а, б) размеры зон пластических деформаций в твердых слоях $k=1, 3, 5$ существенно превосходят размеры пластических зон в более мягких слоях. Если слои $k=1, 3, 5, \dots$ должны играть роль малодеформируемых прокладок между мягкими слоями $k=2, 4, \dots$, то желаемого результата можно достичь лишь увеличением τ_{s1}/τ_{s2} ; увеличение G_1/G_2 приводит к обратному эффекту.

Сравнительное влияние τ_{s1}/τ_{s2} и G_1/G_2 на форму пластической области можно оценить на примере фиг. 3, г; форма пластической зоны в предельном состоянии близка к форме области пластических деформаций для полосы, составленной из одинаковых слоев (фиг. 3, а).

Отметим, что в области под штампом во всех случаях пластические деформации появляются только в окрестности угловых точек.



Фиг. 3

На фиг. 3, а-г условно, в виде «щелей», показаны также участки нарушения контакта, соответствующие предельному состоянию полосы. Длины участков отставания существенно зависят от соотношения упругопластических характеристик слоев; особо укажем при этом на случай $G_1/G_2=8$, $\tau_{s1}/\tau_{s2}=2$ (фиг. 3, г). Концы слоев, не имеющие непосредственного контакта с соседними слоями, практически не воспринимают нагрузку и могут быть отброшены без ущерба для прочности, что позволит добиться значительной экономии металла.

Поступила 24 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
3. Пшеничный В. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., «Наука», 1975.
4. Черноусько Ф. Л., Баличук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.
5. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.