МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 539.3.01

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ ОБЩЕГО ТИПА ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается осесимметричная задача о вдавливании кольцевого штампа в линейно-деформируемое основание общего типа, подстилаемое жестким основанием. При этом учитывается изнашивание поверхности основания, имеющее место при вращении штампа (осредненный по времени модуль угловой скорости вращения – ω).

Предполагается, что износ носит абразивный характер. В этом случае количество удаленного при износе материала пропорционально работе сил трения.

Предполагается также, что в процессе изнашивания область контакта не изменяется, штамп не изнашивается, сила трения связана с контактным давлением законом Кулона. В то же время силами трения в области контакта при определении упругих деформаций основания пренебрегаем. Пренебрегаем также инерционными силами, возникающими от движения штампа. Такая постановка контактных задач при наличии износа дана в [1, 2].

В данной работе предложен эффективный метод решения осесимметричных смешанных задач теории упругости при наличии износа, который дает возможность построить явные асимптотические разложения при относительно большом времени для всех основных характеристик явления.

1. Экспериментально установлено [3, 4], что скорость изнашивания является функцией касательных усилий и осредненного модуля линейной скорости скольжения, причем для абразивного изнашивания в приложениях используется, как правило, линейная зависимость, т. е.

$$w=k_1V\tau(r,\ t),\qquad V=\omega r \tag{1.1}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала. Отсюда следует, что для скорости перемещения штампа в направлении, перпендикулярном поверхности основания, вследствие ее изнашивания можно принять

$$v_*^{\cdot}=k_1V\tau(r,t)\quad\text{или}\quad v_*=k_1\omega r\int_0^t\tau(r,t)\,dt \tag{1.2}$$

Предполагая, что сила трения связана с контактным давлением законом Кулона, из (1.2) получим

$$v_*=\varkappa r\int_0^t q(r,t)\,dt,\quad \varkappa=k_1k_2\omega \tag{1.3}$$

где k_2 — коэффициент трения.

Для нормального перемещения границы линейно-деформируемого основания, вследствие упругого деформирования его поверхности, имеет место формула [5]:

$$v=\frac{1}{\mu\theta}\int_a^b \rho q(\rho,t)K\left(\frac{\rho}{\mu},\frac{r}{\mu}\right)d\rho$$

$$K\left(\frac{\rho}{\mu},\frac{r}{\mu}\right)=\int_0^\infty L(u)J_0\left(\frac{\rho}{\mu}u\right)J_0\left(\frac{r}{\mu}u\right)du \tag{1.4}$$

Здесь θ — комбинация упругих постоянных основания, определяемая конкретными задачами; μ — характерный геометрический параметр основания; a и b — внутренний и внешний радиусы области контакта.

Относительно функции $L(u)$ будем предполагать, что она вещественна и непрерывна на действительной оси

$$\begin{gathered} L(u)\geqslant 0 \quad (0\leqslant u<\infty) \\ L(u)=Bu+O(u^2) \quad (u\to 0,\ B=\text{const}) \\ L(u)=1+O(u^{-1}) \quad (u\to\infty) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Заметим, что такие свойства функции $L(u)$ определяют линейно-деформируемое основание достаточно общего типа, подстилаемое жестким основанием.

Условие контакта штампа с основанием, очевидно, будет иметь вид

$$v+v_*=\gamma(t)-f(r) \quad (a\leqslant r\leqslant b) \tag{1.6}$$

где $\gamma(t)$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенной к нему силы $P(t)$, $f(r)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

Подставляя (1.3), (1.4) в (1.6), получим интегральное уравнение для определения искомого контактного давления $q(r, t)$:

$$\int_a^b \rho q(\rho,t)K\left(\frac{\rho}{\mu},\frac{r}{\mu}\right)d\rho=\mu\theta[\gamma(t)-f(r)]-$$

$$-\mu\varkappa\theta r\int_0^t q(r,t)\,dt,\quad P(t)=2\pi\int_a^b \rho q(\rho,t)\,d\rho. \tag{1.7}$$

Переходя в (1.7) к безразмерным переменным и вводя новые обозначения (штрихи далее опущены), будем иметь

$$\rho'b=\rho,\ r'b=r,\ \lambda=\frac{\mu}{b},\quad c=\frac{a}{b},\quad t=\frac{b}{\mu\varkappa\theta}t'$$

$$q(\rho,t)=\theta\lambda\varphi(\rho',t'),\ f(r)=bf'(r'),\quad \gamma(t)=b\gamma'(t')$$

$$\int_c^1 \rho\varphi(\rho,t)K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)d\rho=\gamma(t)-f(r)-r\int_0^t\varphi(r,t)\,dt \tag{1.8}$$

$$K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)=\int_0^\infty L(u)J_0\left(\frac{u}{\lambda}\rho\right)J_0\left(\frac{u}{\lambda}r\right)du \quad (c\leqslant r\leqslant 1)$$

$$P(t)=2\pi\int_c^1 \rho\varphi(\rho,t)\,d\rho,\quad P(t)=b^2P'(t') \tag{1.9}$$

2. Пусть жесткое перемещение штампа изменяется во времени по закону[1]

$$\gamma(t)=\gamma_0+\gamma_1 t \tag{2.1}$$

Будем искать решение уравнения (1.8) в виде

$$\rho\varphi(\rho,t)=y(\rho,t)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(\rho)e^{-\alpha_k t}\quad(\alpha_k=\text{const},\ \alpha_0=0) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.8) и приравнивая в полученном соотношении члены правой и левой частей при t^0 и агрегатах $(1-e^{-\alpha_k t})$, получим

$$\begin{gathered} y_0(r)=\gamma_1 \\ \int_c^1 y(\rho,0)K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)d\rho=\gamma_0-f(r)\quad(c\leqslant r\leqslant 1) \\ \alpha_k\int_c^1 y_k(\rho)K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)d\rho=y_k(r)\quad(c\leqslant r\leqslant 1,\quad k\geqslant 1) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Из последнего соотношения видно, что задача свелась к нахождению решений однородного уравнения второго рода вида

$$Ly=(E-\alpha A)y=0\quad(c\leqslant r\leqslant 1,\ 0<\lambda<\infty) \tag{2.4}$$

$$Ay=\int_c^1 y(\rho)K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)d\rho$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (2.4), установим важные для дальнейших рассуждений свойства его ядра.

Теорема. При всех значениях $\beta=\rho\lambda^{-1}$ и $\delta=r\lambda^{-1}$, удовлетворяющих условиям $|\beta-\delta|\neq 0$, $\beta<\infty$, $\delta<\infty$, функция $K(\beta,\delta)$ непрерывна по совокупности переменных β и δ:

$$K(\beta,\delta)\sim K_0(\beta,\delta)=\frac{2}{\pi(\beta+\delta)}K\left(\frac{2\sqrt{\beta\delta}}{\beta+\delta}\right)\quad\text{при}\quad|\beta-\delta|\to 0$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(\beta,\delta)\sim\frac{2B}{\pi(\beta+\delta)}K\left(\frac{2\sqrt{\beta\delta}}{\beta+\delta}\right)\quad\text{при}\quad\beta\to\infty,\quad\delta\to\infty$$

Для доказательства теоремы заметим, что при всех $c\lambda^{-1}\leqslant\beta<\infty$, $c\lambda^{-1}\leqslant\delta<\infty$, $\lambda\in(0,\infty)$ для $K(\beta,\delta)$ имеет место представление [5]:

$$K(\beta,\delta)=K_0(\beta,\delta)+F(\beta,\delta),\quad K_0(\beta,\delta)=\int_0^\infty J_0(\beta u)J_0(\delta u)\,du$$

$$F(\beta,\delta)=\int_0^\infty[L(u)-1]J_0(u\beta)J_0(u\delta)\,du$$

причем $F(\beta,\delta)$ непрерывна по совокупности переменных $c\lambda^{-1}\leqslant\beta<\infty$, $c\lambda^{-1}\leqslant\delta<\infty$ в силу асимптотических свойств (1.5). Поэтому при $|\beta-\delta|\to 0$ функция $K(\beta,\delta)\sim K_0(\beta,\delta)$, а при $\beta\neq\delta$ функция $K(\beta,\delta)$ непрерывна.

[1] Здесь и далее предполагаем $0\leqslant t\leqslant T$, где величина T достаточно большая, но такая, что $\gamma(t)$ имеет порядок перемещений в линейной теории упругости.

Пусть теперь $\beta=\nu\delta$. Тогда

$$K(\beta,\delta)=\int_0^\infty L(u)J_0(u\nu\delta)J_0(u\delta)\,du=$$

$$=\frac{1}{\delta}\int_0^\infty L\left(\frac{y}{\delta}\right)J_0(\nu y)J_0(y)\,dy\to\frac{B}{\delta}\int_0^\infty J_0(\nu y)J_0(y)\,dy=$$

$$=\frac{2B}{\pi(\beta+\delta)}K\left(\frac{2\sqrt{\beta\delta}}{\beta+\delta}\right)\qquad\text{при}\quad\delta\to\infty$$

и теорема доказана.

Далее, с учетом неравенства

$$\int_c^1\int_c^1\left[K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)\right]^2 d\rho\,dr<\infty$$

вытекающего из теоремы, следует, что оператор A действует в $L_2(c, 1)$ вполне непрерывно [6]. Здесь $L_2(c, 1)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[c, 1]$.

Заметим еще, что в силу представления (1.8) для K оператор A является самосопряженным. Поэтому по общей теории самосопряженных, вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве [6] он имеет счетное множество нетривиальных собственных функций $y_k(r)$ $(k\geqslant1)$ с собственными числами α_k. При этом все α_k вещественны и

$$|\alpha_1|\leqslant|\alpha_2|\leqslant\ldots\leqslant|\alpha_k|\leqslant\ldots<\infty,\quad\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\infty$$

Докажем положительность оператора A. Составим скалярное произведение

$$(Ay,y)_{L_2(c,1)}=\int_0^\infty L(u)Q^2\left(\frac{u}{\lambda}\right)du,\quad Q(u)=\int_c^1 y(r)J_0(ru)\,dr\tag{2.5}$$

В силу первого условия (1.5) получаем, что $(Ay, y)\geqslant0$, откуда следует неотрицательность чисел α_k.

Перейдем к решению последнего интегрального уравнения в (2.3). Будем искать собственные функции $y_k(r)$ оператора A в виде следующего ряда по нормированным полиномам Лежандра [7, 8]:

$$y_k(r)=\sum_{m=0}^\infty a_m^{(k)}P_m^*(r),\quad P_m^*(r)=\sqrt{\frac{2m+1}{1-c}}P_m\left(\frac{2r}{1-c}-\frac{1+c}{1-c}\right)\tag{2.6}$$

Разложим ядро интегрального уравнения $K(\rho/\lambda,\ r/\lambda)$ в двойной ряд по указанным многочленам

$$K\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty e_{ij}(\lambda)P_i^*(\rho)P_j^*(r)\tag{2.7}$$

Используя условие ортогональности полиномов Лежандра на отрезке $[c, 1]$ и обозначая

$$\int_c^1 P_n^*(r)J_0\left(\frac{u}{\lambda}r\right)dr=B_n\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

представим коэффициенты разложения $e_{ij}(\lambda)$ в виде

$$e_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty L(u)B_i\left(\frac{u}{\lambda}\right)B_j\left(\frac{u}{\lambda}\right)du \qquad (2.8)$$

Подставляя (2.6), (2.7) в интегральное уравнение, используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая коэффициенты правой и левой частей при полиномах одинакового номера, получим

$$\alpha_k\sum_{m=0}^\infty a_m^{(k)}e_{mj}(\lambda)=a_j^{(k)} \quad (j=0,1,2,\ldots) \qquad (2.9)$$

Учитывая результаты теоремы, нетрудно показать, что оператор, стоящий в левой части (2.9), действует в пространстве l_2 квадратично суммируемых последовательностей и является там вполне непрерывным при всех значениях параметра $\lambda\in(0,\infty)$. Отсюда следует, что к бесконечной системе (2.9) применима теорема Гильберта о ее разрешимости [9].

Чтобы существовало нетривиальное решение системы (2.9), приравниваем нулю ее определитель. Получим уравнение для нахождения счетного множества собственных чисел α_k. После определения α_k найдем $a_m^{(k)}$ выразив их через $a_0^{(k)}$:

$$a_m^{(k)}=a_0^{(k)}b_m^{(k)} \quad (b_0^{(k)}=1) \qquad (2.10)$$

В результате будут найдены

$$y_k(r)=a_0^{(k)}g_k(r), \quad g_k(r)=\sum_{m=0}^\infty b_m^{(k)}P_m{}^*(r) \quad (k\geqslant1) \qquad (2.11)$$

Удовлетворим далее второму интегральному уравнению в (2.3) соответствующим выбором счетного множества постоянных γ_1 и $a_0^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots)$.

Будем считать, что $f(r)\in L_2(c,1)$. Тогда представим ее в виде

$$f(r)=\sum_{i=0}^\infty f_iP_i{}^*(r) \qquad (2.12)$$

Положим далее для удобства

$$y_0(r)=a_0^{(0)}g_0(r), \quad g_0(r)=\sum_{m=0}^\infty b_m^{(0)}P_m{}^*(r)$$

$$a_0^{(0)}=\sqrt{1-c}\,\gamma_1, \quad b_0^{(0)}=1, \quad b_m^{(0)}=0 \quad (m\geqslant1)$$

Учитывая (2.2), найдем

$$y(\rho,0)=\sum_{k=0}^\infty y_k(\rho)=\sum_{k=0}^\infty a_0^{(k)}\sum_{m=0}^\infty b_m^{(k)}P_m{}^*(\rho) \qquad (2.13)$$

Подставляя (2.7), (2.12) и (2.13) в соответствующее интегральное уравнение, используя свойство ортогональности полиномов Лежандра на отрезке $[c,1]$ и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты правой и левой частей при многочленах одинакового номера, после ряда несложных выкладок придем к следующей бесконечной алгебраической системе:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(k)} e_{mn}(\lambda) = \gamma_0 \delta_{0n} - f_n \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (2.14)$$

где δ_{0n} — символ Кронекера.

Решив систему (2.14), определим $y_k(r)$, а вместе с тем и решение $y(r, t)$ по формуле (2.2). При этом сила, действующая на штамп, будет определяться выражением

$$P(t) = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} P_k e^{-\alpha_k t}, \quad P_k = \int_c^1 y_k(\rho)\, d\rho = a_0^{(k)} \qquad (2.15)$$

Величина γ_0 (начальное внедрение штампа) будет таким образом связана с начальной величиной вдавливающей силы $P(0) = 2\pi \Sigma P_k$.

Заметим еще, что $P(\infty) = 2\pi P_0 = 2\pi(1-c)\gamma_1$, т. е. конечное значение вдавливающей силы зависит лишь от скорости поступательного перемещения штампа.

3. Пусть $P=\text{const}$. Допустим при этом, что жесткое перемещение штампа вследствие изнашивания поверхности линейно-деформируемого основания изменяется во времени по закону

$$\gamma(t) = \gamma t + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k e^{-\alpha_k t} \quad (\alpha_k, \gamma_k, \gamma = \text{const}, \ \alpha_0 = 0) \qquad (3.1)$$

Задание $\gamma(t)$ в такой форме оправдано тем, что, как показано в п. 2, при достаточно большом t некоторым постоянным значениям P соответствует износ, протекающий линейно во времени.

Будем искать решение уравнения (1.8) в виде (2.2). Подставляя (2.2), (3.1) в (1.8) и приравнивая коэффициенты левой и правой частей полученного равенства при $(1-e^{-\alpha_k t})$, t^0, придем к следующим трем соотношениям:

$$y_0(r) = \gamma \qquad (3.2)$$

$$\int_c^1 y(\rho, 0) K\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = \gamma(0) - f(r) \qquad (c \leqslant r \leqslant 1)$$

$$\alpha_k \int_c^1 y_k(\rho) K\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) d\rho = \gamma_k \alpha_k + y_k(r) \qquad (c \leqslant r \leqslant 1, \ k \geqslant 1)$$

Из последнего соотношения видно, что нужно найти решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$(E - \alpha A) y + \alpha\gamma = 0 \qquad (3.3)$$

причем оператор A имеет вид, как и в (2.6).

Заметим, что в силу свойств оператора A, указанных в п. 2, уравнение (3.3) однозначно разрешимо в $L_2(c, 1)$ почти при всех значениях α $(0 < \lambda < \infty)$.

Учитывая (2.2), найдем

$$P = 2\pi \int_c^1 y(\rho, t)\, d\rho = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} P_k e^{-\alpha_k t} \qquad (3.4)$$

$$2\pi P_0=P=2\pi\int\limits_c^1 y_0(\rho)\,d\rho=2(1-c)\gamma,\quad P_k=\int\limits_c^1 y_k(\rho)\,d\rho=0\qquad (k\geqslant 1)\tag{3.5}$$

Будем искать решение последнего уравнения в (3.2) в форме

$$y_k(r)=\alpha_k\gamma_k\sqrt{1-c}\,g_k(r),\qquad g_k(r)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(k)}\,P_m{}^*(r)\tag{3.6}$$

Подставляя (2.7), (3.6) в интегральное уравнение и рассуждая таким же образом, как и в п. 2, получим

$$\alpha_k\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{(k)}\,e_{mn}(\lambda)-a_n^{(k)}=\delta_{0n}\qquad (n=0,1,2,\ldots)\tag{3.7}$$

Отметим, что в силу (3.5), (3.6)

$$P_k=\int\limits_c^1 y_k(\rho)\,d\rho=\alpha_k\gamma_k\sqrt{1-c}\,a_0^{(k)}=0,\quad a_0^{(k)}=0\quad (k\geqslant 1)\tag{3.8}$$

Условие (3.8) служит для определения неизвестных величин α_k. Действительно, согласно (3.8), имеем $a_0^{(k)}=\Delta_1/\Delta$, где Δ – основной определитель системы (3.8), Δ_1 – вспомогательный определитель, получающийся из Δ заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, 0,\ldots, 0,\ldots\}$. Определитель Δ_1 – симметричный, поэтому корни его $\alpha=\alpha_k$ $(k=1, 2,\ldots)$ вещественные. Кроме того, ранее было отмечено, что при достаточно большом времени постоянным значениям P соответствует линейный износ, поэтому суммы по экспонентам в (3.1) должны исчезать при $t\to\infty$. Отсюда, в частности, следует, что все $\alpha_k\geqslant 0$, в чем можно также убедиться непосредственно с помощью следующего вычислительного критерия [10].

Для каждой конкретной задачи построим набор главных миноров определителя Δ_1. Из их неотрицательности будет следовать, что все $\alpha_k\geqslant 0$ $(k\geqslant 1)$.

Определив числа α_k из уравнения $\Delta_1=0$, найдем затем коэффициенты разложения $a_m^{(k)}$ $(m=1, 2,\ldots)$ из неоднородной системы (3.7) и, таким образом, построим систему функций $y_k(r)$ $(k\geqslant 1)$.

Перейдем теперь к рассмотрению второго соотношения в (3.2). Согласно формуле (2.2), будем иметь

$$y(r,0)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(r)=\Bigl[\gamma P_0{}^*(r)+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\gamma_k\sum_{m=1}^{\infty}a_m^{(k)}P_m{}^*(r)\Bigr]\sqrt{1-c}\tag{3.9}$$

Представляя $f(r)$ в виде (2.12) и подставляя (2.7), (3.9) в (3.2), найдем

$$\Bigl[\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\gamma_k\sum_{m=1}^{\infty}a_m^{(k)}\sum_{i=0}^{\infty}e_{mi}(\lambda)P_i{}^*(r)+\gamma\sum_{i=0}^{\infty}e_{0i}(\lambda)P_i{}^*(r)\Bigr]\sqrt{1-c}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}[\gamma(0)\sqrt{1-c}\,\delta_{0m}-f_m]P_m{}^*(r)\tag{3.10}$$

Приравнивая в соотношении (3.10) коэффициенты левой и правой частей при полиномах Лежандра одинакового номера, получим бесконечную алгебраическую систему для нахождения счетного множества постоянных $\gamma_k (k\geqslant 1)$ вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\gamma_k \sum_{m=1}^{\infty} e_{mn}(\lambda)\, a_m^{(k)} + \gamma e_{0n}(\lambda) = \gamma(0)\delta_{0n} - f_n(1-c)^{-1/2} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{3.11}$$

Здесь $\gamma(0)$ можно считать независимым от γ_k $(k\geqslant 1)$, ибо

$$\gamma(0) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \tag{3.12}$$

После решения системы (3.11) функции $y_k(r)$ будут полностью определены, а вместе с тем будет определено и решение задачи $y(r, t)$.

Поскольку в ходе решения бесконечной алгебраической системы (3.11) постоянная γ выразится через $\gamma(0)$, то вдавливающую силу P можно связать с начальным внедрением $\gamma(0)$ штампа в линейно-деформируемое основание общего типа.

4. В качестве числового примера рассматривалась осесимметричная контактная задача теории упругости о вдавливании вращающего кольцевого штампа $(a\leqslant r\leqslant b)$ в слой толщины h с упругими постоянными: G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, жестко защемленный по основанию. При этом

$$L(u) = \frac{2\sigma\, \mathrm{sh}\, 2u - 4u}{2\sigma\, \mathrm{ch}\, 2u + 1 + \sigma^2 + 4u^2}$$

$$\sigma=3-4\nu, \quad \theta=G(1-\nu)^{-1}, \quad \lambda=h/b, \quad c=a/b$$

Ниже приводятся необходимые значения коэффициентов $e_{mn}(\lambda)$, подсчитанные на ЭВМ с точностью до $\varepsilon=10^{-5}$ при $\lambda=1$, $\nu=0.3$, $c=0.5$:

mn	00	01	02	03
e_{mn} (1)	0.38699	−0.05363	−0.03358	−0.00621
mn	11	12	13	22
e_{mn} (1)	0.17132	−0.02904	−0.01922	0.09606
mn	23	33		
e_{mn} (1)	−0.00890	0.06980		

В случае линейного изменения во времени жесткого перемещения штампа (п.2) бесконечную систему (2.9) будем решать методом редукции, ограничиваясь рассмотрением в ней первых трех уравнений. Получив для нахождения собственных чисел оператора A алгебраическое уравнение третьего порядка, найдем α_1, α_2, α_3. Соответственно этому будет построена система функций $y_k(r)$ вида (2.11), содержащих четыре произвольные постоянные $a_0^{(0)}$, $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $a_0^{(3)}$, которые определим затем из специальным образом урезанной бесконечной системы (2.14).

Для случая постоянной во времени силы, вдавливающей штамп (п. 3), бесконечную систему (3.7) также будем решать методом редукции. Взяв в (3.7) четыре первых уравнения, найдем неизвестные числа α_1, α_2, α_3. Построив соответствующий им набор функций $y_k(r)$ вида (3.6), определим затем постоянные γ, γ_1, γ_2, γ_3 из урезанной бесконечной алгебраической системы (3.11).

Для первой задачи $\alpha_1=2.48812$, $\alpha_2=5.73427$, $\alpha_3=12.80967$, а для второй: $\alpha_1=5.455435$, $\alpha_2=10.63400$, $\alpha_3=16.72297$.

r	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(r,1)/\gamma_0$	16.679	16.623	16.681	16.852	17.137	17.535
$y(r,1)/\gamma(0)$	2.889	2.892	2.895	2.897	2.898	2.898
$y(r,2)/\gamma_0$	17.899	17.894	17.900	17.914	17.938	17.971
$y(r,2)/\gamma(0)$	2.896	2.896	2.896	2.896	2.896	2.896
$y(r,4)/\gamma_0$	18.009	18.009	18.009	18.009	18.010	18.010
$y(r,4)/\gamma(0)$	2.896	2.896	2.896	2.896	2.896	2.896

Ниже даны значения относительной величины вдавливающей силы $P(t)/P(0)$ для первой задачи и относительной величины поступательного перемещения штампа $\gamma(t)/\gamma(0)$ для второй задачи, посчитанные по формулам (2.15), (3.1), (3.12).

t	0	1	2	3	4	∞
$P(t)/P(0)$	1	4.178	4.437	4.458	4.460	4.460
$\gamma(t)/\gamma(0)$	1	4.016	6.912	9.807	12.703	∞

В таблице представлены значения $y(r, t)/\gamma_0$ и $y(r, t)/\gamma(0)$ для первой и второй задач соответственно при различных значениях t.

Отметим, что при $t=0$ для обоих случаев, рассмотренных в п. 2, 3, решения определяются формулами [5], а при $t=\infty$ имеют место соотношения $y(r, \infty)=\gamma'(\infty)$, $P(\infty)=2\pi(1-c)\gamma'(\infty)$, вытекающие из формул (1.9), (2.1), (2.2), (3.1).

Заметим также, что $y(r, \infty)/\gamma_0=18.010$, $y(r, \infty)/\gamma(0)=2.896$.

Поступила 19 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коровчинский М. В.* Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., «Наука», 1971.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6
3. *Проников А. С.* Износ и долговечность станков. М., Машгиз, 1957.
4. *Хрущов М. М., Бабичев М. А.* Абразивное изнашивание. М., «Наука», 1970.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
6. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.