УДК 531.39

ДИСПЕРСИЯ РЕАКЦИИ ПРОСТЕЙШЕЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ШУМ НЬЮТОНОМЕТРА ПРИ НЕНАДЕЖНОМ ДЕМПФИРОВАНИИ

А. А. РЕССИН

(Рига)

Методами статистической динамики систем с возможными нарушениями устанавливаются дисперсии ошибок в скорости и координате. Анализируется одноканальная система с ненадежным демпфированием. Интенсивность отказа демпфирования считается постоянной, шум ньютонометра – белым.

Как известно, невозмущаемость инерциальной системы ускорениями объекта является ценным свойством [1]. Для того чтобы его реализовать, в ряде случаев необходимое демпфирование приходится осуществлять от независимого измерителя скорости (например, допплеровского измерителя [2]). На практике приходится считаться с конечной надежностью этого измерителя. Отказ его для инерциальной системы является нарушением (потерей демпфирования). В связи с этим появляется задача оценки точности системы с возможной потерей демпфирования.

Указанная задача является типичной задачей статистической динамики систем с возможными нарушениями [3, 4] и может быть решена ее методами. В принципе задачу можно решить методом, основанным на решении уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка. Такое решение оказывается сложным, так как приходится решать дифференциальное уравнение в частных производных при переменности его коэффициентов.

Предлагается алгебраический метод решения задачи, основанный на применении двумерного преобразования Лапласа [4]. Вид корреляционных и передаточных функций для метода решения не имеет принципиального значения – эти функции в исходных формулах фигурируют в общем виде.

В предлагаемой заметке для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда шум ньютонометра можно считать белым. Это допущение реалистично, поскольку интервал корреляции шума обычно значительно меньше периода системы.

Для того чтобы найти дисперсию реакции ненадежной системы на шум, необходимо знать передаточные функции системы до и после нарушения, корреляционную функцию входного шума (возмущения) и интенсивность появления нарушения. Пусть эта интенсивность постоянна и равна λ (постоянство λ характерно для участка нормальной эксплуатации измерителя).

Как известно, в одноканальном рассмотрении передаточная функция от шума $x(t)$ ньютонометра к ошибке $y(t)$ в координате демпфированной системе имеет вид

$$W_0(s)=\frac{1}{s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2}\tag{1}$$

где d — коэффициент демпфирования, ω_0 — частота Шулера.

Передаточная функция системы с нарушением (при потере демпфирования) получается из (1) при $d=0$:

$$W_1(s)=\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\tag{2}$$

Двумерное изображение Лапласа корреляционной функции реакции ненадежной системы [3, 4]

$$\Phi_y(s,s_1)=\Phi_1(s,s_1)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(s+s_1+\lambda)(s+s_1+\alpha_i+\alpha_j+\lambda)}\times$$

$$\times\left\{\mathrm{R}_1(s,\lambda)\left[\frac{A_{ij}^{[0]}-A_{ij}^{[10]}}{s+\alpha_i+\lambda}+\frac{A_{ij}^{[01]}-A_{ij}^{[1]}}{s_1+\alpha_j}\right]+\right.$$

$$+R_1(s,\lambda)\left[\frac{A_{ij}^{[0]}-A_{ij}^{[01]}}{s_1+\alpha_j+\lambda}+\frac{A_{ij}^{[10]}-A_{ij}^{[1]}}{s+\alpha_i}\right]+\frac{\lambda[A_{ij}^{[0]}-A_{ij}^{[01]}-A_{ij}^{[10]}+A_{ij}^{[1]}]}{2R_1(s)R_1(s_1)}\times$$

$$\times\left[\frac{R_1(s)-R_1(-\alpha_i)}{s+\alpha_i}\frac{R_1(s_1)-R_1(-\alpha_j)}{s_1+\alpha_j}+\frac{R_1(s)-R_1(-\alpha_j)}{s+\alpha_j}\frac{R_1(s_1)-R_1(-\alpha_j)}{s_1+\alpha_i}\right]\Bigg\} \tag{3}$$

$$\Phi_1(s,s_1)=W_0(s)W_0(s_1)\Phi_x(s,s_1)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m A_{ij}^{[0]}F(s,s_1,\alpha_i,\alpha_j)$$

$$W_1(s)W_1(s_1)\Phi_x(s,s_1)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m A_{ij}^{[1]}F(s,s_1,\alpha_i,\alpha_j)$$

$$W_1(s)W_0(s_1)\Phi_x(s,s_1)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m A_{ij}^{[10]}F(s,s_1,\alpha_i,\alpha_j) \tag{4}$$

$$W_0(s)W_1(s_1)\Phi_x(s,s_1)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m A_{ij}^{[01]}F(s,s_1,\alpha_i,\alpha_j)$$

$$F(s,s_1,\alpha_i,\alpha_j)=\frac{1}{(s+s_1)(s+\alpha_i)(s_1+\alpha_j)},\qquad R_1(s,\lambda)=\frac{R_1(s+\lambda)}{R_1(s)}$$

Здесь $R_1(s)$ – знаменатель передаточной функции $W_1(s)$, $\Phi_x(s,s_1)$ – двумерное изображение корреляционной функции входной помехи, равное для белого шума интенсивности c_x^2 [4, 5]:

$$\Phi_x(s,\ s_1)=c_x^2/(s+s_1) \tag{5}$$

и $A_{ij}^{[v]}$ – коэффициенты разложения изображений, записанных в левых частях равенств (4), α_i, α_j – полюса этих изображений, m — общее количество этих полюсов. В данном случае $m=4$, так как изображение (5) полюсов не имеет, а передаточная функция $W_0(s)$ имеет два комплексных сопряженных полюса, функция $W_1(s)$ — два чисто мнимых сопряженных полюса.

Установив по формуле (3) изображение $\Phi_y(s,\ s_1)$, найдем его оригинал, воспользовавшись таблицами соответствий изображений и оригиналов при двумерном преобразовании Лапласа, опубликованными в [3, 4, 6]. Этим оригиналом является корреляционная функция $K_y(t,\ t_1)$ реакции ненадежной системы на входной шум. Положив в корреляционной функции $t=t_1$, найдем искомый результат – дисперсию реакции $y(t)D_y(t)$, которая значительно упрощается при учете неравенства $\omega_0\gg\lambda$. Это неравенство становится очевидным, если учесть, что период Шулера ($T_0=84.4$ *мин*) значительно меньше средней наработки T на отказ независимого измерителя скорости ($T=\lambda^{-1}$). Дальнейшее упрощение основано на разложении результата в ряд по степеням аргумента λt. При малых произведениях λt этот ряд быстро сходится (λt приближенно равно вероятности $Q(t)$ отказа демпфирования) и дает с достаточной точностью

$$D_y(t)=\frac{c_x^2}{4\omega_0}\left(\frac{1}{d\omega_0}+\lambda t^2\right) \tag{6}$$

Аналогичными вычислениями при тех же допущениях установим дисперсию $D_{y^\bullet}(t)$ ошибки в скорости $y^\bullet(t)$, полагая теперь вместо (1) и (2) соответственно

$$W_0(s)=\frac{s}{s^2+2d\omega_0 s+\omega_0^2},\qquad W_1(s)=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

Получим приближенно

$$D_{y^\bullet}(t)=\frac{c_x^2}{4}\left(\frac{1}{d\omega_0}+\lambda t^2\right) \tag{7}$$

Перепишем (6) и (7) в виде

$$D_y(t)=D_{y_0}+{}^1\!/_2D_{y_1}(t)Q(t),\qquad D_{y^\bullet}(t)=D_{y_0^\bullet}+{}^1\!/_2D_{y_1^\bullet}(t)Q(t) \tag{8}$$

$$D_{y_0}=\frac{c_x^2}{4d\omega_0^2},\quad D_{y_1}(t)=\frac{c_x^2t}{2\omega_0},\quad Q(t)=\lambda t,\quad D_{y_0^\bullet}=\frac{c_x^2}{4d\omega_0},\quad D_{y_1^\bullet}(t)=\frac{c_x^2t}{2}$$

Как видим, (8) включает хорошо известные функции: $D_{y_0}, D_{y_1}(t)$, $D_{y_0}^{\cdot}$, $D_{y_1}^{\cdot}(t)$ — соответственно дисперсии ошибок в координате и скорости демпфированной системы (их установившиеся значения) и дисперсии ошибок недемпфированной системы (как известно [7], эти дисперсии установившихся значений не имеют).

Вторые члены сумм в правых частях (8) являются добавками к дисперсиям ошибок абсолютно надежных систем, учитывающими конечную надежность демпфирования.

Пример. Найдем, какой должна быть средняя наработка на отказ независимого измерителя скорости, если приемлемы 5% увеличения дисперсий ошибок в координате и скорости инерциальной системы за счет ненадежности демпфирования при времени непрерывного функционирования системы $t=5$ *час* и коэффициенте демпфирования $d=0.7$.

На основании (6) и (7) из уравнения $\lambda t^2=0.05/d_{\omega_0}$ с учетом того, что $\omega_0=2\pi/T_0=4.45$ *час*$^{-1}$, найдем интенсивность отказа демпфирования: $\lambda=0.05/d\omega_0 t^2=0.05/0.7\cdot 4.45\cdot 25=6.4\cdot 10^{-4}$ *час*$^{-1}$.

Следовательно, потребуется средняя наработка на отказ $T=\lambda^{-1}=1560$ *час*. Надежность демпфирования, характеризуемую такой наработкой, в реальной эксплуатации можно обеспечить.

Примененная методика перспективна при оценке эффективности навигационных систем, так как позволяет одновременно учесть как точностные, так и надежностные характеристики элементов.

Поступила 27 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Идеи теории инвариантности и инерциальная навигация. Тр. 2 Всес. совещания по теории инвариантности в системах автоматического управления. Киев, 1962, М., «Наука», 1964.
2. *Селезнев В. П.* Навигационные устройства. М., «Машиностроение», 1974.
3. *Скляревич А. Н.* Введение в статистическую динамику систем с возможными нарушениями. Рига, «Зинатне», 1973.
4. *Скляревич А. Н.* Линейные системы с возможными нарушениями. М., «Наука», 1975.
5. *Скляревич А. Н.* Операторные методы в статистической динамике автоматических систем. М., «Наука», 1965.
6. *Рессин А. А.* Статистические характеристики выходного сигнала системы с возможным нарушением (случай мнимых полюсов). Автоматика и вычислительная техника, 1971, № 6.
7. *Свешников А. А.* Исследование гироскопических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. В сб.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.