МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 532.516

О ДВИЖЕНИИ ВАЛА, УСТАНОВЛЕННОГО В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

О. М. ГОРОДЕЦКИЙ

(Гродно)

Одной из проблем в гидродинамической теории смазки является задача об устойчивости равновесия валов, опирающихся на подшипники скольжения. Известно [1, 2], что модель, в которой вал и подшипники с опорами считаются абсолютно жесткими, движение жидкости в подшипниках – плоским и квазистационарным, зазор между валом и подшипником – целиком заполненным смазкой, приводит к заключению о неустойчивости положения равновесия вала в подшипнике. Поскольку этот результат не соответствует экспериментальным данным, то в дальнейших исследованиях рассматривались модели, учитывающие влияние конечной длины подшипника, частичного заполнения подшипника смазкой, сил инерции частиц смазки, упругости вала и опор на динамику вала.

Достаточно полный обзор публикаций по устойчивости валов в подшипниках скольжения содержится в работе [3], известны и более поздние работы, например [4–6]. В результате изучения различных моделей были найдены зоны устойчивости, зависящие от параметров валов и подшипников. В указанных работах предполагалось, что угловая скорость вращения вала не зависит от его поступательного движения внутри подшипника. Такое допущение соответствует идеальному двигателю, который может прикладывать к валу момент любой величины. В действительности угловая скорость вращения двигателя, соединенного с валом, зависит от момента сопротивления вращению вала. Так как момент, приложенный к двигателю со стороны вала, существенно зависит от положения и скорости перемещения вала в подшипнике, то и угловая скорость вращения двигателя уже не будет постоянной во время движения вала. Поэтому вал и двигатель воздействуют друг на друга. В данной работе исследуется устойчивость положения равновесия вала в подшипнике скольжения с учетом этого воздействия. Оказывается, что даже в случае самой простой модели, о которой говорилось ранее, существуют зоны устойчивости – области параметров подшипника и двигателя, обеспечивающих устойчивое движение вала. Рассмотрены два типа двигателя: асинхронный и гистерезисный. Зоны устойчивости построены с помощью критерия Гурвица; получающиеся при этом неравенства решались на ЭВМ.

1. Рассматриваются два случая движения вала в подшипниках скольжения. В первом случае вал вращается асинхронным двигателем, во втором – гистерезисным. Предполагается, что течение смазки в зазоре между валом и подшипником – ламинарное, плоское, изотермическое, квазистационарное (силами инерции частиц смазки пренебрегаем); смазка – несжимаемая жидкость с постоянным коэффициентом вязкости μ; смазка целиком заполняет зазор между валом и подшипником; вал, подшипники и их опоры являются абсолютно жесткими. Предполагается также, что отношение радиального зазора δ к радиусу вала R мало, т. е. $\delta/R\ll 1$, где $\delta=R_1-R$; R_1 – радиус подшипника (фиг. 1).

В дальнейшем все вычисления проведены с точностью до членов, величина которых относится к оставленным членам как δ/R. Введем абсолютную систему координат O_1xy, связанную с подшипником, и полярную систему координат $O\rho\varphi$ (фиг. 1): O, O_1 – центры сечений вала и подшипника соответственно; угол φ отсчитывается от линии центров O_1O, которая образует с осью x угол φ_0; длина отрезка O_1O равна ε; x_0, y_0 – координаты центра вала O в системе координат O_1xy; α — угол поворота вала относительно подшипника.

Сделанные предположения позволяют описать движение жидкости в подшипнике следующей приближенной системой уравнений [7]:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\mu\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}=0 \tag{1.3}$$

с граничными условиями

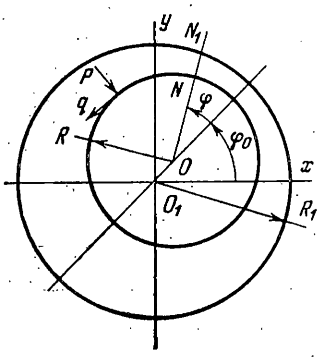
$$u_\rho|_{\rho=R}=y_0^{\cdot}\sin(\varphi+\varphi_0)+x_0^{\cdot}\cos(\varphi+\varphi_0),\; u_\rho|_{\rho=R+h}=0 \tag{1.4}$$

$$u_\varphi|_{\rho=R}=\alpha^{\cdot}R+y_0^{\cdot}\cos(\varphi+\varphi_0)-x_0^{\cdot}\sin(\varphi+\varphi_0),\; u_\varphi|_{\rho=R+h}=0 \tag{1.5}$$

Здесь $x_0^{\cdot}$, $y_0^{\cdot}$, $\alpha^{\cdot}$ — производные по времени от величин x_0, y_0, α соответственно; h — длина отрезка NN_1 (фиг. 1), которая определяется формулой: $h=\delta-\varepsilon\cos\varphi$, p — гидродинамическое давление; u_ρ, u_φ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы жидкости в полярной системе координат $O\rho\varphi$.

Уравнение (1.1) с учетом соотношений (1.2) и (1.5) интегрируется в виде

$$u_\varphi=\frac{1}{2\mu R}\frac{dp}{d\varphi}(\rho-R-h)(\rho-h)-$$
$$-[\alpha^{\cdot}R+y_0^{\cdot}\cos(\varphi+\varphi_0)-x_0^{\cdot}\sin(\varphi+\varphi_0)]\frac{\rho-R-h}{h} \tag{1.6}$$



Фиг. 1

Взяв интеграл от обеих частей уравнений неразрывности (1.3) по ρ в пределах от поверхности вала до поверхности подшипника, получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi}=Ru_\rho/_{\rho=R} \tag{1.7}$$

$$Q=\int_R^{R+h}u^\varphi(\rho)\,d\rho \tag{1.8}$$

Соотношения (1.4), (1.6)—(1.8) позволяют найти распределение давления по поверхности вала

$$\frac{dp}{d\varphi}=\frac{6\mu R^2}{h^3}[\alpha^{\cdot}h+2y_0^{\cdot}\cos(\varphi+\varphi_0)-2x_0^{\cdot}\sin(\varphi+\varphi_0)-C_0(t)] \tag{1.9}$$

где $C_0(t)$ — неизвестная функция времени, получаемая из условия непрерывности давления по поверхности вала: $p(0)=p(2\pi)$.

Поверхностная сила трения q, действующая на единицу площади поверхности вала (см. фиг. 1), находится по формуле [7]:

$$q=\mu\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} \tag{1.10}$$

Используя условие $p(0)=p(2\pi)$, а также соотношения (1.6), (1.10), имеем

$$q=\mu\frac{R}{h^2}[6x_0^{\cdot}\sin(\varphi+\varphi_0)-6y_0^{\cdot}\cos(\varphi+\varphi_0)-4\alpha^{\cdot}h+3C_0] \tag{1.11}$$

Интегрируя выражение (1.9) по φ в пределах от 0 до 2π и учитывая, что $p(0)=p(2\pi)$, определяем

$$C_0(t)=\{2\delta[\alpha^{\cdot}(\delta^2-\varepsilon^2)+3(y_0^{\cdot}x_0-y_0x_0^{\cdot})]\}/(\varepsilon^2+2\delta^2) \tag{1.12}$$

В последующих выкладках потребуются выражения результирующей силы и момента реакции жидкости, приложенных к валу со стороны жидкости. Проекции результирующей силы X, Y на оси системы координат O_1xy и момент реакции жидкости M_0 вокруг оси вала определяются формулами [7] (l — длина вала)

$$X=-l\int_0^{2\pi}p(\varphi)\cos(\varphi+\varphi_0)R\,d\varphi,\quad Y=-l\int_0^{2\pi}p(\varphi)\sin(\varphi+\varphi_0)R\,d\varphi$$
$$M_0=l\int_0^{2\pi}q(\varphi)R^2\,d\varphi \tag{1.13}$$

Интегралы в первых двух формулах (1.13) вычисляются по частям с учетом соотношения (1.9). Окончательно получаем следующие выражения:

$$X=\frac{6\pi\mu R^3l}{(\varepsilon^2+2\delta^2)(\delta^2-\varepsilon^2)^{1.5}}[-2\alpha^{\cdot}y_0(\delta^2-\varepsilon^2)-2x_0^{\cdot}(\varepsilon^2+2\delta^2)+6y_0(y_0x_0^{\cdot}-y_0^{\cdot}x_0)] \tag{1.14}$$

$$Y=\frac{6\pi\mu R^3l}{(\varepsilon^2+2\delta^2)(\delta^2-\varepsilon^2)^{1.5}}[2\alpha^{\cdot}x_0(\delta^2-\varepsilon^2)-2y_0^{\cdot}(\varepsilon^2+2\delta^2)-6x_0(y_0x_0^{\cdot}-y_0^{\cdot}x_0)] \tag{1.15}$$

$$M_0=-\frac{4\pi\mu R^3l}{(\varepsilon^2+2\delta^2)(\delta^2-\varepsilon^2)^{0.5}}[3(y_0x_0^{\cdot}-x_0y_0^{\cdot})+\alpha^{\cdot}(\delta^2+2\varepsilon^2)] \tag{1.16}$$

Предположим, что к валу приложена нагрузка **P** с проекциями 0, $-P$ на оси системы координат O_1xy. Уравнения движения вала в этом случае имеют вид

$$Mx_0^{\cdot\cdot}=X,\qquad My_0^{\cdot\cdot}=Y-P,\qquad I\alpha^{\cdot\cdot}=M_1+M_0 \tag{1.17}$$

Здесь M — масса вала; M_1 — момент двигателя, приложенный к валу относительно оси вала; I — момент инерции вала относительно его оси: $x_0^{\cdot\cdot}$, $y_0^{\cdot\cdot}$, $\alpha^{\cdot\cdot}$ — вторые производные по времени от величин x_0, y_0, α.

Для случая гистерезисного двигателя M_1 определяется выражением

$$M_1=K_1(\omega-\alpha^{\cdot})+K_2(\omega t-\alpha) \tag{1.18}$$

где ω, K_2, K_1 — некоторые постоянные, зависящие от конструктивных параметров двигателя; t — время, причем $K_2\neq 0$.

Выражение для момента M_1, развиваемого асинхронным двигателем, имеет вид: $M_1=K_1(\omega-\alpha^{\cdot})$.

2. В случае вращения вала асинхронным двигателем система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.17) допускает частное решение

$x_0=a$, $y_0=b$, $\alpha^{\cdot}=\alpha_0^{\cdot}$, которое определяется выражениями

$$P=\frac{12\pi\mu R^3 la\alpha_0^{\cdot}}{(a^2+2\delta^2)(\delta^2-a^2)^{0.5}},\quad b=0$$
$$\alpha_0^{\cdot}=\omega/[1+4\pi\mu R^3 lK_1^{-1}(\delta^2+2a^2)(2\delta^2+a^2)^{-1}(\delta^2-a^2)^{-0.5}] \tag{2.1}$$

Это решение соответствует положению равновесия вала, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\alpha_0^{\cdot}$. Введем в рассмотрение безразмерные параметры χ, b_1, b_2, b_3, b_4 по формулам

$$\chi=\frac{a}{\delta},\quad b_1=\frac{K_1\delta}{\pi\mu R^3 l},\quad b_2=\frac{M\delta^3\alpha_0^{\cdot}}{\pi\mu R^3 l}$$
$$b_3=\frac{P\delta^2}{\pi\mu R^3 l\omega},\quad b_4=\frac{I\delta\alpha_0^{\cdot}}{\pi\mu R^3 l} \tag{2.2}$$

Первое и третье соотношения (2.1) с учетом (2.2) преобразуются к виду

$$b_3=\frac{12\chi}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}+4b_1^{-1}(1+2\chi^2)}$$
$$\omega/\alpha_0^{\cdot}=1+4b_1^{-1}(1+2\chi^2)(2+\chi^2)^{-1}(1-\chi^2)^{-0.5} \tag{2.3}$$

В отличие от известных результатов [7], согласно первому равенству (2.3), величина нагрузки P, выдерживаемая валом, или соответственно величина b_3 ограничена, причем справедливы соотношения $b_3\leqslant b_1$, $\alpha_0^{\cdot}\leqslant\omega$.

Исследуем устойчивость положения равновесия, определяемого формулами (2.1), относительно переменных x_0, y_0, $\alpha^{\cdot}$. Линеаризуя систему уравнений (1.17), относительно этого положения равновесия и переходя к безразмерным переменным τ, x, y по формулам $\tau=t\alpha_0^{\cdot}$, $x_0=x\delta$, $y_0=x\delta$, получаем после несложных преобразований линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

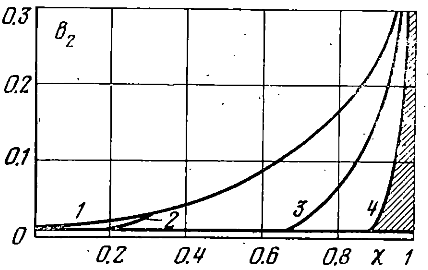
$$b_2x^{\cdot\cdot}+\frac{12}{(1-\chi^2)^{1.5}}x^{\cdot}+\frac{12}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}y=0$$
$$b_2y^{\cdot\cdot}-12\frac{2-\chi^2+2\chi^4}{(2+\chi^2)^2(1-\chi^2)^{1.5}}x+\frac{24}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}y^{\cdot}-\frac{12\chi}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}\alpha^{\cdot}=0$$
$$b_4\alpha^{\cdot\cdot}+\frac{4\chi(8-\chi^2+2\chi^4)}{(2+\chi^2)^2(1-\chi^2)^{1.5}}x-\frac{12\chi}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}y^{\cdot}+$$
$$+\left[b_1+\frac{4(1+2\chi^2)}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}\right]\alpha^{\cdot}=0 \tag{2.4}$$

В системе уравнений (2.4) точки над переменными означают дифференцирование по времени τ.

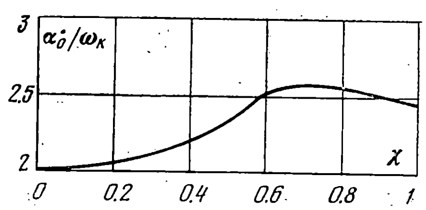
Относительно переменных x, y, $\alpha^{\cdot}$ система уравнений (2.4) является системой пятого порядка. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$a_5\lambda^5+a_4\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0,\quad a_5=b_2^2b_4$$
$$a_4=12b_2b_4(4-\chi^2)C_2^{1.5}+b_2^2b_1+4b_2^2(1+2\chi^2)C_1^{-1}C_2^{-0.5}$$
$$a_3=288b_4C_1^{-1}C_2^{-2}+48b_2C_2^{-2}C_1^{-1}+576C_2^{-2.5}C_1^{-1} \tag{2.5}$$
$$a_2=288b_1C_2^{-2}C_1^{-1}+576C_2^{-2.5}C_1^{-1},\quad a_1=144b_4(2-\chi^2+2\chi^4)C_1^{-3}C_2^{-2}$$
$$a_0=144b_1(2-\chi^2+2\chi^4)C_1^{-3}C_2^{-2}+576(2-3\chi^2+2\chi^4)C_1^{-4}C_2^{-1.5}$$
$$C_1=2+\chi^2,\quad C_2=1-\chi^2 \tag{2.6}$$

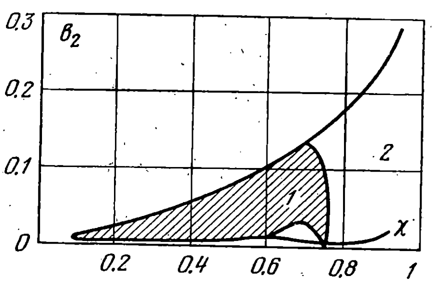
Области изменения параметров, для которых рассматриваемое положение равновесия устойчиво, можно найти методом Гурвица [8]. Ввиду громоздкости получаемых при этом неравенств все вычисления проводились на ЭВМ. Были построены зоны устойчивости в плоскости параметров χ, b_2 (фиг. 2). При этом предполагалось, что $b_4=b_2\cdot 10^4$. Кривые *1–4* (границы зон устойчивости) построены для значений b_1, равных 10, 100, 500, 1000 соответственно. Для каждого значения b_1 зона устойчивости находится снизу от границы (например, заштрихованная область — зона устойчивости для $b_1=1000$). Расположение зоны устойчивости позволяет заключить, что области устойчивости уменьшаются с увеличением параметра b_1. Когда $\chi\to 1$, границы зон устойчивости стремятся к асимптоте $\chi=1$. Выбор указанных величин параметра b_1 определялся в соответствии со второй формулой (2.3)



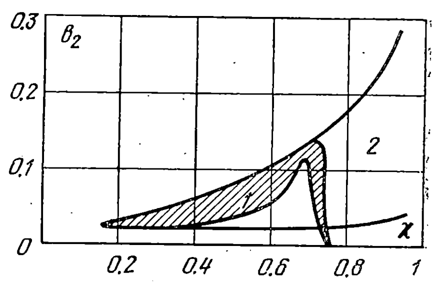
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

следующим условием: падение угловой скорости вращения нагруженного двигателя по отношению к угловой скорости ненагруженного двигателя не должно превышать 10%. На фиг. 3 построена зависимость величины $\alpha_0^{\cdot}/\omega_k$ от χ, где ω_k — частота колебаний вала на границе зоны устойчивости. График этой зависимости показывает, что устойчивость может нарушаться при значениях $\alpha_0^{\cdot}/\omega_k$ в промежутке от 2 до 2.6, что согласуется с экспериментальными результатами [3].

3. В случае вращения вала гистерезисным двигателем система уравнений движения вала (1.17) допускает частное решение a, b, α_0, определяемое формулами

$$P=\frac{12\pi\mu R^3 la\omega}{(a^2+2\delta^2)(\delta^2-a^2)^{0.5}},\quad b=0$$
$$\alpha_0=\omega t-\alpha_1,\quad \alpha_1=\frac{4\pi\mu R^3 l\omega(\delta^2+2a^2)}{K_2(a^2+2\delta^2)(\delta^2-a^2)^{0.5}}\tag{3.1}$$

Исследование устойчивости этого положения равновесия аналогично исследованию устойчивости в случае вала, вращаемого асинхронным двигателем, когда линеаризованные уравнения движения вала отличаются от системы уравнений (2.4) лишь последним уравнением, имеющим вид

$$b_4\alpha^{\cdot\cdot}+\frac{4\chi(8-\chi^2+2\chi^4)}{(2+\chi^2)^2(1-\chi^2)^{1.5}}x-\frac{12\chi}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}y^{\cdot}+$$

$$+\frac{b_5}{b_4}\alpha+\left[b_1+\frac{4(1+2\chi^2)}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{0.5}}\right]\alpha^{\cdot}=0$$

где $b_5=IK_2\delta^2/(\pi\mu R^3l)$; b_1, b_2, b_4, χ определяются по формулам (2.2), причем в выражениях для b_2, b_4 величина $\alpha_0^{\cdot}$ заменена на ω. Характеристическое уравнение системы является полиномом шестого порядка

$$a_6\lambda^6+a_5\lambda^5+a_4\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$$

$$a_6=b_2^2b_4,\ a_5=12b_2b_4(4-\chi^2)C_1^{-1}C_2^{-1.5}+b_2^2b_1+4b_2^2(1+2\chi^2)C_1^{-1}C_2^{-0.5}$$

$$a_4=b_5b_2^2b_4^{-1}+288b_4C_1^{-1}C_2^{-2}+48b_2C_2^{-2}+12b_2b_1(4-\chi^2)C_2^{-1.5}C_1^{-1} \qquad (3.2)$$

$$a_3=12b_2b_5b_4^{-1}(4-\chi^2)C_2^{-1.5}C_1^{-1}+288b_1C_2^{-2}C_1^{-1}+576C_1^{-1}C_2^{-2.5}$$

$$a_2=288b_5b_4^{-1}C_2^{-2}C_1^{-1}+144(2-\chi^2+2\chi^4)C_1^{-3}C_2^{-2}b_4^{-1}$$

$$a_1=144(2-\chi^2+2\chi^4)C_1^{-3}C_2^{-2}b_1+576(2-3\chi^2-2\chi^4)C_1^{-4}C_2^{-1.5}$$

$$a_0=144(2-\chi^2+2\chi^4)C_1^{-3}C_2^{-2}b_5b_4^{-1}$$

C_1, C_2 определены формулами (2.6).

Зоны устойчивости находятся методом Гурвица, все вычисления проведены на ЭВМ. На фиг. 4, 5 построены зоны устойчивости в плоскости параметров χ, b_2 для значений $b_4=b_2\cdot10^4$, $b_5=10^3$, $b_1=0.1$ и $b_1=10$ (области *1*, *2* на фиг. 4 соответственно) и для $b_5=10^4$, $b_1=0.1$, $b_1=10$ (области *1*, *2* на фиг. 5 соответственно). Эти зоны устойчивости имеют вид клиньев, они уменьшаются с увеличением параметров b_1, b_5. Указанные значения параметров b_1, b_5 выбирались на основании того, что разгон двигателя до скорости 0.9ω совершался за минуты, а величина фазы α_1 в последней из формул (3.1) не превышала 0.174. Было также вычислено отношение ω/ω_k на границах устойчивости. Оказалось, что оно может меняться в пределах от 1.4 до 2.6, причем меньшая величина достигается на нижней границе зоны устойчивости, а большая — на верхней.

Автор благодарит Д. М. Климова за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Поступила 3 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коровчинский М. В.* Теоретические основы работы подшипника скольжения. М., Машгиз, 1959.
2. Poritsky H., Contribution to the theory of oil whip. Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser E, 1953, vol. 75, No. 6, p. 1153–1163. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1953, т. 75, № 6.)
3. *Бурков М. С.* Вибрация валов в подшипниках скольжения высокооборотных машин. В кн.: Развитие гидродинамической теории смазки подшипников быстроходных машин. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. *Завьялов Г. А., Козлова Т. И., Кармазонов И. А.* Об устойчивости ротора в опорах скольжения с учетом гироскопических сил. Научн. тр. Челябинск. политехн. ин-та, 1973, № 123.
5. *Максимов С. П.* Автоколебания гибкого вала около равновесного состояния в подшипниках скольжения. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 4.
6. *Позняк Э. Л.* Исследование устойчивости движения роторов на подшипниках скольжения. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 2.
7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.