

СТАБИЛИЗАЦИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

В. Б. ЛАРИН

(Киев)

Особенность задачи синтеза системы стабилизации горизонтального движения шагающего аппарата обусловлена тем, что шагающий аппарат как объект управления в различные моменты времени описывается то дифференциальными, то разностными уравнениями. Отмечается, что этой математической моделью могут быть описаны аппараты с весомыми и невесомыми ногами, и для таких объектов синтез оптимального регулятора проводится в рамках линейной квадратичной гауссовой проблемы. Для частного случая критерия качества искомое периодическое решение уравнения Риккати находится в явном виде.

В приложении доказывается асимптотическая устойчивость замкнутой системы «объект+регулятор».

1. В [1] показано, что можно синтезировать удовлетворительную систему управления простейшим двуногим шагающим аппаратом, разбив общую задачу управления на две. Вертикальную стабилизацию аппарата можно осуществить изменением усилия в ноге, а задача управления горизонтальным движением может быть решена подходящим выбором координат точки опоры ноги на каждом шаге. Дальнейшее усложнение схемы шагающего аппарата связано с добавлением в систему управления горизонтальным движением новых элементов (стопы, компенсирующей массы и т. п. [2]). В связи с этим стабилизация горизонтального движения таких систем может осуществляться как путем непрерывного управления (управлениями движением компенсирующей массы, изменением положения точки нулевого момента в стопе и т. п.), так и путем импульсного управления, т. е. управления в дискретные моменты времени (выбор на каждом шаге координат точки опоры ноги). Поэтому при усложнении динамической схемы шагающего аппарата надо эффективно объединить оба способа стабилизации, т. е. синтезировать оптимальный регулятор, осуществляющий как непрерывное, так и импульсное управление. Объясним, что подразумевается под этим термином.

Обычно задача синтеза непрерывного регулятора относится к объектам, движение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (1.1)$$

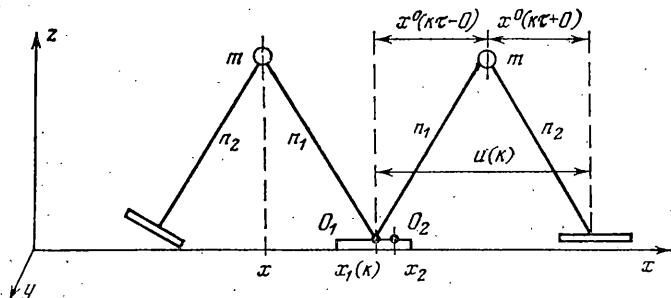
Импульсное регулирование связано с объектами, описываемыми конечно-разностными соотношениями

$$x(k+1) = F_0 x(k) + Mu(k) \quad (1.2)$$

В этих уравнениях F , F_0 , G , M — матрицы соответствующих размеров, x и u — векторы фазовых координат и управляющих воздействий. Использование термина «регулятор, осуществляющий как непрерывное, так и импульсное управление» связано с тем, что двуногий шагающий аппарат

как объект управления описывается как дифференциальными, так и разностными уравнениями.

Проиллюстрируем последнее утверждение двумя простейшими примерами. Пусть шагающий аппарат идеализируется, как снабженный стопой перевернутый математический маятник (фиг. 1). Он состоит из точечной массы m , двух невесомых ног n_1 и n_2 длиной h , на которые он поочередно (через интервал времени τ) опирается, и каждая нога имеет на конце стопу — устройство, которое позволяет путем приложения момента в точке соединения ноги и стопы (точке O_1) перемещать вдоль стопы «точку нулевого момента» (точку O_2)¹. Предположим, что массой можно пренебречь. Рассматривая малые отклонения маятника от вертикали и пренебрегая силами вязкого сопротивления, уравнение движения вдоль оси x



Фиг. 1

такой системы во время опирания на одну ногу можно записать в виде

$$\ddot{x}^* = gh^{-1}(x - x_2) = gh^{-1}(x - x_1(k) + x_1(k) - x_2)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести; x — координата массы m ; $x_1(k)$ — координата точки O_1 , которая остается постоянной величиной в течение рассматриваемого k -го шага ($(k-1)\tau < t < k\tau$) и скачкообразно изменяется на следующем шаге (в момент изменения опорной ноги) на величину $u(k)$ ²; x_2 — координата точки O_2 , эта координата может изменяться в течение шага вследствие прикладываемого момента в точке O_1 (непрерывное управление).

Структура написанного выше дифференциального уравнения говорит о том, что более естественно помещать начало системы координат в точку O_1 . В новой (изменяющейся с номером шага) системе координат уравнение движения аппарата выглядит так:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{o*} &= gh^{-1}x^o + gh^{-1}u, \quad (k-1)\tau < t < k\tau \quad (k=1, 2, \dots) \\ x^o &= x - x_1(k), \quad u = x_1(k) - x_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ясно, что это уравнение может быть записано в форме (1.1). В моменты смены опорной ноги ($t = k\tau$) горизонтальная скорость массы непрерывна и поэтому ее величина одинакова как в старой, так и в новой системах координат (начала этих систем совпадают с точками опоры ноги на k - и $k+1$ -м шагах соответственно)

$$\dot{x}^o(k\tau+0) = \dot{x}^o(k\tau-0) \quad (1.4)$$

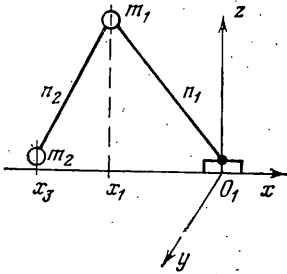
¹ На фиг. 1 изображен аппарат в начале и в конце k -го шага (аппарат опирается на ногу n_1).

² Как следствие предположения о безынерционности переносимой ноги величина $u(k)$ может выбираться произвольно (импульсное управление).

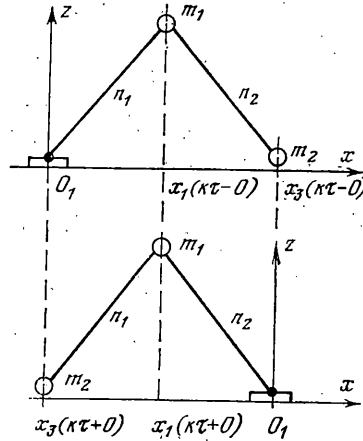
Координата x° в моменты $t=k\tau$ испытывает разрыв, так как $x^\circ(k\tau-0)$ измеряется в старой системе координат, а $x^\circ(k\tau+0)$ — в новой (фиг. 1). Имеем

$$\begin{aligned} x^\circ(k\tau+0) &= x^\circ(k\tau-0) + x_1(k+1) - x_1(k) = \\ &= x^\circ(k\tau-0) + u(k) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Очевидно, соотношения (1.4) и (1.5) являются конечно-разностными уравнениями, аналогичными (1.2). Следовательно, рассмотренный шагающий аппарат с невесомыми ногами описывается как объект управления линейными дифференциально-разностными уравнениями (1.1), (1.2) (дифференциальными уравнениями (1.1) при $(k-1)\tau < t < k\tau$ и разностными уравнениями (1.2) при $t=k\tau$, $k=1, 2, \dots$).



Фиг. 2



Фиг. 3

Усложним рассмотренную выше модель шагающего аппарата, приняв во внимание массу стопы переносимой ноги (модель с весомыми ногами). Пусть шагающий аппарат моделируется как двойной математический маятник, изображенный на фиг. 2, где обозначено: m_1 — масса корпуса аппарата; m_2 — масса стопы переносимой ноги; n_1 — опорная нога; n_2 — переносимая нога. Как и на фиг. 1, точка O_1 является местом соединения ноги и стопы и, кроме того, служит началом системы координат x, y, z .

Предположим, что кроме момента u_1 , действующего в стопе, к переносимой ноге в точке соединения ее с массой корпуса может быть приложен управляющий момент u_2 . Как и в предыдущем примере, не будем рассматривать вопросы вертикальной стабилизации аппарата, полагая, что масса m_1 движется горизонтально вдоль оси x . Введем следующие фазовые координаты аппарата: x_1 — координата массы m_1 , $x_2 = \dot{x}_1$, x_3 — координата массы m_2 , $x_4 = \dot{x}_3$ (фиг. 2). Очевидно, в окрестности вертикального положения корпуса аппарата существует такая область значений фазовых координат (которые являются компонентами вектора $x' = \|x_1, x_2, x_3, x_4\|$), что в течение k -го шага (период опирания аппарата на одну ногу $(k-1)\tau < t < k\tau$) изменение вектора x (горизонтальное движение аппарата) с достаточной точностью можно описать линейной системой дифференциальных уравнений (1.1), в которой вектором управляющих воздействий будет $u' = \|u_1, u_2\|$ (штрих означает операцию транспонирования).

В моменты смены опорной ноги ($t=k\tau$) происходит скачкообразное изменение фазовых координат аппарата. Найдем соотношения, описываю-

щие изменение фазового вектора в момент смены опорной ноги (и, следовательно, системы координат). Так как, по определению, начало системы отсчета фазовых координат аппарата совпадает с точкой соединения опорной ноги и стопы, то, как видно из фиг. 3, при смене опорной ноги изменения координат x_1 и x_3 подчинены следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_1(k\tau+0) &= x_1(k\tau-0) - x_3(k\tau-0), \\ x_3(k\tau+0) &= -x_3(k\tau-0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

В верхней части фиг. 3 изображен аппарат в момент $t=k\tau-0$, а в нижней — в момент $t=k\tau+0$.

Предполагая ограниченность моментов u_1 и u_2 (скорости масс являются непрерывными функциями времени), получим еще два условия

$$x_2(k\tau+0) = x_2(k\tau-0), \quad x_4(k\tau+0) = 0 \quad (1.7)$$

Соотношения (1.6) и (1.7) могут быть записаны в форме (1.2)

$$x(k\tau+0) = F_\delta x(k\tau-0), \quad F_\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Таким образом, анализ этих примеров демонстрирует различие математических моделей изменения фазовых координат шагающих аппаратов с весомыми и невесомыми ногами и, кроме того, показывает, что обе эти модели могут быть описаны дифференциальными и разностными уравнениями (1.1) и (1.2).

2. Рассмотрим задачу синтеза системы стабилизации горизонтального движения двуногого шагающего аппарата в следующей постановке. Аппарат совершает одноопорную регулярную походку, и чередование опорных ног происходит через интервал времени τ . В течение k -го шага $((k-1)\tau < t < k\tau)$ дифференциальные уравнения, описывающие изменение фазового вектора, имеют вид

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (2.1)$$

Здесь x — n -мерный фазовый вектор, u — m -мерный вектор управляющих воздействий, элементы матриц F , G — периодические (с периодом τ) функции времени.

В моменты смены опорной ноги ($t=k\tau$) справедливо соотношение

$$x(k\tau+0) = F_\delta x(k\tau-0) + Mu(k) \quad (2.2)$$

в котором матрицы F_δ и M не зависят от k .

Пусть известен m -мерный вектор $r(t)$ (программное управляющее воздействие), которому соответствует $\eta(t)$ — желаемое периодическое (с периодом τ) решение уравнений (2.1), (2.2)

$$\dot{\eta} = F\eta + Gr \quad (2.3)$$

$$\eta(k\tau+0) = \eta((k-1)\tau+0) = F_\delta \eta(k\tau-0) + Mr(k)$$

По определению, ε — ошибка в системе стабилизации горизонтального движения аппарата равна

$$\varepsilon = x - \eta \quad (2.4)$$

Согласно (2.1) — (2.3)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= F\varepsilon + Gu_\varepsilon \text{ при } (k-1)\tau < t < k\tau \\ \varepsilon(k\tau+0) &= F_\delta \varepsilon(k\tau-0) + Mu_\varepsilon(k), \quad u_\varepsilon = u - r \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$u_\varepsilon(k) = u(k) - r(k)$$

В рассматриваемой задаче требуется найти такую зависимость u_ε от ε , чтобы режим походки, определяемый вектором $\eta(t)$, был асимптотически устойчив (при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$), и эта зависимость минимизировала бы квадратичный функционал

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (\varepsilon' Q \varepsilon + u_\varepsilon' B u_\varepsilon) dt + \sum_{k=1}^{\infty} u_\varepsilon'(k) C u_\varepsilon(k) \quad (2.6)$$

Используя обычную для задач линейной квадратичной гауссовой проблемы процедуру отыскания минимума функционала (2.6) в виде квадратичной формы

$$I_m(t_0) = \min_{u_\varepsilon, u_\varepsilon(k)} I(t_0) = \varepsilon'(t_0) S(t_0) \varepsilon(t_0) \quad (2.7)$$

найдем, что

$$u_\varepsilon = -B^{-1} G' S \varepsilon \text{ при } (k-1)\tau < t < k\tau \quad (2.8)$$

и на этом участке времени матрица S должна в соответствии с (2.5) и (2.6) удовлетворять уравнению Риккати

$$-S' = S F + F' S - S G B^{-1} G' S + Q \quad (2.9)$$

Выражение для $u_\varepsilon(k)$ найдем, оптимизируя $I(k\tau-0)$. Согласно (2.6) и (2.7)

$$\begin{aligned} I(k\tau-0) &= I_m(k\tau+0) + u_\varepsilon'(k) C u_\varepsilon(k) = \\ &= \varepsilon'(k\tau+0) S(k\tau+0) \varepsilon(k\tau+0) + u_\varepsilon'(k) C u_\varepsilon(k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это выражение имеет минимум при

$$u_\varepsilon(k) = -(M' S(k\tau+0) M + C)^{-1} M' S(k\tau+0) F_\delta \varepsilon(k\tau-0) \quad (2.11)$$

Подставив это выражение в (2.10), принимая во внимание (2.5) и (2.7), получим соотношения, связывающие $S(k\tau+0)$ и $S(k\tau-0)$:

$$\begin{aligned} S(k\tau-0) &= F_\delta' [S(k\tau+0) - S(k\tau+0) M (C + \\ &+ M' S(k\tau+0) M)^{-1} M' S(k\tau+0)] F_\delta \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если существует $MC^{-1}M'$, то эту зависимость можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S(k\tau-0) &= F_\delta' S(k\tau+0) (E + MC^{-1}M' S(k\tau+0))^{-1} F_\delta = \\ &= F_\delta' (E + S(k\tau+0) MC^{-1}M')^{-1} S(k\tau+0) F_\delta \end{aligned} \quad (2.13)$$

Стационарность рассматриваемой задачи (параметры системы стабилизации не должны зависеть от k — номера шага) накладывает условие периодичности на матрицу S :

$$S(k\tau+0) = S((k-1)\tau+0) \quad (2.14)$$

Условие (2.14) в совокупности с (2.9), (2.12) и требованием асимптотической устойчивости системы (2.5), (2.8), (2.11) определяет искомую периодическую матрицу $S(t)$. Для конкретизации этого условия воспользуемся теоремой 2 работы [3] (см. также § 36 работы [4]). В соответствии с [3] решение уравнения (2.9) на участке времени $0 < t < \tau$ можно представить так:

$$S(t) = [\theta_{21}(t) + \theta_{22}(t) S(+0)] [\theta_{11}(t) + \theta_{12}(t) S(+0)]^{-1} \quad (2.15)$$

где матрицы $\theta_{ij}(t)$ ($i, j=1, 2$) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} \dot{\theta}_{11} & \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{21} & \dot{\theta}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F & -GB^{-1}G' \\ -Q & -F' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

и начальным условиям

$$\theta_{ij}(0) = E \text{ при } i=j, \quad \theta_{ij}(0) = 0 \text{ при } i \neq j \quad (2.17)$$

Из (2.14), принимая во внимание (2.13) и (2.15), получим нелинейное матричное уравнение для матрицы $S(+0) = S(k\tau+0)$, определяющее периодическую матрицу $S(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.9) и соотношению (2.13)

$$\begin{aligned} F_0' S(+0) (E + MC^{-1} M' S(+0))^{-1} F_0 (\theta_{11}(\tau) + \\ + \theta_{12}(\tau) S(+0)) = (\theta_{21}(\tau) + \theta_{22}(\tau) S(+0)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из решений уравнения (2.18) надо выбрать то значение $S(+0)$, которое определяет асимптотически устойчивую систему «объект (2.5) + регулятор (2.8), (2.11)». Ниже это решение будет построено в случае, когда входящая в (2.6) матрица $Q=0$ (стабилизация системы минимальными управляющими усилиями).

Из уравнения (2.16) и начальных условий (2.17) следует, что при $Q=0$ имеем $\theta_{21}(t) = 0$, а матрицы θ_{11} и θ_{22} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{\theta}_{11} = F\theta_{11}, \quad \dot{\theta}_{22} = -F'\theta_{22} \quad (2.19)$$

и начальным условиям (2.17). Следовательно

$$\theta_{22}(t) = (\theta_{11}'(t))^{-1} \quad (2.20)$$

Обозначив $\Phi(t) = \theta_{11}(t)$, перепишем уравнение (2.18) в виде

$$\begin{aligned} \Phi'(\tau) F_0' S(+0) (E + MC^{-1} M' S(+0))^{-1} F_0 \Phi(\tau) = \\ = S(+0) (E + \Phi^{-1}(\tau) \theta_{12}(\tau) S(+0))^{-1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Сделаем дополнительное предположение. Пусть матрица $F_0 \Phi(\tau)$ не имеет собственных чисел, по модулю равных единице, т. е. существует матрица T , такая, что

$$T^{-1} F_0 \Phi(\tau) T = \begin{vmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

причем собственные числа матрицы Λ_+ лежат вне единичного круга, а собственные числа Λ_- — внутри.

Матрицу $S(+0)$ будем искать в виде

$$S(+0) = (T')^{-1} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} T^{-1} \quad (2.23)$$

где R — подлежащая определению матрица, размер которой совпадает с размером блока Λ_+ .

Подставив (2.23) в (2.21) и принимая во внимание (2.22), получим

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \Lambda_+' & 0 \\ 0 & \Lambda_-' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ E + T^{-1} M C^{-1} M' (T')^{-1} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{vmatrix} \right\} = \\ = \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ E + T^{-1} (\Phi^{-1}(\tau) \theta_{12}(\tau)) (T')^{-1} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Разобьем на блоки матрицы

$$T^{-1}MC^{-1}M'(T')^{-1}, T^{-1}\Phi^{-1}(t)\theta_{12}(t)(T')^{-1}$$

$$T^{-1}MC^{-1}M'(T')^{-1} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

$$T^{-1}\Phi^{-1}(t)\theta_{12}(t)(T')^{-1} = \begin{vmatrix} \gamma_{11}(t) & \gamma_{12}(t) \\ \gamma_{21}(t) & \gamma_{22}(t) \end{vmatrix}$$

Заметим, что матрица $\Phi^{-1}(t)\theta_{12}(t)$ симметрична, так как, согласно (2.16), (2.17), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t)\theta_{12}(t)) = -\Phi^{-1}(t)GB^{-1}G'(\Phi'(t))^{-1} \quad (2.26)$$

и нулевому начальному условию.

Принимая во внимание (2.25), матрицы, стоящие в фигурных скобках соотношения (2.24), можно преобразовать следующим образом:

$$\left\{ E + T^{-1}\Phi^{-1}(\tau)\theta_{12}(\tau)(T')^{-1} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}^{-1} = \begin{vmatrix} \gamma_{11}(\tau)R + E & 0 \\ \gamma_{21}(\tau)R & E \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\gamma_{11}(\tau)R + E)^{-1} & 0 \\ -(\gamma_{11}(\tau)R + E)^{-1}\gamma_{21}(\tau)R & E \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

$$\left\{ E + T^{-1}MC^{-1}M'(T')^{-1} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}^{-1} = \begin{vmatrix} (g_{11}R + E)^{-1} & 0 \\ -(g_{11}R + E)^{-1}g_{21}R & E \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

Согласно (2.24)

$$\Lambda_+'R(E + g_{11}R)^{-1}\Lambda_+ = R(E + \gamma_{11}(\tau)R)^{-1}$$

и, следовательно, матрица R^{-1} удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$R^{-1} - \Lambda_+'R^{-1}(\Lambda_+')^{-1} = \Lambda_+'g_{11}(\Lambda_+')^{-1} - \gamma_{11}(\tau) \quad (2.29)$$

Определив таким образом значение матрицы $S(+0)$, можно записать выражение для искомой матрицы $S(t)$ на всем периоде ($0 < t < \tau$). В рассматриваемом случае ($Q=0$) выражение (2.15) имеет вид

$$S(t) = (\Phi'(t))^{-1}S(+0)[E + \Phi^{-1}(t)\theta_{12}(t)S(+0)]^{-1}\Phi^{-1}(t)$$

Воспользовавшись преобразованием (2.27), найдем

$$S(t) = (\Phi'(t))^{-1}(T')^{-1} \begin{vmatrix} (R^{-1} + \gamma_{11}(t))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} T^{-1}\Phi^{-1}(t), \quad (0 < t < \tau) \quad (2.30)$$

В приложении показано, что определяемая этой формулой матрица $S(t)$ является тем периодическим решением уравнений (2.9) и (2.12), которое обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.5), (2.8), (2.11). Точнее говоря, показано, что в синтезированной таким образом замкнутой системе объект+регулятор собственные числа матрицы, связывающие $\varepsilon(k\tau+0)$ и $\varepsilon((k+1)\tau+0)$, лежат внутри единичного круга, так как совпадают с собственными числами матриц Λ_- и Λ_+^{-1} (система асимптотически устойчива), следовательно, эти числа определяются только F , F_0 , τ и не зависят от матриц B , C , G , M . Выражение (2.30) можно конкретизировать (определить явный вид матрицы $\gamma_{11}(t)$), когда элементы матриц F , G , M , B , C не зависят от времени, а $F_0 = E$. В рассматриваемом случае постоянной матрицы F , $\Phi(t) = \exp Ft$ и, как следствие (2.22)

$$T^{-1}FT = \begin{vmatrix} F_+ & 0 \\ 0 & F_- \end{vmatrix}$$

причем собственные числа матрицы F_+ лежат в правой части полуплоскости, а F_- — в левой ($\exp F_+ \tau = \Lambda_+$, $\exp F_- \tau = \Lambda_-$).

Дифференциальное уравнение, определяющее $\gamma_{ij}(t)$ ($i, j=1, 2$), получим из (2.26)

$$\|\dot{\gamma}_{ij}\| = -T^{-1} (\exp -Ft) GB^{-1}G' (\exp -F't) (T')^{-1}$$

Определим матрицы D_{ij} ($i, j=1, 2$) как результат разбиения на блоки матрицы

$$T^{-1}GB^{-1}G'(T')^{-1} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix}$$

Это разбиение производится таким образом, что размер блока D_{11} равен размеру блока F_+ . Следовательно

$$\dot{\gamma}_{11}(t) = -(\exp -F_+ t) D_{11} (\exp -F_+' t), \quad \gamma_{11}(0) = 0 \quad (2.31)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\gamma_{11}(t) = (\exp -F_+ t) \Pi (\exp -F_+' t) - \Pi \quad (2.32)$$

где матрица Π не зависит от времени и удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$F_+' \Pi + \Pi F_+ = D_{11} \quad (2.33)$$

которое получается в результате подстановки (2.32) в (2.31).

Эти соотношения позволяют в рассматриваемом случае представить $S(t)$ в виде

$$S(t) = (T')^{-1} \begin{vmatrix} N(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} T^{-1}$$

$$N(t) = [(\exp -F_+(\tau-t)) (R^{-1} + g_{11} - \Pi) (\exp -F_+'(\tau-t)) + \Pi]^{-1}$$

Использование предлагаемого метода синтеза системы стабилизации горизонтального движения двуногого шагающего аппарата приводит к тому, что матрица коэффициентов обратной связи, определяемая выражением (2.8), даже в случае стационарного объекта (постоянных матриц F, G) будет нестационарной. Нестационарность коэффициентов обратной связи, естественно, вызывает определенные трудности при реализации, однако некоторые результаты исследований (см. [2], стр. 422) говорят о целесообразности использования переменных во времени коэффициентов цепи обратной связи в следящих системах антропоморфных механизмов.

Приложение. Покажем, что определяемая выражением (2.30) матрица $S(t)$ является тем решением уравнений (2.9) и (2.12), которое обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.5), (2.8), (2.11). Принимая во внимание периодичность матриц S, F, G , для доказательства асимптотической устойчивости системы (2.5), (2.8), (2.11) достаточно показать, что обусловленная этой системой матрица, связывающая $\varepsilon(+0)$ и $\varepsilon(\tau+0)$, имеет собственные числа, которые по модулю меньше единицы.

Произведем замену переменных

$$\varepsilon = \Phi(t) T y \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

Уравнения (2.2) и (2.8) в новых переменных можно записать так:

$$\begin{aligned} y' &= -T^{-1} \Phi^{-1}(t) GB^{-1}G'S \Phi(t) T y = \\ &= -T^{-1} \Phi^{-1}(t) GB^{-1}G'(\Phi'(t))^{-1} (T')^{-1} \begin{vmatrix} R^{-1} + \gamma_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} y \end{aligned}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее изменение вектора y , имеет следующую структуру:

$$y' = \begin{pmatrix} v_{11}(t) & 0 \\ v_{21}(t) & 0 \end{pmatrix} y$$

Два нулевых блока в матрице коэффициентов этого дифференциального уравнения указывают на существенно различный характер преобразования отдельных компонент вектора y . Перепишем последнее уравнение в виде

$$y_+' = v_{11}(t)y_+, \quad y_-' = v_{21}(t)y_+, \quad y = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что соотношение, связывающее $y(\tau-0)$ и $y(+0)$, имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} y_+(\tau-0) \\ y_-(\tau-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(\tau) & 0 \\ f_{21}(\tau) & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+(+0) \\ y_-(+0) \end{pmatrix}$$

т. е.

$$\varepsilon(\tau-0) = \Phi(\tau)T \begin{pmatrix} f_{11}(\tau) & 0 \\ f_{21}(\tau) & E \end{pmatrix} T^{-1}\varepsilon(+0)$$

Принимая во внимание (2.5) и (2.11), найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau+0) &= [F_\delta - M(M'S(+0)M+C)^{-1}M'S(+0)F_\delta]\varepsilon(\tau-0) = \\ &= (E+MC^{-1}M'S(+0))^{-1}F_\delta\Phi(\tau)T \begin{pmatrix} f_{11}(\tau) & 0 \\ f_{21}(\tau) & E \end{pmatrix} T^{-1}\varepsilon(+0) \end{aligned}$$

Воспользовавшись (2.22) и (2.28), перепишем последнее соотношение так:

$$\begin{aligned} T^{-1}\varepsilon(\tau+0) &= \begin{pmatrix} (g_{11}R+E)^{-1} & 0 \\ -(g_{11}R+E)^{-1}g_{21}R & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11}(\tau) & 0 \\ f_{21}(\tau) & E \end{pmatrix} T^{-1}\varepsilon(+0) = \\ &= \begin{pmatrix} (g_{11}R+E)^{-1}\Lambda_+f_{11}(\tau) & 0 \\ -(g_{11}R+E)^{-1}g_{21}R\Lambda_+f_{11}(\tau) + \Lambda_-f_{21}(\tau) & \Lambda_- \end{pmatrix} T^{-1}\varepsilon(+0) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Так как собственные числа матрицы Λ_- лежат внутри единичного круга, то для решения вопроса устойчивости замкнутой системы надо определить собственные числа матрицы $(g_{11}R+E)^{-1}\Lambda_+f_{11}(\tau)$. Выражение этой матрицы найдем из другого соотношения, связывающего $\varepsilon(\tau+0)$ и $\varepsilon(+0)$.

Согласно (2.5), (2.8), (2.9), на участке времени $0 < t < \tau$:

$$\frac{d}{dt}(S\varepsilon) = -F'S\varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad S(t)\varepsilon(t) = (\Phi'(t))^{-1}S(+0)\varepsilon(+0)$$

и поэтому $S(\tau-0)\varepsilon(\tau-0) = (\Phi'(\tau))^{-1}S(+0)\varepsilon(+0)$.

Принимая во внимание периодичность $S(t)$ и (2.5), (2.11) и (2.12), найдем

$$\begin{aligned} S(\tau-0)\varepsilon(\tau-0) &= F_\delta'[S(\tau+0) - S(\tau+0)M(C + \\ &+ M'S(\tau+0)M)^{-1}M'S(\tau+0)]F_\delta\varepsilon(\tau-0) = F_\delta'S(+0)\varepsilon(\tau+0) \end{aligned}$$

т. е.

$$F_\delta'S(+0)\varepsilon(\tau+0) = (\Phi'(\tau))^{-1}S(+0)\varepsilon(+0)$$

или

$$\begin{pmatrix} \Lambda_+' & 0 \\ 0 & \Lambda_-' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\varepsilon(\tau+0) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\varepsilon(+0) \quad (2.35)$$

Умножив левую и правую части (2.34) на матрицу

$$\begin{pmatrix} \Lambda_+'R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_+' & 0 \\ 0 & \Lambda_-' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и сравнивая полученный результат с (2.35), найдем, что

$$\Lambda_+'R(g_{11}R+E)^{-1}\Lambda_+f_{11}(\tau) = R$$

или

$$(g_{11}R+E)^{-1}\Lambda_+f_{11}(\tau) = R^{-1}(\Lambda_+')^{-1}R$$

Таким образом

$$\varepsilon(\tau+0) = T \begin{vmatrix} R^{-1}(\Lambda_+)^{-1}R & 0 \\ A & \Lambda_- \end{vmatrix} T^{-1}\varepsilon(+0)$$

$$A = -(g_{11}R + E)^{-1}g_{21}R\Lambda_+f_{11}(\tau) + \Lambda_-f_{21}(\tau)$$

и, следовательно, собственные числа матрицы, связывающие $\varepsilon(\tau+0)$ и $\varepsilon(+0)$, совпадают с собственными числами матриц Λ_- и Λ_+^{-1} , т. е. лежат внутри единичного круга. Этим заканчивается доказательство асимптотической устойчивости замкнутой системы объект+регулятор.

Поступила 14 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларин В. Б. Стабилизация двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТГ, 1976, № 5.
2. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. М., «Мир», 1976.
3. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear prediction and filtering theory. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engrs, 1961, vol. 83, No. 1, p. 95-100. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. D, т. 83, 1961, № 1.)
4. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., «Наука», 1976.