

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ

Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. Д. ЛЕЩЕНКО

(Москва, Одесса)

Исследованы некоторые случаи движения свободного твердого тела, содержащего подвижную внутреннюю массу. Вначале проведен анализ пассивного движения твердого тела, несущего подвижную точечную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии квадратичного трения. В случае вязкого трения аналогичная задача исследована в [1, 2]. Затем решена задача об оптимальной по быстродействию стабилизации свободного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом вязкоупругим образом. Считается, что торможение вращений осуществляется при помощи управляющего момента, ограниченного по модулю, причем величина ограничения может быть переменной во времени. Аналогичные задачи исследования управляемого движения твердого тела относительно центра масс рассматривались, например, в работах [3-5] и др.

1. Рассматривается свободное движение твердого тела, к которому в некоторой неподвижной относительно тела точке O_1 прикреплена точечная масса m . Предполагается, что при относительном движении на точку m действует возвращающая упругая сила с коэффициентом жесткости c , а также сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости — квадратичное трение с коэффициентом μ . Тогда векторное уравнение относительного движения точки m , согласно методике работы [1], можно представить в виде

$$\lambda |\mathbf{r}'| \mathbf{r}' + \Omega^2 \mathbf{r} = - \{ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho} + (1 - m/M) [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{r}''] \} \quad (1.1)$$

Здесь $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \mu/m$, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки O_1 , \mathbf{r} — радиус-вектор точки m относительно O_1 , $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость тела, M — суммарная масса твердого тела и подвижной точки, штрих означает производную по времени t в связанной с телом системе координат. Уравнение (1.1) удобнее рассматривать в системе координат, связанной с телом; тогда $\boldsymbol{\rho}$ — постоянный вектор, $\boldsymbol{\omega}$ — некоторая неизвестная пока функция времени.

Ставится задача исследовать движение системы, т. е. найти описывающие его векторы \mathbf{r} и $\boldsymbol{\omega}$ как функции времени при заданных произвольных начальных условиях. В общем случае решение задачи построить не удастся. Однако если предположить коэффициенты связи λ и Ω таковыми, что «свободные» движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот, то в этом случае движение твердого тела близко к движению Эйлера — Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малы. Если взять

$$\lambda = \Lambda \Omega^3, \quad \Omega \gg \omega \quad (\omega = |\boldsymbol{\omega}|),$$

то «вынужденное» движение системы (1.1) приближенно записывается в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\Omega^{-2} \mathbf{a} + \Lambda \Omega^{-3} |\mathbf{a}'| \mathbf{a} + O(\Omega^{-4}) \\ \mathbf{a} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Штрих, как отмечалось, означает скорость изменения в связанной с телом системе координат. Далее предполагается, что начало этой системы координат находится в точке O — центре инерции твердого тела, и массы m . Тогда уравнение, определяющее искомый вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, находится из условия постоянства момента количества движения системы относительно точки O и может быть представлено в форме [1]:

$$I_0^* \cdot \boldsymbol{\omega}' + (\boldsymbol{\omega} \times I_0^* \cdot \boldsymbol{\omega}) = -(\mathbf{k}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) \quad (1.3)$$

Здесь I_0^* — тензор инерции твердого тела и массы m , находящейся в точке O_1 , относительно центра инерции O . Величину \mathbf{k} условно можно назвать вектором момента количества движения подвижной массы m : она обращается в нуль, если внутренние движения отсутствуют, т. е. $\mathbf{r}' = 0$, $\mathbf{r} = 0$. В общем случае с учетом (1.2) вектор \mathbf{k} приближенно равен

$$\mathbf{k} = m [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{r}') + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] + O(\Omega^{-4}) \quad (1.4)$$

Здесь величина \mathbf{r} вычисляется приближенно согласно (1.2), а производная \mathbf{r}' , которая выражается через $\boldsymbol{\omega}'$, находится при помощи соотношения, следующего непосредственно из (1.3):

$$\boldsymbol{\omega}' = -(I_0^*)^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega} \times I_0^* \cdot \boldsymbol{\omega} + O(\Omega^{-2}) \quad (1.5)$$

Таким образом, величина \mathbf{r}' определяется с нужной степенью точности как функция $\boldsymbol{\omega}$. Аналогично находятся последующие производные \mathbf{r}'' , $\boldsymbol{\omega}''$. В результате для определения вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (1.3) на основе (1.4), (1.5) получается искомое уравнение вида [1]:

$$I_0^* \cdot \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times (I_0^* \cdot \boldsymbol{\omega}) = \Phi(\boldsymbol{\omega}) + O(\Omega^{-4}) \quad (1.6)$$

Здесь функция $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ является полиномом, содержащим четвертые и восьмые степени вектора $\boldsymbol{\omega}$, и состоит из слагаемых, величины которых имеют порядок Ω^{-2} и Ω^{-3} . В общем случае функция Φ имеет довольно громоздкий вид и ее выражение не приводится. В следующем п. 2 строится решение задачи Коши для уравнения (1.6) в частном случае осевой симметрии.

2. Исследуем движение динамически симметричного твердого тела, несущего подвижную точечную массу m , соединенную с телом в некоторой точке O_1 на оси симметрии. Считается, что при относительном движении на точку m действует возвращающая упругая сила и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости (см. п. 1). Начало декартовой системы координат, связанной с телом, поместим в центр инерции O системы, состоящей из тела и точечной массы, расположенной в точке O_1 . Орты этой системы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ направим так, чтобы орт \mathbf{e}_3 совпадал с осью динамической симметрии системы. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ точки O_1 равен $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_3$, причем для определенности предполагается, что $\rho > 0$. В этой системе координат тензор инерции I_0^* имеет диагональный вид [1]:

$$I_0^* = \text{diag}(I, I, I_*) \quad (2.1)$$

Величины I и I_* называются экваториальным и осевым моментами инерции соответственно. Так как $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$ ($i=1, 2, 3$), то уравнение ну-

левого приближения типа (1.5) для вычисления производных с учетом (2.1) записывается в скалярной форме

$$\omega_1' = d\omega_2\omega_3, \quad \omega_2' = -d\omega_1\omega_3, \quad \omega_3' = 0 \quad (d=1-I*I^{-1}) \quad (2.2)$$

Для определения правой части уравнения движения типа (1.6) вычислим величины a и a' в выражении для \mathbf{r} (1.2). При помощи соотношений (2.2) находим

$$\begin{aligned} a &= \rho\omega_3(\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2)I*I^{-1} - \rho\omega_\perp^2\mathbf{e}_3, & \omega_\perp &= (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} \\ a' &= \rho\omega_3^2I*I^{-1}d(\omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В результате для вектора \mathbf{k} получаем явное выражение через переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ с погрешностью $O(\Omega^{-4})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= m\rho^2\Omega^{-2}[(2\omega_\perp^2 + I*^2I^{-2}\omega_3^2)(\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2) + I*I^{-1}\omega_\perp^2\omega_3\mathbf{e}_3] - \\ &\quad - m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}I*^3I^{-3}d|d|\omega_\perp\omega_3^5(\omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее, искомое выражение для производной \mathbf{k}' вычисляется аналогично при помощи формул (2.2). Процедура вычислений довольно проста, однако следует отметить, что в силу (2.2) $\omega_\perp' = 0$.

Проецируя теперь уравнение (1.6) на орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, получим искомые уравнения движения

$$\begin{aligned} \omega_1' - d\omega_2\omega_3 &= A\omega_2\omega_3 + B\omega_1\omega_3^5, & \omega_1(0) &= \omega_{10} \\ \omega_2' + d\omega_1\omega_3 &= -A\omega_1\omega_3 + B\omega_2\omega_3^5, & \omega_2(0) &= \omega_{20} \\ \omega_3' &= -BI*^2\omega_\perp^2\omega_3^5, & \omega_3(0) &= \omega_{30} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь для сокращения введены обозначения

$$A = m\rho^2\Omega^{-2}I*I^{-4}K^2, \quad K^2 = I^2\omega_\perp^2 + I*^2\omega_3^2, \quad B = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}I*^4I^{-5}d|d|\omega_\perp \quad (2.6)$$

Складывая уравнения (2.5), умноженные на $I^2\omega_1, I^2\omega_2$ и $I*^2\omega_3$ соответственно, находим первый интеграл движения — модуль кинетического момента $K = |\mathbf{K}|$:

$$K = K_0 = \text{const}, \quad K_0^2 = I^2\omega_{\perp 0}^2 + I*^2\omega_{30}^2 \quad (2.7)$$

Система (2.5) допускает дальнейшее интегрирование. Для определения величины ω воспользуемся следующим приемом [1]. Определим проекции вектора \mathbf{K} на главные центральные оси инерции следующим образом:

$$I\omega_1 = K \sin \theta \cos \varphi, \quad I\omega_2 = K \sin \theta \sin \varphi, \quad I*\omega_3 = K \cos \theta \quad (2.8)$$

Здесь θ — угол нутации, φ — угол чистого вращения. Так как, согласно (2.7), $K = \text{const}$, то, дифференцируя соотношения (2.8) в силу уравнений (2.5) с учетом выражений (2.6) для сферических углов θ, φ , получим дифференциальные уравнения

$$\theta' = \beta \cos \theta, \quad \theta' = \gamma \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta \quad (2.9)$$

Коэффициенты β, γ в (2.9) постоянны и равны

$$\beta = -(d + m\rho^2\Omega^{-2}I*I^{-4}K^2)I*^{-1}K, \quad \gamma = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}I*^{-2}I^{-2}d|d|K^7 \quad (2.10)$$

В частных случаях сферической симметрии ($d=0$) или $\rho=0$ из (2.10) следует, что постоянная $\gamma=0$, а уравнения (2.9) интегрируются явно

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \beta t \cos \theta_0 + \varphi_0, \quad \theta_0, \varphi_0 = \text{const}$$

Составляющие угловой скорости $\omega_{1, 2, 3}$ при помощи (2.8) вычисляются также в явной форме

$$\omega_1 = \omega_\perp \cos \varphi, \quad \omega_2 = \omega_\perp \sin \varphi, \quad \omega_3 = \omega_{30} \quad (\omega_\perp = \omega_{\perp 0})$$

Рассмотрим теперь общий случай $\gamma \neq 0$. Интегрирование второго уравнения (2.9) приводит к соотношению

$$2 \sec^4 \theta \operatorname{cosec} \theta + 5[(\sec^2 \theta - 3) \operatorname{cosec} \theta + 3 \ln |\operatorname{tg}(\pi/4 + \theta/2)|] = 8\gamma t + \text{const.} \quad (2.11)$$

Для определенности предположим, что величина θ_0 принадлежит интервалу $(0, \pi/2)$. На основе (2.10) знак γ определяется знаком параметра d , т. е. разности $I - I_*$. Из (2.9), (2.11) следует, что при $I > I_*$ (вытянутое тело) угол нутации θ монотонно растет и стремится к $\pi/2$ при $t \rightarrow \infty$, а $\omega_3 \rightarrow 0$. В случае $I < I_*$ (сплюснутое тело) величина θ монотонно убывает: $\theta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а $\phi' \rightarrow \beta = \text{const}$. Таким образом, направление вектора кинетического момента \mathbf{K} в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции. Если зависимость $\theta(t)$, согласно соотношению (2.11), построена, то функция $\phi(t)$ находится квадратурой из первого уравнения (2.9). Делением одного уравнения (2.9) на другое и последующей квадратурой получается зависимость $\phi(\theta)$, которая совместно с (2.11) дает в неявном виде решение системы (2.5) при помощи формул (2.8). Отметим, что постоянная $\tau = |\gamma|^{-1}$ имеет размерность времени и характеризует скорость перестройки движения твердого тела, т. е. скорость стремления величины угла нутации θ : $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi/2$. Для случая вязкоупругой связи между телом и массой m [1, 2] аналогичная временная постоянная τ определяет интервал времени, за который угол нутации в линейном приближении убывает или возрастает в e раз. В рассмотренной задаче с квадратичным трением при малых θ угол нутации стремится к нулю значительно медленнее, так как $\theta' \sim -\tau^{-1}\theta^2$. В главном (квадратичном) члене значения $\theta(t)$ связаны соотношением $\theta(t - \tau) - \theta(t) = \pm \theta(t - \tau)\theta(t)$, а в линейном приближении $\theta = \text{const}$.

3. Рассматривается управляемое движение динамически симметричного твердого тела и подвижной массы m , соединенных вязкоупругой связью с коэффициентами вязкого трения δ и жесткости c . Предполагается, что точка O_1 крепления находится на оси симметрии, а значения вектора управляющего момента относительно центра инерции O ограничены сферой и имеют вид

$$M_i = bu_i \quad (i=1, 2, 3), \quad |u| \leq 1 \quad (b_1 \geq b(t) \geq b_0 \geq 0) \quad (3.1)$$

Считается, что $\Omega^2 \gg \nu \omega \gg \omega^2$, т. е. собственные колебания массы m затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот [1]. Уравнения управляемого движения аналогично п. 1, 2 приводятся к виду

$$\begin{aligned} \omega_1' - d\omega_2\omega_3 &= bI^{-1}u_1 + A\omega_2\omega_3 + N\omega_1\omega_3^4 \\ \omega_2' + d\omega_1\omega_3 &= bI^{-1}u_2 - A\omega_1\omega_3 + N\omega_2\omega_3^4 \\ \omega_3' &= bI_*^{-1}u_3 - NI_*^{-2}\omega_{\perp}^2\omega_3^2, \quad \omega(t_0) = \omega_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь коэффициент A определяется согласно (2.6), а величина N равна [1]:

$$N = m\rho^2\nu\Omega^{-4}I_*^3I^{-4}d, \quad \nu = \delta/m, \quad \Omega^2 = c/m$$

Ставится задача об оптимальном по быстрдействию торможении вращений системы, т. е.

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1 \quad (3.3)$$

Требуется найти оптимальный закон управления, оптимальную фазовую траекторию и минимальное значение функционала. Отметим, что ранее аналогичные задачи оптимальной по быстрдействию стабилизации

рассматривались для твердого тела без учета подвижности внутренних масс [3, 4].

Решение поставленной задачи торможения строится на основе достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [6]. Используя функциональное неравенство Шварца [7] для K' , находим, что синтез оптимального управления имеет довольно простой вид: $u^* = -KK^{-1}$, а модуль кинетического момента K в соответствии с этим законом убывает до нуля за конечное время T^* :

$$K(t, t_0, K_0) = K_0 - \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau, \quad \int_{t_0}^T b(t) dt = K_0 \quad (3.4)$$

Так как, согласно (3.1), $b \geq b_0 > 0$, то корень второго уравнения (3.4) $T^* = T(K_0, t_0)$ существует и единствен, причем $T^* \leq t_0 + K_0 b_0^{-1}$. Непосредственно дифференцированием устанавливаем, что $T(K, t)$ — функция Беллмана задачи оптимального управления (3.1) — (3.3).

Подстановка известного выражения для функции K в третье уравнение (3.2) приводит к нелинейному уравнению относительно ω_3 :

$$\omega_3' = -\omega_3(bK^{-1} + I_*^{-2}NK^2\omega_3^2 - N\omega_3^4) \quad (3.5)$$

Заменой переменной $\omega_3 = KR$, где R — неизвестная функция, уравнение (3.5) приводится к виду с разделяющимися переменными

$$R^{2'} = -2NK^4R^4(I_*^{-2} - R^2) \quad (3.6)$$

Так как, согласно (2.8), $I_*R = \cos \theta$, то в результате интегрирования уравнения (3.6) находится в неявной форме зависимость угла нутации θ от времени t :

$$\sec^2 \theta - \sec^2 \theta_0 + \ln \operatorname{tg}^2 \theta \operatorname{tg}^{-2} \theta_0 = -\frac{2N}{I_* I^3} \int_{t_0}^t K^4(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Рассмотрим далее для простоты случай $b = \text{const}$; тогда удастся найти зависимость времени t от угла нутации θ в виде ($t_0 = 0$):

$$\tau = 1 - [1 + \sigma(\operatorname{tg}^2 \theta_0 - \operatorname{tg}^2 \theta + \ln \operatorname{tg}^2 \theta_0 \operatorname{tg}^2 \theta)]^{1/2}, \quad \tau = t/T^* \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

$$T^* = \frac{K_0}{b}, \quad \sigma = \frac{5}{2} \frac{b I_* I^4 \Omega^4}{m \rho^2 v d K_0^5} \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (3.8)$$

На фиг. 1, а, б приведены графические зависимости угла нутации $\theta(\tau)$ при начальных значениях $\theta_0 = \pi/3, \pi/6$ и различных значениях параметра σ , которые указаны на соответствующих кривых. В рассматриваемом приближении можно сделать следующие качественные выводы: при $\sigma \rightarrow \pm 0$ величина $\theta(\tau)$ стремится к прямому углу, и нулю соответственно; это обстоятельство связано с тем фактом, что время t неограниченно «сжимается» (τ — медленное или сжатое время). При $\sigma \rightarrow \pm \infty$ величина $\theta(\tau) \rightarrow \theta_0$, так как за время торможения T^* вращений твердого тела угол нутации θ не успевает существенно измениться. В пределе при $b_1 \rightarrow 0$ формулы (3.7), (3.8) совпадают с полученными в работе [1] для задачи пассивного движения.

Теперь на основе известной зависимости угла нутации θ от времени t простым пересчетом по формулам (2.8), (3.4), (3.7) или (3.8) находим зависимость осевой угловой скорости ω_3 от времени

$$\omega_3(t) = K(t) \cos \theta(t) \quad (0 \leq t \leq T^*)$$

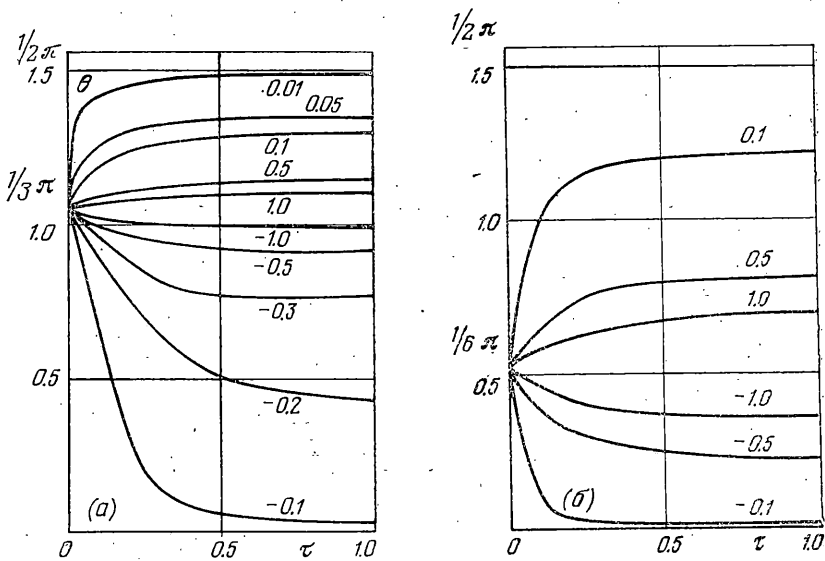
Если эта функция построена, то для величин ω_1 , ω_2 получаем из (3.2) следующие явные выражения в виде квадратур:

$$\omega_1 = \omega_{10} K K_0^{-1} \exp \alpha(t) \cos \psi(t), \quad \omega_2 = -\omega_{20} K K_0^{-1} \exp \alpha(t) \sin \psi(t)$$

$$\alpha(t) = N \int_{t_0}^t \omega_3^4(\tau) d\tau, \quad \psi(t) = \int_{t_0}^t [d + A(\tau)] \omega_3(\tau) d\tau$$

$$A(t) = m \rho^2 \Omega^{-2} I^* I^{-4} K^2(t) \quad (3.9)$$

Как следует из (3.9), частота $\psi'(T^*) = 0$, а $\omega_1 = \omega_{10} K K_0^{-1} \exp \alpha$, причем $I^2 \omega_1^2 + I^{*2} \omega_3^2 = K^2$. Подстановка найденных функций для оптимальной фазовой траектории в выражение для синтеза управления u^* позволяет определить оптимальное программное управление. Таким образом, решение



поставленной задачи оптимальной по быстродействию стабилизации системы можно считать построенным.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 20 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
2. Лещенко Д. Д. О движении твердого тела с подвижной точечной массой. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
3. Акуленко Л. Д., Рошин Ю. Р. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела управлениями, ограниченными эллипсоидом. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
4. Акуленко Л. Д., Рошин Ю. Р. Оптимальное управление вращениями твердого тела «поворотным двигателем малой тяги». Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5.
5. Смольников Б. А. Обобщение эйлера случая движения твердого тела. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
7. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968.