МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 531.36

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО УСПОКОИТЕЛЯ

В. С. НОВОСЕЛОВ

(Ленинград)

Применяются результаты математической теории решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений для асимптотического описания движения сердечника магнитного успокоителя искусственного спутника Земли. Построено асимптотическое 2π-периодическое решение. Нулевые члены этого решения соответствуют идеальному движению [1], при котором ось демпфера точно отслеживает силовую линию геомагнитного поля. Показано, что члены первого порядка приводят к отставанию оси демпфера от магнитной силовой линии. Выполнены также оценки пограничных функций [2], которые входят в решение для «пограничного слоя» при возмущении начальных данных.

Постановка задачи и недостаточно строгое рассмотрение движения магнитного успокоителя относительно ориентированного спутника на круговой орбите описаны в работе [3]. Как и в указанной работе, магнитное поле Земли будем заменять полем диполя, ось которого совпадает с осью вращения Земли. Для принятых направлений орбитальной системы (касательная, нормаль к плоскости орбиты и радиус-вектор) формулы проекций напряженности геомагнитного поля имеют вид

$$H_1=H_c\sin i\cos u,\quad H_2=H_c\cos i,\quad H_3=-2H_c\sin i\sin u \tag{1}$$

Здесь $i=\text{const}$ — наклонение плоскости орбиты, $H_c=\text{const}>0$, $u=\omega_c t$ — аргумент широты, $\omega_c=\text{const}$, t — время.

Устройство магнитного успокоителя в упрощенном виде можно представить так: в сферической полости корпуса спутника помещен магнитный сердечник, а небольшой зазор между сферической оболочкой магнита и полостью заполнен вязкой жидкостью. Вследствие сопротивления жидкости и взаимодействия магнитного поля вихревых токов, наводимых в сердечнике, с собственным магнитным полем сердечника момент реакции, приложенной к сердечнику, можно принять равным $\mathbf{M}=-k\boldsymbol{\omega}$, где $k=\text{const}>0$ — коэффициент демпфирования, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости сердечника относительно спутника.

Обозначим через $\mathbf{K}$ вектор кинетического момента и $\mathbf{B}$ вектор магнитной индукции сердечника и напишем уравнение вращательного движения сердечника относительно центра масс

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}=\mathbf{M}+\mathbf{B}\times\mathbf{H} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — вектор напряженности геомагнитного поля, величина которого на основании формулы (1) равна $H=(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{1/2}=H_cF_i^{-1}$, $F_i=(1+3\sin^2 i\sin^2 u)^{-1/2}$. Будем иметь $\mathbf{K}=I\boldsymbol{\omega}$, где I — тензор инерции сердечника. Уравнение (2) должно быть дополнено кинематическим уравнением вида

$$\frac{d}{dt}y=f(y,z,t) \tag{3}$$

где y и z есть матрицы-столбцы углов положения сердечника и проекций ω. Пусть заданы начальные условия y° и z°.

Как и в работе [3], предполагаем, что $\nu=\|I\|k^{-1}\max\omega\ll 1$ где $\|I\|$ — наибольший из главных моментов инерции сердечника. Уравнение (2) является сингулярно возмущенным и при $\nu=0$ принимает вид

$$\omega=k^{-1}\mathbf{B}\times\mathbf{H} \tag{4}$$

Пусть y_1 и z_1 — совместное решение уравнений (2) и (3) при $\nu=0$ и начальном значении $y_1^\circ=y^\circ$, а z_1° есть матрица-столбец проекций для правой части равенства (4). Используя методику исследования сингулярно возмущенных задач [2], основанную на работе А. Н. Тихонова [4], можно доказать такую теорему.

Теорема 1. Существуют постоянные $\nu_0>0$, $c>0$, такие, что при $0\leqslant\nu\leqslant\nu_0$ решение $y(t, \nu)$, $z(t, \nu)$ задачи (2), (3) существует на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$\|y(t,\nu)-y_1\|<c\nu,\quad \|z(t,\nu)-z_1-\Omega\|<c\nu,\quad \|\Omega\|\leqslant D\exp\left(-\frac{\|I\|}{\min I}\tau\right) \tag{5}$$

где $\min I$ — наименьший главный момент инерции успокоителя и приняты обозначения $\tau=\nu^{-1}t$, $D=\|z^\circ-z_1^\circ\|$.

Доказательство основано на применении теоремы (3.1) работы [2] при $n=1$. Существенным требованием этой теоремы является условие асимптотической устойчивости изолированной точки покоя (4) для присоединенной системы

$$\|I\|^{-1}\frac{d}{d\tau}I\omega_+=-\omega_++k^{-1}\mathbf{B}\times\mathbf{H}$$

в которой y полагается независимым от τ. Указанное условие для рассматриваемой задачи выполнено, поскольку для матрицы-столбца Ω, образованной из компонент вектора $\omega_+-k^{-1}\mathbf{B}\times\mathbf{H}$, имеем

$$\|I\|^{-1}\frac{d}{d\tau}I\Omega=-\Omega\Rightarrow\frac{d}{d\tau}(I_l\Omega\Omega^T)=-2\|I\|\Omega\Omega^T$$

где $\Omega\Omega^T$ равно сумме квадратов компонент, I_l — момент инерции сердечника относительно некоторой оси l. При исследовании присоединенного уравнения углы положения сердечника принимаются постоянными, поэтому $I_l=\mathrm{const}$.

Эффективное использование магнитного успокоителя предполагает, что его магнитные характеристики существенно превосходят инерционные. На основании доказанной теоремы будем полагать $\nu=0$ и уравнение (2) асимптотически заменять на уравнение (4). Положение вектора $\mathbf{B}$ в системе, жестко связанной с корпусом спутника, определим сферическими углами γ и Π:

$$B_1=B\sin\gamma\sin\Pi,\qquad B_2=B\cos\gamma,\qquad B_3=B\sin\gamma\cos\Pi \tag{6}$$

Из формулы (4) следует, что ω имеет нулевую компоненту по оси, совпадающей по направлению с $\mathbf{B}$, поэтому получим

$$\begin{gathered}\omega_1=-\Pi^\cdot\sin\gamma\cos\gamma\sin\Pi+\gamma^\cdot\cos\Pi,\quad \omega_2=\Pi^\cdot\sin^2\gamma\\ \omega_3=-\Pi^\cdot\sin\gamma\cos\gamma\cos\Pi-\gamma^\cdot\sin\Pi\end{gathered} \tag{7}$$

На участке ориентированного движения формулы (1) при решении ряда задач могут быть приняты для проекций напряженности геомагнитного поля на оси, жестко связанные с корпусом спутника. Проектируя равенство (4) на указанные оси и приравнивая полученные при этом выражения для проекций ω правым частям формул (7), находим

$$\mu\frac{d}{du}\gamma=\sin i\cos u\cos\gamma\sin\Pi-\cos i\sin\gamma-2\sin i\sin u\cos\gamma\cos\Pi$$
$$\mu\frac{d}{du}\Pi=(\cos u\cos\Pi+2\sin u\sin\Pi)\sin i\sin^{-1}\gamma \tag{8}$$

Безразмерная величина $\mu=k\omega_c F_i H_c^{-1}B^{-1}>0$ по конструктивным условиям оказывается малой. Однако коэффициент вязкости жидкости ограничен, а второй фактор демпфирования (токи Фуко) является следствием индукции **B**, поэтому величину μ нельзя сделать сколь угодно малой и члены порядка μ могут оказывать заметное влияние. Если положить в уравнениях (8) $\mu=0$, то получим

$$\cos\gamma_0=F_i\cos i,\qquad \sin\gamma_0=F_iF^{-1}\sin i,\qquad \cos\Pi_0=-2F\sin u,$$
$$\sin\Pi_0=F\cos u \tag{9}$$

где $F=F_i$ при $i=\frac{1}{2}\pi$. Формулы (9) эквивалентны соотношениям точного отслеживания [1] сердечником магнитной силовой линии вида

$$\sin\gamma_0\sin\Pi_0=H_1H^{-1},\quad \cos\gamma_0=H_2H^{-1},\quad \sin\gamma_0\cos\Pi_0=H_3H^{-1} \tag{10}$$

Правые части дифференциальных уравнений (8) и решение (9) для упрощенной системы являются 2π-периодическими. Поэтому можно применить теорему (45.1) работы [5]. В рассматриваемых условиях все требования указанной теоремы будут выполнены, если показать, что матрица Якоби $A(u)$ из производных правых частей уравнений (8) по γ и Π на движении (9) не имеет характеристических показателей вида ni, $i=\sqrt{-1}$, $n=1, 2,\ldots$. Несложные вычисления позволяют найти матрицу $A(u)$ и ее характеристические показатели χ_i:

$$A(u)=\left\|\begin{matrix}-F_i^{-1} & 0\\ 0 & -F_i^{-1}\end{matrix}\right\|,\qquad \chi_i=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}F_i^{-1}\,du$$

Указанные характеристические показатели являются вещественными, поэтому приходим к доказательству теоремы.

Теорема 2. Существует 2π-периодическое решение системы (8), которое при $\mu\to+0$ допускает равномерное асимптотическое разложение

$$\gamma(u,\mu)\sim\sum_{r=0}^{\infty}\gamma_r(u)\mu^r,\qquad \Pi(u,\mu)\sim\sum_{r=0}^{\infty}\Pi_r(u)\mu^r \tag{11}$$

Метод построения разложений (11) указан в работе [3]. После устранения неточностей этой работы члены первого и второго порядков можно записать так:

$$\gamma_1=-\tfrac{3}{4}F_i^3F\sin 2i\sin 2u,\qquad \Pi_1=-2F_iF^2 \tag{12}$$

$$\gamma_2=-\frac{F_i^2F^3\sin 2i}{16(F^2\cos^2 i+\sin^2 i)}[36F_i^2\sin^2 i+25F^2-24\cos 2u-$$
$$-9(4F_i^2\sin^2 i+F^2)\cos 4u]$$
$$\Pi_2=-3F_i^3F\sin 2u[F_i(3F_i+F)\sin^2 i+F^2(F_i^2-F)\cos^2 i] \tag{13}$$

Из первой формулы (12) следует, что угол между магнитной осью сердечника и нормалью к плоскости орбиты изменяется по периодическому закону с удвоенной орбитальной частотой, а из второй формулы получаем вывод об отставании проекции вектора магнитной индукции сердечника на плоскость орбиты от проекции на ту же плоскость напряженности геомагнитного поля. Во втором приближении на основании формул (13) имеем в угле γ некоторое отставание и колебательное движение, угол Π изменяется по периодическому закону. В частности, для полярной орбиты при $i={}^1/_2\pi$ получаем

$$\Pi-\Pi_0\sim-2(1+3\sin^2 u)^{-2}[\varepsilon+6\varepsilon^2(1+3\sin^2 u)^{-2}\sin 2u]+O(\varepsilon^3),$$
$$\gamma_1=0,\qquad \gamma_2=0,\qquad \varepsilon=\mu F_i^{-1}=\mathrm{const}$$

Пограничные функции, представляющие разности членов соответствующих порядков в полном решении и асимптотическом представлении (11), согласно работе [2], будут иметь оценки $\|\Omega_\tau\|\leqslant ce^{-\varkappa\tau_1}$, $\tau_1=\varepsilon^{-1}t$, где $c>0$ и $\varkappa>0$ — некоторые постоянные. Найдем, например, выражение для главной пограничной функции Ω_0 угла Π с начальным значением Π° в случае полярной орбиты и при отсутствии возмущения в угле γ. Получаем $\gamma={}^1/_2\pi$ и на основании второго уравнения (8)

$$\frac{d}{d\tau_1}\Omega_0=\cos u\cos(\Pi_0+\Omega_0)+2\sin u\sin(\Pi_0+\Omega_0)$$

При помощи формулы (9) находим

$$\frac{d}{d\tau_1}\Omega_0=-\sqrt{1+3\sin^2 u}\,\sin\Omega_0$$

Будем иметь следующее выражение:

$$\cos\Omega_0=1-\frac{2D_0\exp(-2\sqrt{1+3\sin^2 u}\,\tau_1)}{1+D_0\exp(-2\sqrt{1+3\sin^2 u}\,\tau_1)},\qquad D_0=\frac{1-\cos(\Pi^\circ-\Pi_0)}{1+\cos(\Pi^\circ-\Pi_0)}$$

Проведенное исследование показывает, что для качественного рассмотрения динамики ориентированного искусственного спутника Земли с магнитным успокоителем допустимо полагать, что ось успокоителя отслеживает магнитную силовую линию. Однако для повышения точности представления вращательного движения спутника, и в особенности для определения возмущающих моментов на основании наблюдений, целесообразно воспользоваться достаточно простыми формулами (12) и учесть отставание оси демпфера от силовой линии геомагнитного поля.

Поступила 20. IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садов Ю. А.* Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты. Космические исследования, 1969, т. 7, № 1.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
3. *Новоселов В. С.* Отклонение оси магнитного демпфера кругового ИСЗ от силовой линии. В сб.: Проблемы механики управляемого движения, вып. 6. Изд-во Пермск. гос. ун-та, 1974.
4. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
5. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.