МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ

В. А. ОСАДЧУК, Е. М. ФЕДЮК

(Львов)

Предложен способ сведения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной (с конечной сдвиговой жесткостью) пологой сферической оболочки с прямолинейной в плане трещиной к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Приведено решение этих уравнений в случае симметричной относительно линии трещины нагрузки, а также получены формулы для определения коэффициентов интенсивности. В качестве примера проведено исследование задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной бесконечной пластинки с трещиной. Для конкретных значений параметра сдвиговой податливости E/G' приведены графики изменения коэффициента интенсивности изгибающих напряжений в зависимости от величины $\lambda=l/h$, где l и h – полудлина трещины и полутолщина пластинки соответственно.

1. Представим компоненты тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде [1]:

$$e_{ij}=e_{ij}^{(s)}+e_{ij}^{\circ},\quad e_{zz}=0\quad (i,j=X,Y,Z) \tag{1.1}$$

где $e_{ij}^{(s)}$ – компоненты тензора упругой деформации, e_{ij}° – компоненты тензора дисторсии.

Используя соответствующие соотношения теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [2], для пологой сферической оболочки получим систему разрешающих уравнений относительно функций напряжений F, прогибов w и углов поворота ψ

$$\frac{R}{D_0}\nabla^2\nabla^2F-\nabla^2w=-RF_1^{\circ}(X,Y)$$

$$D_1\nabla^2\nabla^2w+\frac{1}{R}(1-\varepsilon\nabla^2)\nabla^2F=D_1F_2^{\circ}(X,Y) \tag{1.2}$$

$$\nabla^2\psi-k^2\psi=F_3^{\circ}(X,Y)$$

$$F_1^{\circ}=\nabla^2\varepsilon_{22}^{\circ}+\partial_2^2(\varepsilon_{11}^{\circ}-\varepsilon_{22}^{\circ})-\partial_1\partial_2\varepsilon_{12}^{\circ},\qquad F_2^{\circ}=\nabla^2(\partial_1\varepsilon_{13}^{\circ}+\partial_2\varepsilon_{23}^{\circ})-$$
$$-\nabla^2(\varkappa_{11}^{\circ}+\nu\varkappa_{22}^{\circ})+(1-\nu)\left[\partial_2^2(\varkappa_{11}^{\circ}-\varkappa_{22}^{\circ})-2\partial_1\partial_2\varkappa_{12}^{\circ}\right]$$

$$F_3^{\circ}=\frac{2}{k^2}\left[\partial_1\partial_2(\varkappa_{11}^{\circ}-\varkappa_{22}^{\circ})+(\partial_2^2-\partial_1^2)\varkappa_{12}^{\circ}\right]-\partial_2\varepsilon_{13}^{\circ}+\partial_1\varepsilon_{23}^{\circ}$$

$$\nabla^2=\partial_1^2+\partial_2^2,\quad \partial_1=\frac{\partial}{\partial X},\quad \partial_2=\frac{\partial}{\partial Y},\quad k^2=\frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}$$

$$\varepsilon=\frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\frac{E}{G'},\quad D_0=2Eh,\quad D_1=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

где ε_{ij}°, $\varkappa_{ij}^\circ$ — осредненные по толщине оболочки компоненты тензора дисторсии [2], E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона в срединной поверхности (поверхности изотропии), G' — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных к срединной поверхности, k' — коэффициент сдвига, R и $2h$ — соответственно радиус срединной поверхности и толщина оболочки, X, Y, Z — декартовы прямоугольные координаты.

При этом, используя также соотношения, связывающие компоненты полной деформации срединной поверхности оболочки с обобщенными перемещениями

$$\varepsilon_{11}=\partial_1 u+\frac{w}{R},\quad \varepsilon_{12}=\partial_2 u+\partial_1 v,\quad \varepsilon_{22}=\partial_2 v+\frac{w}{R}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{13}=\gamma_1+\partial_1 w,\quad \varepsilon_{23}=\gamma_2+\partial_2 w,\quad \varkappa_{11}=\partial_1\gamma_1\\ 2\varkappa_{12}=\partial_2\gamma_1+\partial_1\gamma_2,\quad \varkappa_{22}=\partial_2\gamma_2\end{gathered} \tag{1.3}$$

для определения усилий и моментов получим следующие выражения:

$$\begin{gathered}N_1=\partial_2^2 F,\quad N_2=\partial_1^2 F,\quad S=-\partial_1\partial_2 F\\ M_1=D_1[\partial_1\gamma_1+\nu\partial_2\gamma_2-(\varkappa_{11}^\circ+\nu\varkappa_{22}^\circ)]\\ M_2=D_1[\partial_2\gamma_2+\nu\partial_1\gamma_1-(\varkappa_{22}^\circ+\nu\varkappa_{11}^\circ)]\\ H=\frac{1-\nu}{2}D_1(\partial_2\gamma_1+\partial_1\gamma_2-2\varkappa_{12}^\circ)\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$Q_{13}=\frac{D}{\varepsilon}(\gamma_1+\partial_1 w-\varepsilon_{13}^\circ),\quad Q_{23}=\frac{D_1}{\varepsilon}(\gamma_2+\partial_2 w-\varepsilon_{23}^\circ)$$

$$\gamma_1=\partial_2\left(\psi-\frac{2}{k^2}\varkappa_{12}^\circ\right)-\partial_1 w+\varepsilon_{13}^\circ-\varepsilon\partial_1(\Phi+\varkappa_{11}^\circ+\nu\varkappa_{22}^\circ)$$

$$\gamma_2=-\partial_1\left(\psi+\frac{2}{k^2}\varkappa_{12}^\circ\right)-\partial_2 w+\varepsilon_{23}^\circ-\varepsilon\partial_2(\Phi+\varkappa_{22}^\circ+\nu\varkappa_{11}^\circ)$$

$$\Phi=\nabla^2\left(w-\frac{\varepsilon}{RD_1}F\right)-\partial_1\varepsilon_{13}^\circ-\partial_2\varepsilon_{23}^\circ$$

Первые два уравнения системы (1.2) приведем к одному разрешающему уравнению для определения функции напряжений F и соотношению для определения прогиба w:

$$\nabla^2(\nabla^2\nabla^2-\varepsilon p\nabla^2+p)F=D_0\left[\frac{1}{R}F_2^\circ(X,Y)-\nabla^2F_1^\circ(X,Y)\right] \tag{1.5}$$

$$w=\frac{R}{D_0}\nabla^2 F+w^*,\quad p=\frac{D_0}{D_1R^2}$$

Здесь w^* — функция, удовлетворяющая уравнению $\nabla^2 w^*=RF_1^\circ(X,Y)$.

Используя интегральное преобразование Фурье, фундаментальные решения F_0 и ψ_0 уравнений

$$\nabla^2(\nabla^2\nabla^2-\varepsilon p\nabla^2+p)F_0=\delta(X)\delta(Y),\quad (\nabla^2-k^2)\psi_0=\delta(X)\delta(Y) \tag{1.6}$$

получим в виде

$$\psi_0=-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)$$

$$F_0=\frac{1}{2\pi p}\left\{\ln r+\frac{1}{2a}[\delta_2{}^2K_0(\delta_1 r)-\delta_1{}^2K_0(\delta_2 r)]\right\} \quad \text{при } b^2>p$$

$$F_0=\frac{1}{2\pi p}\left\{\ln r+\frac{1}{2a}[b\Phi_1(r)+a\Phi_2(r)]\right\} \quad \text{при } b^2<p \qquad (1.7)$$

$$F_0=\frac{1}{2\pi p}\left[\ln r+K_0(\sqrt{b}r)-\frac{\sqrt{b}r}{2}K_0'(\sqrt{b}r)\right] \quad \text{при } b^2=p$$

$$\Phi_1=-i[K_0(\delta_1 r)-K_0(\delta_2 r)], \quad \Phi_2=K_0(\delta_1 r)+K_0(\delta_2 r)$$

$$\delta_1{}^2=b-a, \quad \delta_2{}^2=b+a, \quad a=\sqrt{b^2-p} \quad \text{при } b^2>p$$

$$\delta_1{}^2=b-ia, \quad \delta_2{}^2=b+ia, \quad a=\sqrt{p-b^2} \quad \text{при } b^2<p$$

$$K_0'(z)=\frac{d}{dz}K_0(z), \quad b=\frac{\varepsilon p}{2}, \quad r^2=X^2+Y^2, \quad i=\sqrt{-1}$$

где $\delta(z)$ и $K_0(z)$ — соответственно функции Дирака и Макдональда.

2. Рассмотрим «бесконечную» трансверсально-изотропную пологую сферическую оболочку с трещиной длины $2l$, расположенной вдоль меридиана, берега которой загружены самоуравновешивающими усилиями и моментами. Отнесем оболочку к декартовой прямоугольной системе координат XOY, начало которой совпадает с серединой трещины, а ось OX — с линией трещины. Для рассматриваемой оболочки с трещиной $Y=0$, $|X|\leqslant\leqslant l$, учитывая соотношения (1.3) и (1.4), а также следующие выражения для усилий:

$$N_2=\frac{D_0}{1-\nu^2}[\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-(\varepsilon_{22}{}^\circ+\nu\varepsilon_{11}{}^\circ)], \quad S=\frac{D_0}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{12}-\varepsilon_{12}{}^\circ) \qquad (2.1)$$

поле дисторсий, характеризующее скачки перемещений и углов поворота на линии трещины, запишем в виде

$$\varepsilon_{22}{}^\circ(x,y)=\varepsilon_2(x)\delta(y), \quad \varepsilon_{12}{}^\circ(x,y)=\varepsilon_3(x)\delta(y), \quad \varepsilon_{23}{}^\circ(x,y)=\varepsilon_4(x)\delta(y)$$

$$\varkappa_{22}{}^\circ(x,y)=\varkappa_2(x)\delta(y), \quad \varkappa_{12}{}^\circ(x,y)=\varkappa_3(x)\delta(y) \quad \text{при } |x|<1$$

$$\varepsilon_{22}{}^\circ(x,y)=\varepsilon_{12}{}^\circ(x,y)=\varepsilon_{23}{}^\circ(x,y)=\varkappa_{22}{}^\circ(x,y)=\varkappa_{12}{}^\circ(x,y)=0 \quad \text{при } |x|\geqslant 1 \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon_{11}{}^\circ(x,y)=\varepsilon_{13}{}^\circ(x,y)=\varkappa_{11}{}^\circ(x,y)=0 \quad \text{при всех } x$$

$$\varepsilon_2(x)=\frac{1}{l}(v^+-v^-), \quad \varepsilon_3(x)=\frac{1}{l}(u^+-u^-), \quad \varepsilon_4(x)=\frac{1}{l}(w^+-w^-)$$

$$\varkappa_2(x)=\frac{1}{l}(\gamma_2{}^+-\gamma_2{}^-), \quad 2\varkappa_3(x)=\frac{1}{l}(\gamma_1{}^+-\gamma_1{}^-), \quad x=\frac{X}{l}, \; y=\frac{Y}{l}$$

где знаками плюс и минус обозначены граничные значения соответствующей величины слева и справа от линии трещины.

Подставляя соотношения (2.2) в третье уравнение системы (1.2), а также в уравнения (1.5), на основании фундаментального решения (1.7) для разрешающих функций F, w и ψ получим выражения

$$\Omega_i(x,y)=\frac{t_i}{4\pi a_j}\int_{-1}^{1}\Big\{\varepsilon_2(\xi)F_i(x-\xi,y)+\varepsilon_3(\xi)F_{i+2}(x-\xi,y)+$$

$$+\frac{1}{Rd}[\varepsilon_4(\xi)\varphi_i(x-\xi,y)+\varkappa_2(\xi)\varphi_{i+2}(x-\xi,y)+ \qquad (2.3)$$

$$+2\mu\varkappa_3(\xi)\varphi_{i+4}(x-\xi,y)]\Big\}d\xi \quad (i=1,2;\ j=1,2,3)$$

$$\psi(x,y)=-\frac{l^2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}[\varepsilon_4(\xi)\psi_1(x-\xi,y)+\varkappa_2(\xi)\psi_2(x-\xi,y)+$$
$$+\varkappa_3(\xi)\psi_3(x-\xi,y)]d\xi$$

$$F_1=-r_1\frac{y^2}{\rho^2}+r_2-r_3,\quad F_2=s_1\frac{y^2}{\rho^2}-s_2-s_6,\quad F_3=-r_1\frac{yz}{\rho^2},\quad F_4=s_1\frac{yz}{\rho^2}$$

$$\varphi_1=\sqrt{d}\,r_4\frac{y}{\rho},\quad \varphi_2=\sqrt{d}\,r_5\frac{y}{\rho},\quad \varphi_3=\mu\left(s_3\frac{y^2}{\rho^2}-s_4\right)-\nu s_5$$

$$\varphi_4=-\mu F_1-r_3,\quad \varphi_6=-F_3,\quad \varphi_5=s_3\frac{yz}{\rho^2}$$

$$\psi_1=\frac{k}{2}K_0'(\eta)\frac{z}{\rho},\quad \psi_2=L\frac{yz}{\rho^2},\quad \psi_3=L\frac{z^2-y^2}{\rho^2},\quad r_1=2r_2-r_3$$

$$s_1=2s_2+s_6,\quad s_2=\frac{2a_j}{\lambda^2\rho^2}-\frac{r_5}{\lambda\rho},\quad s_3=2s_4-s_5,\quad s_4=\frac{2a_j}{\lambda^2\rho^2}+\frac{r_6}{\lambda\rho}$$

$$L=\frac{2}{\eta}K_0'(\eta)-K_0(\eta),\quad \eta=lk\rho,\quad z=x-\xi,\quad \rho^2=y^2+z^2,\quad \Omega_1=F,\quad \Omega_2=w$$

$$\xi_1=\delta_1\lambda\rho,\quad \xi_2=\delta_2\lambda\rho,\quad \lambda^4=l^4p,\quad \sqrt{p}=d=\frac{2b}{\varepsilon},\quad t_1=D_0l^2,\quad t_2=R\lambda^2,\quad \mu=1-\nu$$

где при $b^2>1$ имеем

$$r_2=\omega_3/\lambda\rho,\quad r_3=\omega_2,\quad r_4=\omega_3,\quad r_5=\omega_5,\quad r_6=\omega_4$$

$$s_5=\omega_1,\quad s_6=\omega_6,\quad \omega_1=K_0(\xi_1)-K_0(\xi_2),\quad \omega_2=\delta_1^2K_0(\xi_1)-\delta_2^2K_0(\xi_2)$$

$$\omega_3=\delta_1K_0'(\xi_1)-\delta_2K_0'(\xi_2),\quad \omega_4=\delta_1\delta_2^2K_0'(\xi_1)-\delta_1^2\delta_2K_0'(\xi_2),\quad \omega_5=\delta_1^3K_0'(\xi_1)-\delta_2^3K_0'(\xi_2)$$

$$\omega_6=\delta_1^4K_0(\xi_1)-\delta_2^4K_0(\xi_2),\quad \delta_1^2=b-a,\quad \delta_2^2=b+a,\quad a_1=a=\sqrt{b^2-1}$$

при $b^2<1$

$$r_2=\frac{\Phi_3}{\lambda\rho},\quad r_3=b\Phi_1-a\Phi_2,\quad r_4=\Phi_3,\quad r_5=b\Phi_3-a\Phi_4,\quad r_6=b\Phi_3+a\Phi_4$$

$$s_5=\Phi_1,\quad s_6=(b^2-a^2)\Phi_1-2ab\Phi_2,\quad \Phi_1=-i[K_0(\xi_1)-K_0(\xi_2)]$$

$$\Phi_2=K_0(\xi_1)+K_0(\xi_2),\quad \Phi_3(z)=\frac{d}{dz}\Phi_1(z),\quad \Phi_4(z)=\frac{d}{dz}\Phi_2(z)$$

$$\delta_1^2=b-ia,\quad \delta_2^2=b+ia,\quad a_2=a=\sqrt{1-b^2}$$

при $b^2=1$

$$r_2=-K_0(\lambda\rho),\quad r_3=s_5+2r_2,\quad r_4=-\lambda\rho K_0(\lambda\rho),\quad r_5=-2K_0'(\lambda\rho)+r_4$$
$$r_6=2K_0'(\lambda\rho)+r_4,\quad s_5=-\lambda\rho K_0'(\lambda\rho),\quad s_6=4r_2+s_5,\quad a_3=1$$

На основании найденных разрешающих функций (2.3) и выражений (1.4) получим формулы для определения затухающих на «бесконечности» усилий и моментов в произвольной точке оболочки, обусловленных полем (2.2).

Условия на контуре трещины запишем так:

$$N_2(x,0)=f_1(x),\quad S(x,0)=f_2(x),\quad M_2(x,0)=f_3(x)$$
$$H(x,0)=f_4(x),\quad Q_{23}(x,0)=f_5(x)\quad \text{при } |x|\leqslant 1 \tag{2.4}$$

где N_2, S, Q_{23} — соответственно нормальное, касательное и перерезывающее усилия, а M_2 и H — изгибающий и крутящий моменты, определяемые на контуре трещины как сумма усилий и моментов, вызванных полем (2.2) и соответствующих усилий и моментов в оболочке без трещины.

Удовлетворяя граничным условиям (2.4), для определения функций $\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_3(x)$, $\varepsilon_4(x)$, $\varkappa_2(x)$ и $\varkappa_3(x)$ в случае свободных берегов трещины $f_i(x)=0$ $(i=1-5)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений:

при симметричной относительно линии трещины нагрузке

$$\sum_{k=1,3}\int_{-1}^{1}\Psi_k(\xi)L_{ik}(x-\xi)\,d\xi=f_{i0}(x),\quad |x|<1 \quad (i=1,3) \tag{2.5}$$

при антисимметричной нагрузке

$$\sum_{k=2,4,5}\int_{-1}^{1}\Psi_k(\xi)L_{ik}(x-\xi)\,d\xi=f_{i0}(x),\quad |x|<1 \quad (i=2,4,5) \tag{2.6}$$

$$\Psi_1(\xi)=\frac{d}{d\xi}\varepsilon_2(\xi),\qquad \Psi_2(\xi)=\frac{d}{d\xi}\varepsilon_3(\xi),\qquad \Psi_3(\xi)=Rc\frac{d}{d\xi}\varkappa_2(\xi)$$

$$\Psi_4(\xi)=2Rc\frac{d}{d\xi}\varkappa_3(\xi),\qquad \Psi_5(\xi)=\frac{l}{R}\frac{d}{d\xi}\varepsilon_4(\xi),\qquad L_{11}=\frac{a_j}{z}+L_{11}^{\circ}$$

$$L_{13}=L_{31}=K_{13},\qquad L_{33}=\frac{(1-\nu^2)a_j}{z}+L_{33}^{\circ},\qquad L_{11}^{\circ}=K_{11}-\frac{a_j}{z}$$

$$L_{33}^{\circ}=K_{33}-\frac{(1-\nu^2)a_j}{z},\qquad L_{22}=\frac{a_j}{z}-L_{22}^{\circ},\qquad L_{24}=L_{42}=\mu L_{24}^{\circ}$$

$$L_{25}=-\frac{1}{\lambda^2}L_{52}=L_{25}^{\circ},\qquad L_{44}=\frac{(1-\nu^2)a_j}{z}-L_{44}^{\circ},\qquad L_{45}=-\frac{1}{\lambda^2}L_{54}=-L_{45}^{\circ}$$

$$L_{55}=p_1\left(\frac{1}{z}+L_{55}^{\circ}\right),\qquad L_{44}^{\circ}=K_{44}^{\circ}-4\mu a_j(L_1+L_2),\qquad L_{45}^{\circ}=\mu K_{45}^{\circ}-p_1L_3$$

$$L_{55}^{\circ}=\frac{1}{p_1}K_{55}^{\circ}-L_4,\qquad L_1=\left[\frac{2}{\eta^2}+\frac{2}{\eta}K_0'(\eta)-K_0(\eta)-\frac{1}{2}\right]\frac{1}{z}$$

$$L_2=\frac{l^2k^2}{4}\int_0^z K_0(\eta)\,dz,\qquad L_3=\frac{2}{\eta^2}+\frac{2}{\eta}K_0'(\eta)-K_0(\eta),\qquad L_4=[1+\eta K_0'(\eta)]\frac{1}{z}$$

$$\eta=lk|z|,\qquad p_1=\frac{2a_j}{\varepsilon}R^2c,\qquad c^2=\frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2}$$

$$f_{10}(x)=qN_{20}(x,0),\qquad f_{20}(x)=qS_0(x,0),\qquad f_{30}(x)=\frac{q}{Rc}M_{20}(x,0)$$

$$f_{40}(x)=\frac{q}{Rc}H_0(x,0),\qquad f_{50}(x)=\frac{q}{Rc}Q_{230}(x,0),\qquad q=\frac{4\pi a_j}{D_0},\qquad z=x-\xi$$

где N_{20}, S_0, Q_{230} — соответственно нормальное, касательное и перерезывающее усилия, а M_{20} и H_0 — изгибающий и крутящий моменты на линии $y=0$, $|x|\leqslant 1$, вызванные внешней нагрузкой в оболочке без трещины, c_0 — постоянная интегрирования. В зависимости от величины b^2 будем иметь:

при $b^2>1$

$$L_{22}^\circ=\left(\frac{2\omega_3}{\tau}-\omega_3+a\right)\frac{1}{z},\quad L_{24}^\circ=\left(\frac{4a}{\tau^2}+\frac{2\omega_4}{\tau}-\omega_1\right)\frac{1}{z}$$

$$L_{25}^\circ=\frac{\omega_3}{\tau},\quad K_{44}^\circ=\left[\frac{8ab}{\tau^2}+\frac{2(2b\omega_4-\omega_3)}{\tau}-(2b\omega_1-\omega_2)-a\right]\frac{1}{z}$$

$$K_{45}^\circ=\frac{2a}{\tau^2}+\frac{\omega_4}{\tau},\quad K_{55}^\circ=\frac{\tau}{z}\omega_3-\lambda^2\int_0^z\omega_2\,dz$$

$$\xi_1=\delta_1\tau,\quad \xi_2=\delta_2\tau,\quad \tau=\lambda|z|,\quad a_1=a=\sqrt{b^2-1}$$

при $b^2<1$

$$L_{22}^\circ=\left(\frac{2}{\tau}\Phi_3+a\Phi_2-b\Phi_1+a\right)\frac{1}{z},\quad L_{24}^\circ=\left[\frac{4a}{\tau^2}+\frac{2}{\tau}(b\Phi_3+a\Phi_4)-\Phi_1\right]\frac{1}{z},\quad L_{25}^\circ=\frac{\Phi_3}{\tau}$$

$$K_{44}^\circ=\left\{\frac{8ab}{\tau^2}+\frac{2}{\tau}[(b^2-a^2)\Phi_3+2ab\Phi_4]-(b\Phi_1+a\Phi_2)-a\right\}\frac{1}{z}$$

$$K_{45}^\circ=\frac{2a}{\tau^2}+\frac{b\Phi_3+a\Phi_4}{\tau},\quad K_{55}^\circ=\frac{\tau}{z}\Phi_3-\lambda^2\int_0^z(b\Phi_1-a\Phi_2)\,dz,\quad a_2=a=\sqrt{1-b^2}$$

при $b^2=1$

$$L_{22}^\circ=(1+\tau K_0')\frac{1}{z},\quad L_{24}^\circ=\left(\frac{4}{\tau^2}+\frac{4}{\tau}K_0'-2K_0+\tau K_0'\right)\frac{1}{z}$$

$$L_{25}^\circ=-K_0,\quad K_{44}^\circ=\left(\frac{8}{\tau^2}+\frac{8}{\tau}K_0'-4K_0+\tau K_0'-1\right)\frac{1}{z}$$

$$K_{45}^\circ=\frac{2}{\tau^2}+\frac{2}{\tau}K_0'-K_0,\quad K_{55}^\circ=\lambda^2\int_0^z K_0\,dz,\quad K_0=K_0(\tau),\quad K_0'=K_0'(\tau),\quad a_3=1$$

Ядра K_{11}, K_{13} и K_{33} приведены в [3]. Функции L_{ij}° непрерывны для всего множества действительных значений x, ξ.

Отметим, что при $\varepsilon\to0$ ($G'\to\infty$) из систем интегральных уравнений (2.5) и (2.6) получим интегральные уравнения [4], соответствующие случаю, когда в качестве исходных приняты гипотезы Кирхгофа — Лява.

В дальнейшем для нахождения решений интегральных уравнений (2.5) и (2.6) воспользуемся приближенным методом, изложенным в [5]. Представляя искомые функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_3(x)$ в виде $\Psi_1(x)=F(x)/\sqrt{1-x^2}$, $\Psi_3(x)=\Phi(x)/\sqrt{1-x^2}$ в случае симметричной относительно линии трещины нагрузки для определения коэффициентов интенсивности $K_1=\lim\limits_{r\to0}\sqrt{2r}N_2$, $K_3=\lim\limits_{r\to0}\sqrt{2r}M_2$, где r — расстояние вдоль линии трещины от ее вершины, получим формулы

$$K_1=g\sum_{m=0}^{n-1}A_m,\quad K_3=gRc(1-\nu^2)\sum_{m=0}^{n-1}B_m,\quad A_m=\frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu\cos m\theta_\nu$$

$$B_m=\frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_\nu\cos m\theta_\nu,\quad F_\nu=F(x_\nu),\quad \Phi_\nu=\Phi(x_\nu)$$

$$x_\nu=\cos\theta_\nu,\quad \theta_\nu=\frac{2\nu-1}{2n}\pi,\quad g=\frac{\sqrt{l}}{2}$$

Величины F_ν и Φ_ν находим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{m\nu} F_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{m\nu} \Phi_\nu = \varphi_{1m} \quad (m=1,2,\ldots,n), \quad \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{m\nu} F_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{m\nu} \Phi_\nu = \varphi_{3m}$$

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2n}[a_j R_{m\nu} + L_{11}^\circ(\cos\theta_m, \cos\theta_\nu)], \quad \beta_{m\nu} = \frac{1}{2n} L_{13}(\cos\theta_m, \cos\theta_\nu)$$

$$\gamma_{m\nu} = \frac{1}{2n}[(1-\nu^2) a_j R_{m\nu} + L_{33}^\circ(\cos\theta_m, \cos\theta_\nu)]$$

$$\varphi_{1m} = a_j N_{20}, \quad \varphi_{3m} = \frac{a_j}{Rc} M_{20}, \quad R_{m\nu} = \frac{1}{\sin\theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_\nu}{2}$$

Верхний знак берется в случае, когда число $|m-\nu|$ нечетно, а нижний — когда оно четно.

Приведенные формулы позволяют исследовать изменение коэффициентов интенсивности в зависимости от геометрических и упругих характеристик оболочки.

3. Рассмотрим бесконечную трансверсально-изотропную пластинку с прямолинейной трещиной $|x|\leqslant 1$, $y=0$, берега которой загружены самоуравновешивающими усилиями и моментами. Для определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластинки ($R\to\infty$) из систем интегральных уравнений (2.5) и (2.6) получим следующие интегральные уравнения:

в случае плоского напряженного состояния

$$\int_{-1}^{1} \Omega_i(\xi) K_i(x-\xi)\, d\xi = \frac{2\pi}{D_0} T_i(x), \quad |x|<1 \quad (i=1,2) \tag{3.1}$$

$$\Omega_1(\xi) = \frac{d}{d\xi}\varepsilon_2(\xi), \quad \Omega_2(\xi) = \frac{d}{d\xi}\varepsilon_3(\xi), \quad K_1 = K_2 = \frac{1}{2(x-\xi)}$$

$$T_1(x) = N_{20}(x, 0), \quad T_2(x) = S_0(x, 0)$$

в случае изгиба при симметричной относительно линии трещины нагрузке

$$\int_{-1}^{1} \Omega_3(\xi) K_3(x-\xi)\, d\xi = m T_3(x), \quad |x|<1 \tag{3.2}$$

и в случае изгиба при антисимметричной нагрузке

$$\sum_{k=4,5} \int_{-1}^{1} \Omega_k(\xi) K_{ik}(x-\xi)\, d\xi = m T_i(x), \quad |x|<1 \quad (i=4,5) \tag{3.3}$$

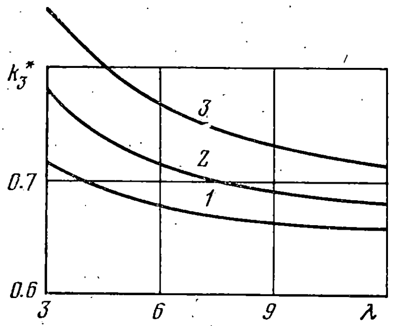
$$\Omega_3(\xi) = \frac{d}{d\xi}\varkappa_2(\xi), \quad \Omega_4(\xi) = 2\frac{d}{d\xi}\varkappa_3(\xi), \quad \Omega_5(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\xi}\varepsilon_4(\xi)$$

$$K_3 = \frac{1-\nu^2}{2z} - 2\mu L_1, \quad K_{44} = \frac{1-\nu^2}{z} + 4\mu(L_1+L_2)$$

$$K_{45} = -\frac{\varepsilon}{2} K_{54} = L_3, \quad K_{55} = \frac{1}{z} - L_4, \quad m = \frac{2\pi}{D_1}, \quad \mu = 1-\nu$$

$$T_3(x) = M_{20}(x, 0), \quad T_4(x) = H_0(x, 0), \quad T_5(x) = Q_{230}(x, 0)$$

Отметим, что в случае плоского напряженного состояния интегральные уравнения (3.1) полностью совпадают с интегральными уравнениями задачи для бесконечной изотропной пластинки с трещиной. В случае же изгиба вместо двух интегральных уравнений, полученных на базе теории Кирхгофа — Лява [6], имеем три интегральных уравнения (3.2) и (3.3), которые по структуре такие же, как и интегральные уравнения задачи для оболочки с трещиной.



В качестве примера рассмотрим пластинку с трещиной, когда к берегам ее приложены равномерно распределенные по длине растягивающее усилие $N_2°$ и изгибающий момент $M_2°$. Поскольку задача о нахождении коэффициента интенсивности мембранных напряжений k_1 совпадает с классической, ниже приведем формулы для определения коэффициента интенсивности изгибающих напряжений k_3. Решая интегральное уравнение (3.2) обобщенным методом Мультоппа [5], получим

$$k_3 = M_2° \sqrt{l} \sum_{j=1}^{n/2} A_{2j-1}, \qquad A_{2j-1} = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{n/2} \Psi_\nu° \cos(2j-1)\theta_\nu$$

$$\Psi_\nu° = -\frac{D_1(1-\nu^2)}{2M_2°} \Omega_\nu°, \qquad \Omega_\nu° = \Omega_0(x_\nu), \qquad \Omega_0(x) = \sqrt{1-x^2}\,\Omega_3(x)$$

где n — четное число.

Величины $\Psi_\nu°$ находим, решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n/2} \beta_{m\nu} \Psi_\nu° = 1 \qquad (m=1,2,\ldots,n/2)$$

$$\beta_{m\nu} = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{1}{\sin\theta_m} \left(\operatorname{ctg}\frac{c_{m\nu}}{2} - \operatorname{ctg}\frac{d_{m\nu}}{2} \right) + \frac{4}{1+\nu} [K_1(u_{m\nu}) - K_2(t_{m\nu})] \right\}$$

$$K_1(u_{m\nu}) = \frac{K(u_{m\nu})}{\cos\theta_m - \cos\theta_\nu}, \qquad K_2(t_{m\nu}) = \frac{K(t_{m\nu})}{\cos\theta_m + \cos\theta_\nu}$$

$$u_{m\nu} = \lambda k_0 |\cos\theta_m - \cos\theta_\nu|, \qquad t_{m\nu} = \lambda k_0 (\cos\theta_m + \cos\theta_\nu)$$

$$K(y) = \frac{2}{y^2} + \frac{2}{y} K_0'(y) - K_0(y) - \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{l}{h}$$

$$k_0 = \sqrt{6k'(1+\nu)\frac{G'}{E}}, \qquad \theta_m = \frac{2m-1}{2n}\pi$$

$$c_{m\nu} = \theta_m - \theta_\nu, \quad d_{m\nu} = \theta_m + \theta_\nu - \pi, \quad \text{если } |m-\nu| \text{ нечетное}$$
$$c_{m\nu} = \theta_m + \theta_\nu, \quad d_{m\nu} = \theta_m - \theta_\nu + \pi, \quad \text{если } |m-\nu| \text{ четное}$$

Числовые расчеты проведены при $k' = 5/6$, $\nu = 0.3$ для трех значений параметра податливости пластинки на сдвиг E/G', которые соответствуют реальным материалам.

На фигуре кривыми *1*, *2*, *3* изображены графики изменения относительного коэффициента интенсивности $k_3^* = k_3/M_2°\sqrt{l}$ в зависимости от величины $\lambda = l/h$ для значений параметра $E/G' = 2$, 6, 10, 40 соответственно.

Как видно из графиков с увеличением параметра сдвиговой податливости E/G', коэффициент интенсивности изгибающих напряжений возрастает.

Поступила 10 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, «Наукова думка», 1973.
3. *Осадчук В. А., Федюк Е. М.* Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с трещиной. Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 2.
4. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами. В сб.: Математические методы и физико-механические поля, вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1975.
5. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
6. *Williams M. L.* The bending stress distribution at the base of a stationary grack, Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 1. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1961, № 1).