

О НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ
ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

С. Н. КАРАСЕВ

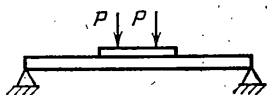
(Казань)

Получено решение трех одномерных контактных задач для круглой и прямоугольной пластинки, длинной цилиндрической оболочки. Задачи формулируются в виде интегральных уравнений Фредгольма, решение которых строится с помощью следующего приема. Интегральные уравнения преобразуются к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решения которых отыскиваются с точностью до постоянных интегрирования. Затем общие решения дифференциальных уравнений подставляются в интегральные уравнения, откуда получается система алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных интегрирования.

При определении функций влияния за исходные уравнения принимаются уравнения модели типа С. П. Тимошенко [1]. Следуя [2-4], условия контакта выполняются по кривизнам либо в несколько видоизмененной форме.

1. Осесимметричный изгиб круглой пластинки, подкрепленной круглой пластинкой меньшего радиуса.

Рассмотрим осесимметричный изгиб круглой пластинки радиуса R_2 с припаянной к ней круглой пластинкой радиуса R_1 ($R_1 < R_2$) (фиг. 1). Накладка (верхняя пластинка) нагружена нормальной нагрузкой P ,



Фиг. 1

распределенной по окружности радиуса $\rho = \rho_1$, где $\rho = r/R$ — безразмерная координата ($R_1 \leq R \leq R_2$).

Отделим накладку от пластины, а ее действие на пластину заменим нормальными и касательными напряжениями контакта, которые необходимо определить. Для решения задачи построим с помощью функций влияния два интегральных уравнения относительно искомым контактных напряжений.

Запишем уравнения равновесия пластинки, изгибаемой нормальной q_1^+ и касательной P_1^+ нагрузками [1]:

$$\frac{d}{d\rho} (\rho T_1) - T_2 + R\rho P_1^+ = 0, \quad \frac{d}{d\rho} (\rho Q_1) + R\rho q_1^+ = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{d\rho} (\rho M_1) - M_2 - R\rho (Q_1 - m_1) = 0, \quad m_1 = \frac{h}{2} P_1^+, \quad K = \frac{5}{6} G_{2z} h$$

$$T_1 = \frac{B}{R} \left(\frac{du}{d\rho} + \nu \frac{u}{\rho} \right), \quad T_2 = \frac{B}{R} \left(\frac{u}{\rho} + \nu \frac{du}{d\rho} \right), \quad Q_1 = \frac{K}{R} \left(\frac{dw}{d\rho} + R\varphi \right)$$

$$M_1 = \frac{D}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\rho} + \nu \frac{\varphi}{\rho} \right), \quad M_2 = \frac{D}{R} \left(\frac{\varphi}{\rho} + \nu \frac{d\varphi}{d\rho} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$$

где M_1, M_2, Q_1 — изгибающие моменты и перерезывающая сила; T_1, T_2 — мембранные усилия; w, φ — прогиб и угол поворота нормали; u — компонента перемещения точек срединной плоскости в радиальном направлении; h — толщина пластинки; E, G — модули Юнга и поперечного сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Полагая $q_1^+ = \sigma_1 \delta(\rho - \rho_0) / (2\pi R^2 \rho)$, $P_1^+ = \tau_1 \delta(\rho - \rho_0) / (2\pi R^2 \rho)$ (δ — дельта-функция) и интегрируя систему (1.1), найдем

$$Q_1 = \frac{C_1}{R\rho} - \frac{\sigma_1}{4\pi R\rho} \operatorname{sgn}(\rho - \rho_0), \quad u = \frac{1}{2} C_2 R\rho + \frac{C_3}{R\rho} - \frac{\tau_1 |\rho - \rho_0| (\rho + \rho_0)}{8\pi B \rho_0 \rho}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} C_4 R^2 \rho + \frac{C_5}{\rho} + C_1 \frac{R\rho}{2D} \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right) - h\tau_1 \frac{|\rho - \rho_0| (\rho + \rho_0)}{16\pi D \rho \rho_0} -$$

$$- \frac{\sigma_1 R}{8\pi D} \left[\rho \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \operatorname{sgn}(\rho - \rho_0) - \frac{|\rho - \rho_0|}{2\rho} (\rho + \rho_0) \right] \quad (1.2)$$

Из условия ограниченности Q_1, φ и u при $\rho=0$ и условий $M_1=0, T_1=0$ при $\rho=a$ находим постоянные

$$C_1 = -\frac{\sigma_1}{4\pi}, \quad C_3 = \frac{\tau_1 \rho_0 R}{8\pi B}, \quad C_5 = \frac{h\tau_1 \rho_0}{16\pi D} - \frac{\sigma_1 R}{16\pi D} \rho_0^2 \quad (1.3)$$

$$C_2 = \frac{\tau_1}{4\pi R a^2 B \rho_0} \left(a^2 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \rho_0^2 \right), \quad C_4 = \frac{\sigma_1 (1-\nu)}{4\pi D (1+\nu) R a^2} \left[a^2 - \rho_0^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\nu}{1-\nu} a^2 \ln \left(\frac{a^2}{\rho_0} \right) \right] + \frac{h\tau_1}{8\pi D R^2 a^2 \rho_0} \left(a^2 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \rho_0^2 \right)$$

где a — безразмерный радиус пластинки.

Интегральные уравнения построим, исходя из следующих условий контакта:

$$\kappa_1 = \kappa_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \kappa_i = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw_i}{d\rho} \right) \quad (1.4)$$

$$\frac{dw_i}{d\rho} = R \left(\frac{Q_i}{K} - \varphi_i \right), \quad \varepsilon_i = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho u_i) + (-1)^i \frac{h_i}{2\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \varphi_i) \quad (i=1,2)$$

где w_i, u_i, φ_i — прогибы, смещения точек срединных поверхностей в радиальном направлении и углы поворота нормали накладке ($i=1$) и пластины ($i=2$); h_1, h_2 — толщина верхней и нижней пластины.

Обозначим через a_1, a_2 безразмерные радиусы накладки и пластины, через $\sigma(\rho), \tau(\rho)$ — нормальную и касательную контактную нагрузку. Принимая во внимание (1.2), (1.3) и условия контакта (1.4), получим интегральные уравнения

$$\sigma(\rho) - \int_0^{a_1} [G_1(\rho, \rho_0) \sigma(\rho_0) - G_2(\rho, \rho_0) \tau(\rho_0)] \rho_0 d\rho_0 = F_1(\rho, \rho_1) \quad (0 \leq \rho < a_1) \quad (1.5)$$

$$\sigma(\rho) - \int_0^{a_1} [G_3(\rho, \rho_0) \sigma(\rho_0) + G_4(\rho, \rho_0) \tau(\rho_0)] \rho_0 d\rho_0 = F_2(\rho, \rho_2) \quad (0 \leq \rho < a_1)$$

$$G_1(\rho, \rho_0) = \frac{1}{2} R^2 \gamma [\alpha_1 (\ln \rho_0 + \ln(\rho/\rho_0) \operatorname{sgn}(\rho - \rho_0) + \omega_1 \rho_0^2)]$$

$$G_2(\rho, \rho_0) = \frac{R}{2\rho_0} \gamma [\beta_1 (1 - \operatorname{sgn}(\rho - \rho_0)) + \omega_2 \rho_0^2], \quad \gamma = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(\rho, \rho_1) &= \frac{P}{2\pi} \gamma \left\{ \frac{1}{2D_2} \left(\ln \left(\frac{\rho}{a_2^2} \right) - \frac{1-\nu_2}{1+\nu_2} \right) + \frac{\delta(\rho-\rho_1)}{R^2 K_1 \rho} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2D_1} \left[\frac{\rho_1^2(1-\nu_1)}{a_1^2(1+\nu_1)} + \ln \rho_1 + \ln \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \operatorname{sgn}(\rho-\rho_1) \right] \right\} \\
 G_3(\rho, \rho_0) &= -\frac{R^2}{2h_2} \gamma \alpha_2 \left[\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \operatorname{sgn}(\rho-\rho_0) + \ln \rho_0 + \varepsilon_2^1 \rho_0^2 \right] \\
 G_4(\rho, \rho_0) &= \frac{R}{2h_2 \rho_0} \gamma [\beta_2(1 - \operatorname{sgn}(\rho-\rho_0)) + \varepsilon_1^1 \rho_0^2] \\
 F_2(\rho, \rho_1) &= \frac{h_1+h_2}{2\pi R^2 h_2} \gamma P \left[\frac{R^2}{2D_1} \left(\ln \rho_1 + \rho_1^2 \varepsilon_2^1 + \ln \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \operatorname{sgn}(\rho-\rho_1) \right) - \frac{\delta(\rho-\rho_1)}{K_1 \rho} \right] \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}, \quad \alpha_2 = \frac{h_1+h_2}{D_1}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{D_1} - \frac{h_2}{D_2} \right), \quad \varepsilon_2^1 = \frac{1-\nu_1}{a_1^2(1+\nu_1)} \\
 \beta_2 &= \frac{h_1(h_1+h_2)}{2D_1} + \frac{2}{B_1} + \frac{2}{B_2}, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}, \quad B_i = \frac{E_i h_i}{(1-\nu_i^2)} \\
 K_i &= \frac{5}{6} G_{iz} h_i, \quad \omega_1 = \frac{1-\nu_1}{(1+\nu_1) D_1 a_1^2} + \frac{1-\nu_2}{(1+\nu_2) D_2 a_2^2} \\
 \omega_2 &= \frac{h_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1) D_1 a_1^2} - \frac{h_2(1-\nu_2)}{(1+\nu_2) D_2 a_2^2} \\
 \varepsilon_1^1 &= 4 \left[\frac{1-\nu_1}{(1+\nu_1) a_1^2 B_1} + \frac{1-\nu_2}{(1+\nu_2) a_2^2 B_2} + \frac{h_1(h_1+h_2)(1-\nu_1)}{4D_1 a_1^2(1+\nu_1)} \right]
 \end{aligned}$$

где ν_i, E_i, G_{iz} ($i=1, 2$) — коэффициенты Пуассона, модули Юнга и поперечного сдвига накладки и пластины.

При выводе уравнений (1.5) использовалось условие равновесия накладки (верхней пластины)

$$\int_0^{a_1} \sigma(\rho) \rho \, d\rho = \frac{P}{2\pi R^2} \quad (1.6)$$

Применяя к интегральному уравнению (1.5) оператор

$$L(\dots) = \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} (\dots) \right)$$

получим дифференциальные уравнения относительно нормального и касательного контактных напряжений

$$\begin{aligned}
 &\beta_2(\rho\tau_0)' + R\alpha_2\rho\sigma_0 - \frac{h_2}{R} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) (\rho\sigma_0)' = \\
 &= \frac{P\alpha_2}{2\pi R^2} \left[R\delta(\rho-\rho_1) - \frac{D_1}{K_1 R \rho_1} (\delta'(\rho-\rho_1)\rho)' \right] \\
 &\beta_1(\rho\tau_0)' + R\alpha_1\rho\sigma_0 - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) (\rho\sigma_0)' = \\
 &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{R}{D_1} \delta(\rho-\rho_1) - \frac{1}{K_1 R \rho_1} (\rho\delta'(\rho-\rho_1))' \right] \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

В дальнейшем примем $K_1 = \infty$ (для верхней пластины справедливы уравнения теории Кирхгофа — Лява).

Ограниченное при $\rho=0$ решение уравнений (1.7) имеет вид

$$\sigma_0(\rho) = C_1 I_0(\lambda\rho) + P[g_1 I_0(\lambda\rho) + g_2 K_0(\lambda\rho)] H(\rho - \rho_1) \quad (1.8)$$

$$\tau_0(\rho) = C_1 \omega_3 I_1(\lambda\rho) + P\omega_3 \left[g_1 I_1(\lambda\rho) - g_2 K_1(\lambda\rho) + \frac{\omega_4}{\omega_3 \rho} \right] H(\rho - \rho_1)$$

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_0}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \frac{h_1 \beta_1 - \beta_2}{R^2 K_2}, \quad g_1 = \lambda^2 \lambda_2 \rho_1 K_0(\lambda\rho)$$

$$g_2 = -\lambda_2 \lambda^2 \rho_1 I_0(\lambda\rho_1), \quad \alpha_0 = \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1, \quad \omega_3 = \frac{1}{\beta_1 \lambda} \left(\frac{\lambda^2}{R K_2} - R \alpha_1 \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2 - \alpha_2 \beta_1 D_1}{2\pi R^2 D_1 \rho_1 \alpha_0}, \quad \omega_4 = \frac{1}{\beta_1} \left(R \lambda_2 \alpha_1 \rho_1 + \frac{1}{2D_1 \pi R} \right)$$

где $I_0(\lambda\rho)$, $K_0(\lambda\rho)$, $I_1(\lambda\rho)$, $K_1(\lambda\rho)$ — модифицированные функции Бесселя, $H(\rho - \rho_1)$ — единичная функция.

Решение интегральных уравнений (1.5) представим в виде

$$\sigma(\rho) = \sigma_0(\rho) + C_2 \delta(\rho - a_1), \quad \tau(\rho) = \tau_0(\rho) + C_3 \delta(\rho - a_1) \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.5) (при $K_1 = \infty$), интегрируя по ρ_0 и сравнивая слева и справа коэффициенты при линейно-независимых функциях, получим два линейных алгебраических уравнения. Присоединив к этим уравнениям условие (1.6), приходим к замкнутой системе алгебраических уравнений

$$C_1 a_{11} + C_3 a_{12} = P \omega_{11}, \quad C_1 a_{22} + C_3 a_{21} = P \omega_{22} \quad (1.10)$$

$$C_1 I_1(\lambda a_1) \frac{a_1}{\lambda} + C_2 a_1 = P \omega_5 + \frac{P a_1}{\lambda} [g_2 K_1(\lambda a_1) - g_1 I_1(\lambda a_1)]$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2\pi R^2} + \lambda_2 \rho_1, \quad a_{11} = 2 \left(\frac{\alpha_1}{\lambda^2} + \frac{\omega_3 \beta_1}{\lambda R} \right) I_0(\lambda a_1) + \frac{a_1^2}{\lambda} \left(\frac{2\omega_1}{\lambda} + \omega_2 \frac{\omega_3}{R} \right) I_2(\lambda a_1)$$

$$a_{12} = \frac{1}{R} (2\beta_1 + \omega_2 a_1^2), \quad a_{22} = 2 \left(\frac{\alpha_2}{\lambda^2} + \frac{\omega_3 \beta_2}{\lambda R} \right) I_0(\lambda a_1) + \frac{a_1^2}{\lambda} \left(2\alpha_2 \frac{\varepsilon_2^1}{\lambda} + \varepsilon_1^1 \frac{\omega_3}{R} \right) I_2(\lambda a_1)$$

$$a_{21} = \frac{1}{R} (2\beta_2 + \varepsilon_1^1 a_1^2), \quad \omega_{11} = -(g_1 a_{11} + g_2 a_{13} + b_{11}), \quad \omega_{22} = -(g_1 a_{22} + g_2 a_{23} + b_{22})$$

$$b_{11} = \frac{\ln(a_2/a_1)}{\pi R^2 D_2} + \frac{1 - \nu_2}{(1 + \nu_2) 2\pi R^2 D_2} + \frac{\omega_4 \omega_2}{2R} (a_1^2 - \rho_1^2) + \frac{\varepsilon_2^1 \rho_1^2}{2\pi R^2 D_2}$$

$$- \omega_1 \omega_5 a_1^2 + \omega_1 \lambda_2 \rho_1^3 + \frac{4\omega_1 R_2}{\lambda^2} \rho_1 + 2 \frac{\omega_2 \omega_3}{\lambda R} \lambda_2 \rho_1$$

$$b_{22} = \frac{\omega_4 \varepsilon_1^1}{2R} (a_1^2 - \rho_1^2) - \alpha_2 \varepsilon_2^1 a_1^2 \omega_5 + \alpha_2 \varepsilon_2^1 \lambda_2 \rho_1^3 + \frac{4\lambda_2}{\lambda^2} \varepsilon_2^1 \alpha_2 \rho_1 + \frac{2\omega_3 \varepsilon_1^1 \rho_1 \lambda_2}{R\lambda} + \frac{\alpha_2 \varepsilon_2^1 \rho_1^2}{2\pi R^2}$$

$$a_{13} = 2 \left(\frac{\alpha_1}{\lambda^2} + \frac{\omega_3 \beta_1}{\lambda R} \right) K_0(\lambda a_1) + \frac{a_1^2}{\lambda} \left(\frac{2\omega_1}{\lambda} + \omega_2 \frac{\omega_3}{R} \right) K_2(\lambda a_1)$$

$$a_{23} = 2 \left(\frac{\alpha_2}{\lambda^2} + \omega_3 \frac{\beta_2}{\lambda R} \right) K_0(\lambda a_1) + \frac{a_1^2}{\lambda} \left(2\alpha_2 \frac{\varepsilon_2^1}{\lambda} + \varepsilon_1^1 \frac{\omega_3}{R} \right) K_2(\lambda a_1)$$

Решая систему (1.10), находим

$$C_1 = P(A_1 - g_1), \quad C_3 = \frac{P}{\Delta} [(g_2 a_{23} + b_{22}) a_{11} - a_{22} (g_2 a_{13} + b_{11})] \quad (1.11)$$

$$C_2 = P \left[\frac{\omega_5}{a_1} + \frac{g_2}{\lambda} K_1(\lambda a_1) - \frac{A_1}{\lambda} I_1(\lambda a_1) \right]$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} [(g_2 a_{13} + b_{11}) a_{21} - (g_2 a_{23} + b_{22}) a_{12}], \quad \Delta = a_{12} a_{22} - a_{21} a_{11}$$

Из формул (1.8)–(1.11) можно получить решение в случае жесткой накладки, устремив D_1, B_1 к бесконечности. Ниже приводится зависимость параметра $v_j = w_g/w_*$ ($j=1,2$) от безразмерного радиуса накладки R_1/R_2 , причем w_g – максимальный прогиб пластинки, подкрепленной деформируемой накладкой; w_* – максимальный прогиб пластинки с жесткой накладкой. При $R_1/R_2 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ для v_j ($j=1,2$) получены значения: $v_1 = 1.006, 1.030, 1.109, 1.562$; $v_2 = 1.016, 1.089, 1.320, 2.650$.

Было принято, что нагрузка приложена к накладке на окружности радиуса $\rho_1 = r/R_2 = 0.01$. Численные значения для $j=1$ получены при следующих характеристиках пластины и накладки: $h_1 = 3h_2, E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, 1/G_{1z} = 0, E_1/G_{2z} = 2.6, R_2/h_2 = 400$. Случаю $j=2$ соответствует $h_1 = h_2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, E_1 = 10E_2, R_2/h_2 = 400, G_{2z} = E_2/2 (1 + \nu_2)$. Очевидно, что чем меньше радиус накладки по сравнению с радиусом пластинки, тем с большей точностью можно считать накладку абсолютно жесткой.

Обозначим через $M_\tau, M_\sigma, w_\tau, w_\sigma$ изгибающие моменты и прогибы, возникшие за счет касательных $\tau(\rho)$ и соответственно нормальных $\sigma(\rho)$ контактных напряжений. Числовые расчеты показали, что в случае жесткой накладки между M_τ, M_σ и w_τ, w_σ существует следующее приближенное соотношение:

$$M_\sigma \gg M_\tau, \quad w_\sigma \gg w_\tau, \quad w_\tau \approx \frac{h_2^2}{R_2^2} \left[\frac{2E_2}{5(1-\nu_2^2)G_{2z}} \right]^{1/2} w_\sigma$$

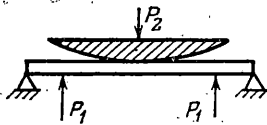
Таким образом, влияние касательных контактных напряжений на основное напряженно-деформированное состояние круглой пластинки очень незначительно (в случае жесткой накладки) по сравнению с влиянием нормальных контактных напряжений.

2. Осесимметричный изгиб круглой пластинки параболическим штампом и локальной нагрузкой. Впервые двумерная задача об изгибе круглой, заделанной по контуру пластинки жестким телом была поставлена и решена в [5]. Предполагая, что имеют место допущения Кирхгофа – Лява и что поверхность, ограничивающая твердое тело, может быть представлена

в виде $z = Ax^2 + By^2$, в [5] показано, что площадь контакта будет эллиптической (там же определены полуоси этого эллипса).

Далее осесимметричные контактные задачи для круглой пластинки и параболического штампа рассматривались в [6, 7], где учитывалась деформация поперечного сдвига. В [1] осесимметричная контактная задача для пластинки была обобщена на случай штампа, поверхность основания которого описывается произвольной функцией $z = f(r)$.

Ниже дается решение контактной задачи для круглой пластинки с учетом пригрузки. Пусть круглая пластинка радиуса R изгибается под действием параболического штампа и кольцевой локальной нагрузки P_1 , приложенной на окружности $\rho_1 = r_1/R$ (фиг. 2). Необходимо определить нормальное контактное напряжение под штампом, а также радиус области контакта. Примем, что трение между штампом и пластинкой отсутствует и штамп всюду в области контакта плотно прилегает к пластине.



Фиг. 2

В области контакта прогиб

$$w = -\alpha + \frac{1}{2} R^2 \rho^2 / R_1 \quad (0 \leq \rho < a) \quad (2.1)$$

где α — поступательное смещение штампа, R_1 — постоянная, характеризующая кривизну штампа, a — безразмерный радиус площадки контакта.

Полагая в (1.2), (1.3) $\tau_i = 0$ и считая, что в зоне контакта должно выполняться соотношение

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw}{d\rho} \right) = \frac{2R^2}{R_1} \rho$$

получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{K} \sigma(\rho) + \int_0^a G(\rho, \rho_0) \rho_0 \sigma(\rho_0) d\rho_0 = \frac{2}{R_1} + P_1 \frac{G(\rho, \rho_1)}{2\pi R^2} \quad (0 \leq \rho < a) \quad (2.2)$$

$$G(\rho, \rho_0) = -\frac{R^2}{2D} \left[\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \operatorname{sgn}(\rho - \rho_0) + \ln \rho - \frac{1-\nu}{1+\nu} \left(1 - \rho_0^2 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \ln \rho_0 \right) \right]$$

$$G(\rho, \rho_1) = G(\rho, \rho_0 = \rho_1), \quad K = \frac{5}{6} G_{12} h$$

где $\sigma(\rho)$ — искомое напряжение контакта. Предполагается, что пригрузка P_1 приложена на окружности $\rho = \rho_1 > a$.

От интегрального уравнения (2.2) переходим к дифференциальному

$$\frac{d^2 \sigma}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\rho} - \frac{R^2 K}{D} \sigma = 0 \quad (0 \leq \rho < a) \quad (2.3)$$

Ограниченное при $\rho = 0$ решение уравнения (2.3) выражается через модифицированную функцию Бесселя

$$\sigma(\rho) = A I_0(\lambda \rho), \quad \lambda^2 = R^2 K / D \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и интегрируя, получаем, что уравнение (2.2) тождественно удовлетворяется при следующем значении постоянной:

$$A = \frac{\lambda^2}{z_1 R^2} \left[\frac{P_1}{2\pi} \left(2 \ln \rho_1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} (1 - \rho_1^2) \right) - \frac{4D}{R_1} \right] \\ z_1 = 2[\lambda a I_1(\lambda a) \ln a - I_0(\lambda a)] + \frac{1-\nu}{1+\nu} [a \lambda (a^2 - 1) I_1 - 2a^2 I_2(\lambda a)] \quad (2.5)$$

где $I_0(\lambda a)$, $I_1(\lambda a)$, $I_2(\lambda a)$ — модифицированные функции Бесселя.

Радиус площадки контакта определяется из трансцендентного алгебраического уравнения

$$A(a/\lambda) I_1(\lambda a) = \frac{1}{2} P_2 / (\pi R^2) \quad (2.6)$$

которое является следствием условия равновесия штампа.

Если к пластинке вне штампа приложена осесимметричная пригрузка $q(\rho_1)$, заданная в кольце $c \leq \rho_1 \leq d$ (причем $c > a$, $d < 1$), то в этом случае для определения контактного напряжения можно использовать решение (2.4) — (2.6). Для этого необходимо в (2.5) положить $P_1 = R^2 q(\rho_1) d\rho_1 d\theta$ и проинтегрировать в заданном интервале изменения ρ_1 , θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

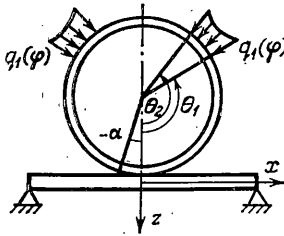
Таким образом, получим

$$\sigma(\rho) = A_1 I_0(\lambda \rho), \quad A_1 \frac{a}{\lambda} I_1(\lambda a) = \frac{P_2}{2\pi R^2}$$

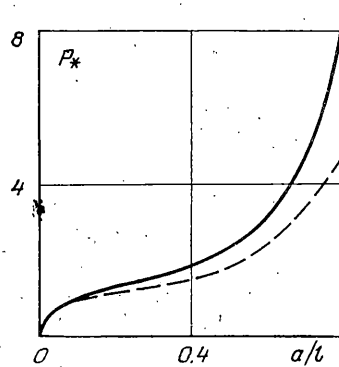
$$A_1 = \frac{\lambda^2}{z_1 R^2} \left[R^2 \int_0^a \left(2 \ln \rho_1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} (1-\rho_1^2) \right) q_1(\rho_1) \rho_1 d\rho_1 - \frac{4D}{R_1} \right]$$

3. Совместный изгиб прямоугольной пластинки и цилиндрической оболочки. Плоская деформация. Определим нормальное давление, которое оказывает цилиндрическая оболочка радиуса R на прямоугольную пластинку длиной $2l$. Предположим, что оболочка прижимается к пластине нормальной нагрузкой $q_1(\varphi)$, заданной на интервале (θ_1, θ_2) (фиг. 3), причем $q_1(\varphi) = q_1(-\varphi)$. Область контакта будет характеризоваться углом 2α или линейным размером $(-a, a)$.

Считаем, что трение отсутствует и внутри области контакта нет зон отрыва. Подобные контактные задачи могут возникнуть при расчетах на жесткость и прочность тонкостенных элементов волновых передач [8, 9].



Фиг. 3



Фиг. 4

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражение для кривизны шарнирно опертой пластинки, находящейся под действием сил P , приложенных в точках $\pm x_0$:

$$\kappa_2 = \frac{d^2 w_2}{dx^2} = P G_2(x, x_0) - \frac{P}{K_2} (\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)) \quad (3.1)$$

$$G_2(x, x_0) = \frac{1}{2} (|x-x_0| + |x+x_0|) / D_2 - l / D_2, \quad K_2 = \frac{5}{8} G_{22} h_2$$

где D_2 — цилиндрическая жесткость пластинки, w_2 — прогиб, h_2 — толщина пластинки, G_{22} — модуль поперечного сдвига. Кривизна оболочки, находящейся под действием взаимно уравновешивающих сил P_0 и P_1 , приложенных соответственно в точках $\pm\varphi_0$ ($0 < \varphi_0 < \pi/2$), $\pm\varphi_1$ ($\pi/2 < \varphi_1 \leq \pi$), имеет вид

$$\kappa_1 = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} + w_1 \right) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left[P_0 G_1(\varphi, \varphi_0) + \right. \quad (3.2)$$

$$\left. + P_0 \frac{R}{K_1} (\delta(\varphi - \varphi_0) + \delta(\varphi + \varphi_0)) + P_1 \frac{R}{K} (\delta(\varphi - \varphi_1) + \delta(\varphi + \varphi_1)) + P_1 G_1(\varphi, \varphi_1) \right]$$

$$G_1(\varphi, \varphi_0) = \frac{R^3}{D_1 \pi} + \frac{m_1}{\pi} \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi - \frac{m_1}{2} (\sin|\varphi - \varphi_0| + \sin|\varphi + \varphi_0|)$$

$$m_1 = \frac{R}{K_1} (1 + \lambda_1^2), \quad \lambda_1^2 = K_1 \left(\frac{1}{B_1} + \frac{R^2}{D_1} \right)$$

$$B_1 = E_1 h_1 / (1 - \nu_1^2), \quad D_1 = E_1 h_1^3 / [12(1 - \nu_1^2)], \quad K_1 = {}^5/6 G_{12} h_1$$

Здесь h_1 — толщина оболочки, G_{12} — модуль поперечного сдвига, w_1 — прогиб оболочки, δ — дельта-функция.

В области контакта можно принять $x = R\varphi$, $\kappa_1 = \kappa_2$. Используя функции влияния (3.1), (3.2) и данные условия, запишем интегральное уравнение относительно давления $\sigma(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \omega \sigma(\varphi) + \frac{1}{R} \int_0^\alpha [G_1(\varphi, \varphi_0) + R G_2(R\varphi, R\varphi_0)] \sigma(\varphi_0) d\varphi_0 = \\ = \varepsilon + \frac{m_1}{R} a_2 \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi < \alpha) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{R} - \frac{R a_1}{D_1 \pi}, \quad \omega = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}, \quad a_1 = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_1(\varphi) d\varphi$$

$$a_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_1(\varphi) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) \sin \varphi d\varphi$$

Применяя к уравнению (3.3) дифференциальный оператор

$$L_1(\dots) = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right) (\dots)$$

получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^4}{d\varphi^4} + 2a_0 \frac{d^2}{d\varphi^2} + b_0 \right) \sigma(\varphi) = 0 \quad (3.4)$$

$$b_0 = -R^2 / (D_2 \omega), \quad 2a_0 = 1 + b_0 - m_1 / (R\omega)$$

Четное решение уравнения (3.4) можно представить в виде

$$\sigma(\varphi) = A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{ch} s\varphi, \quad h = (\sqrt{a_0^2 - b_0} + a_0)^{1/2}, \quad s = (\sqrt{a_0^2 - b_0} - a_0)^{1/2}$$

С помощью описанной процедуры (см. п. 1) из интегрального уравнения (3.3) отыскиваем постоянные

$$A_1 = \frac{1}{z_3} \left[\frac{\varepsilon}{R} - a_2 \pi \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{z_2 s} \left(\omega_1 + \frac{R}{s D_2} \operatorname{cth} s\alpha \right) \right], \quad A_2 = \frac{1}{z_2} (\pi a_2 - A_1 z_1)$$

$$z_3 = \frac{\sin n\alpha}{n} \left(\omega_1 - \frac{R}{n D_2} \operatorname{ctg} n\alpha \right) - \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{s} \left(\omega_1 + \frac{R}{s D_2} \operatorname{cth} s\alpha \right) \frac{z_1}{z_2}$$

$$z_1 = C_2 - C_1 \pi, \quad z_2 = C_3 - C_1 \pi, \quad \omega_1 = R / D_1 \pi + (l - a) / D_2$$

$$C_1 = (\cos n\alpha \cos \alpha + n \sin \alpha \sin n\alpha) (n^2 - 1)^{-1}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)^2} - \frac{\alpha \cos(n+1)\alpha}{(n+1)} + \frac{\sin(1-n)\alpha}{(n-1)^2} + \frac{\alpha \cos(n-1)\alpha}{(n-1)} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{s^2 + 1} (s \operatorname{sh} s\alpha \sin \alpha - \operatorname{ch} s\alpha \cos \alpha)$$

$$C_3 = \alpha C_4 - \frac{1}{(s^2 + 1)^2} [(s^2 - 1) \sin \alpha \operatorname{ch} s\alpha - 2s \cos \alpha \operatorname{sh} s\alpha]$$

Из условия равновесия оболочки

$$\int_0^{\alpha} \sigma(\varphi) \cos \varphi d\varphi = a_3, \quad a_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_1(\varphi) \cos \varphi d\varphi$$

следует трансцендентное уравнение

$$A_1(1-n^2)^{-1}(\cos n\alpha \sin \alpha - n \sin n\alpha \cos \alpha) + A_2(s^2+1)^{-1}(\sin \alpha \operatorname{ch} s\alpha + s \operatorname{sh} s\alpha \cos \alpha) = a_3 \quad (3.5)$$

разрешив которое можно найти угол контакта.

На фиг. 4 приведены кривые, иллюстрирующие зависимость линейного размера области контакта (или угла контакта) от величины главного вектора внешних сил $P_* = 1/2 PRl/D_2$. Предполагалось, что нагрузка, действующая на оболочку, представляет сосредоточенную силу P , приложенную в точке $\varphi = \pi$. Пунктирная кривая построена по формуле (3.5) для абсолютно жесткой оболочки. Сплошная кривая построена для оболочки, толщина которой в два раза превышает толщину пластинки. Исходные данные: $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $R = 10l$, $h_1 = 2h_2$, $E_1 = E_2$, $l/h_2 = 20$, $G_{1z} = G_{2z} 1/2 E_1 / (1 + \nu_1)$.

Из фиг. 4 следует, что в интервале $0 < a/l < 0.6$ можно считать оболочку абсолютно жесткой (при $h_1 = 2h_2$) с погрешностью от 1% до 22%. С увеличением области контакта ($a/l > 0.6$) различие между кривыми достигает 40% и более.

Поступила 24 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, «Наукова думка», 1973.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Равновесие цилиндрических оболочек, соединенных по образующим. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.
3. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактная задача для полубесконечной цилиндрической оболочки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. Толкачев В. М. Контактная задача для сферической оболочки. В сб.: Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.
5. Галли Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
6. Розенберг Л. А. О давлении твердого тела на пластинку. Инж. сб., 1955, т. 21.
7. Essenburg F. On surface constraints in plate problems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1962, т. 29, № 2).
8. Косов М. Г. Уточненное решение задачи о тесном контакте гибкого кольца с цилиндрическим диском. В сб.: Волновые и цепные передачи. М., Станкии, 1967.
9. Косов М. Г. Некоторые контактные задачи теории упругости применительно к телам повышенной изгибной податливости. В сб.: Волновые передачи. М., Станкии, 1970.