

ЖЕСТКОСТЬ И ИЗГИБАЕМОСТЬ ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ВОЛНОВЫХ ПЕРЕДАЧАХ

А. И. ДАНИЛОВ, Г. Н. ЧЕРНЫШЕВ

(Москва)

Исследовано напряженное состояние оболочек отрицательной кривизны, используемых в волновых передачах. Считается, что оболочка имеет собственные размеры, т. е. такие размеры, при которых безмоментная задача некорректна. Интегрирование уравнений осуществлено асимптотическим методом.

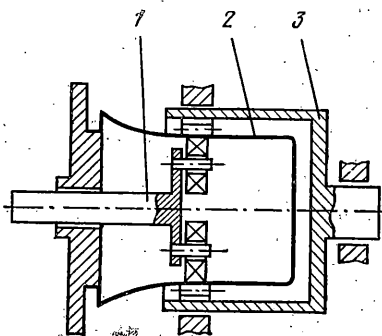
В современном машиностроении применяются волновые передачи, одним из основных конструктивных элементов которых является оболочка. На фиг. 1 приведена схема, иллюстрирующая работу волнового редуктора. Оболочка (2) в среднем сечении деформируется генератором (1). Прогиб оболочки под генератором должен быть достаточным для того, чтобы зубья, нарезанные в ее средней части, вошли в зацепление с зубьями жесткого колеса (3). При вращении генератора по оболочке перемещается волна деформации и вместе с ней перемещается дуга, по которой осуществляется зубчатое зацепление, а так как на оболочке зубьев нарезано меньше, начинает вращаться и жесткое колесо. Конструктивные варианты подобных передач могут быть различными, и оболочки могут быть цилиндрическими, коническими, торовыми, сферическими и т. д.

Требования, предъявляемые к оболочке, состоят в том, чтобы она была достаточно податлива на расширяющее действие генератора и достаточно жесткая на другие внешние силовые воздействия (передаточный момент, осевое усилие, атмосферное давление и т. д.). Таким свойством обладают оболочки отрицательной гауссовой кривизны, имеющие собственные размеры.

В [1] было отмечено это свойство и показано, что собственные размеры существуют не для всех видов граничных условий, а только для таких, когда одно из тангенциальных условий статическое, а второе — геометрическое. Более подробно исследование условий существования собственных размеров проведено в [2]. Вопросы расчета напряжений в таких оболочках не рассматривались.

Собственный размер характерен тем, что оболочка этого размера становится гибкой, т. е. податливой для определенного вида нагрузок, и при небольших усилиях в ней появляются большие прогибы, хотя при других размерах или при другом виде нагрузки в общем случае оболочка ведет себя обычным образом, т. е. остается жесткой. В конструкции, где оболочки отрицательной кривизны являются несущими элементами, податливость является весьма нежелательным свойством, поэтому оболочечные элементы, обладающие им, забыты, а с потерей интереса к таким оболочкам прекратились исследования напряженного состояния в них.

Иная ситуация имеет место при работе оболочек в волновых передачах. Здесь гибкость оболочки — необходимое качество. В этом смысле оболочки с собственными размерами могут служить перспективным конструктивным элементом особенно для герметичных передач.



Фиг. 1

1. Рассмотрим оболочку вращения отрицательной кривизны, образующая которой задается уравнением $r=r(z)$; r, z, β — цилиндрическая система координат. Пусть края оболочки имеют координаты z_1 и z_2 . В качестве граничных условий на обоих краях примем условия подвижного шарнирного опирания

$$T_1=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad G_1=0 \quad (1.1)$$

Обозначения заимствованы из [3]: T_i, S_i, G_i, H_i ($i=1, 2$) — усилия и моменты; u, v, w — перемещения; $\varepsilon_i, \omega, \kappa_i, \tau$ — тангенциальные и изгибные деформации срединной поверхности. Такие граничные условия наиболее соответствуют случаю сопряжения краев волновой герметичной оболочки с плоскими диафрагмами.

Напряженное состояние в оболочке под действием нагрузки, конкретный вид которой зададим позднее, строим методом расчленения напряженного состояния на основное (безмоментное и чисто моментное) и краевые эффекты. Обозначим индексами b, m, k и звездочкой усилия, моменты и перемещения, соответствующие безмоментному, чисто моментному напряженному состоянию, краевому эффекту и частному решению. Тогда граничные условия (1.1) можно записать в виде

$$P^b + P^m + P^k + P^* = 0 \quad (1.2)$$

где под P понимается любая из величин T_1, v, w, G_1 .

Предположим, что частное решение, по крайней мере вблизи границы, строится, исходя из неоднородных безмоментных уравнений равновесия. В связи с этим можно в (1.2) положить $G_1^* = 0$.

Величины, относящиеся к краевому эффекту, например для края $z=z_2$ (область слева от линии $z=z_2$), имеют вид [3]:

$$v^k=0, \quad 2Ehw^k=\psi_1, \quad G_1^k=-\lambda^2\varepsilon^2R_0(R_{20}R_2)^{-1}\psi_2, \quad \varepsilon^2=hR_0^{-1} \quad (1.3)$$

$$T_1^k=\lambda^2\varepsilon^2\frac{R_0}{r^2R_{20}}\frac{d^2\psi_2}{d\beta^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\varepsilon r'\sqrt{\frac{R_0}{R_{20}R_2^3}}(\psi_2-\psi_1), \quad \lambda=\sqrt{\frac{4R_{20}}{3(1-\sigma^2)}}$$

где ε^2 — малый параметр, R_0 — некоторый характерный размер; R_{20} — радиус кривизны параллели на участке $z=z_2$, h — полутолщина оболочки; E, σ — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $A=\sqrt{1+(r')^2}$ — коэффициент первой квадратичной формы; ψ_1, ψ_2 — произвольные функции координаты β , определяемые из граничных условий.

Подставим (1.3) в (1.2) и из полученной системы исключим ψ_1 и ψ_2 . В результате получаем

$$T_1^b + T_1^m + \frac{R_0^2}{r^2} \frac{d^2}{d\beta^2} (G_1^b + G_1^m) + M \left\{ \lambda^{-2} \frac{R_2}{\varepsilon} \sqrt{\frac{R_{20}}{R_0}} (G_1^b + G_1^m) + \varepsilon p (w^b + w^m) \right\} = -T_1^* - \varepsilon p M w^* \quad (1.4)$$

$$v^b + v^m = -v^*, \quad M = 2^{-1/2} \lambda r' R_2^{-1}, \quad p = 2Eh(R_0 R_{20}^{-1})^{1/2}$$

Эти соотношения являются граничными условиями шарнирного опирания для основного напряженного состояния.

Выполним асимптотическую оценку по h каждого слагаемого в этих условиях. Величины безмоментного состояния строятся в следующей последовательности: интегрируются безмоментные уравнения равновесия и определяются усилия, интегрируются геометрические уравнения и опре-

деляются перемещения κ_i , τ , G_i , H . Безмоментные компоненты имеют следующие соотношения порядков:

$$(T_i^b, S_b) \sim Eh(\varepsilon_i, \omega) \sim Eh(u^b, v^b, w^b), (G_i^b, H^b) \sim Eh^3(\kappa_i, \tau) \sim Eh^3(u^b, v^b, w^b)$$

Процесс построения чисто моментного состояния следующий: интегрируются геометрические соотношения ($\varepsilon_i=0$, $\omega=0$) и определяются перемещения, затем κ_i , τ , G_i , H ; интегрируются безмоментные уравнения, в которых величины перерезывающих усилий N_1 и N_2 считаются известными из уравнений равновесия для моментов. Эта последовательность интегрирования дает следующие соотношения порядков чисто моментных компонентов:

$$(G_i^m, H^m) \sim Eh^3(u^m, v^m, w^m), (T_i^m, S^m) \sim Eh^3(u^m, v^m, w^m)$$

Использование в (1.4) первого приближения краевого эффекта ограничивает точность конечного решения в пределах $h^{1/2}$ и нет необходимости в первом приближении учитывать слагаемые, выходящие за рамки этой точности. Поэтому сохраним в (1.4), учитывая полученные оценки, главные члены для безмоментных и чисто моментных состояний, т. е. сохраним слагаемые, содержащие h в наименьшей степени. Условия примут вид

$$T_1^b + M\varepsilon r w^m = -T_1^*, \quad v^b + v^m = -v^* \quad (1.5)$$

Величина $\varepsilon r M w^*$ в частном решении также опускается ввиду ее малости по сравнению с T_1^* .

Отметим, что в общем случае порядки перемещений (а не усилий и моментов) безмоментного и чисто моментного напряженных состояний в данной задаче с граничными условиями (1.1) одинаковы — это следует из второго уравнения (1.5). В первом же уравнении чисто моментная компонента имеет множитель $h^{3/2}$, т. е. в $h^{1/2}$ раз меньше безмоментной и ею можно было бы пренебречь. Тогда первое равенство в (1.5) примет вид

$$T_1^b = -T_1^* \quad (1.6)$$

Этого следовало ожидать в данной задаче, когда одно из тангенциальных усилий задано в перемещениях, а другое — в усилиях. Интегрирование уравнений осуществляется поэтапно, вначале интегрируются безмоментные уравнения в усилиях при граничном условии (1.6), затем интегрируются геометрические уравнения при втором условии (1.5). Более того, если определяются только напряжения, как это имеет место при расчете на прочность, второй этап интегрирования не проводится.

Так будет в общем случае. Однако для оболочек отрицательной кривизны безмоментная система уравнений имеет гиперболический тип и краевая задача (1.6) для нее некорректна, т. е. существуют размеры, при которых решение системы при условии (1.6) неединственное: существуют решения однородных уравнений при однородных граничных условиях. Именно эти размеры оболочек и называются собственными. Построим процесс решения краевой задачи, когда оболочка имеет собственный размер, считая заранее, что он известен (задача об определении этих размеров достаточно подробно рассмотрена в [1, 2]).

Ищем решение в виде асимптотических сумм по малому параметру

$$T_1^b = T_{10}^b + \varepsilon T_{11}^b + \dots, \quad v^b = v_0^b + \varepsilon v_1^b + \dots \\ w^m = \varepsilon^p (w_0^m + \varepsilon w_1^m + \dots), \quad v^m = \varepsilon^p (v_0^m + \varepsilon v_1^m + \dots)$$

Подставим эти разложения в граничные условия (1.5)

$$T_{10}^b + \varepsilon T_{11}^b + \dots + \varepsilon M r \varepsilon^p (w_0^m + \varepsilon w_1^m + \dots) = -T_1^* \\ v_0^b + \varepsilon v_1^b + \dots + \varepsilon^p (v_0^m + \varepsilon v_1^m + \dots) = -v^* \quad (1.7)$$

Показатель ρ характеризует интенсивность чисто изгибного состояния в основном напряженном состоянии и определяется из условия существования сходящегося асимптотического процесса построения решения. В данной задаче он должен быть целым числом, так как решение полных уравнений равновесия оболочки в случае, когда внешняя нагрузка — медленно меняющаяся функция, строится в виде асимптотической суммы по целым степеням малого параметра.

Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях ϵ получаем рекуррентную систему граничных условий, но для этого необходимо задать значения показателя ρ . Полагая $\rho=0$, приходим к условию $T_1 = -T_1^*$, которому не сможем удовлетворить, так как оболочка имеет собственный размер. Перебирая таким же образом другие значения $\rho = \pm 1, \pm 2, \dots$, нетрудно получить, что рекуррентный процесс получается при $\rho = -1$; другое значение ρ приводит к противоречиям. Подставляя это значение в (1.7) и собирая члены при равных степенях ϵ , получим искомую последовательность граничных условий.

Первое приближение получается приравниванием членов при ϵ^{-1} и имеет вид $v_0^m = 0$ (порядок частного решения принимаем равным ϵ^2 , если порядок иной, всегда можно искомое решение умножить на соответствующий коэффициент).

Второе приближение получается приравниванием членов при ϵ^0 :

$$T_{10}^b + p M w_0^m = -T_1^*, \quad v_0^b + v_1^m = -v^* \quad (1.8)$$

Итак, на первом этапе интегрируются однородные геометрические уравнения $\epsilon_i \omega = 0$ при соответствующих однородных условиях. Это задача на построение собственной функции. Такое решение существует и это следует из статико-геометрической аналогии теории оболочек: если статическая задача имеет собственное решение, то его имеет и геометрическая задача [3]. Решение определяется с точностью до постоянного множителя.

Из вида граничных условий второго приближения следует, что на втором этапе статическая задача для безмоментного решения первого приближения и геометрическая задача для второго приближения чисто моментного решения разделяются. Первое уравнение (1.8) служит граничным условием для построения безмоментной части решения. Входящая в это условие функция w_0^m известна, но имеет неизвестный постоянный множитель. Так как оболочка имеет собственный размер, статическая задача некорректна. Для того чтобы сделать ее корректной, надо соответствующим образом распорядиться произвольной постоянной. Далее будет показано, как это сделать. Решение этой задачи строится, в свою очередь, с точностью до постоянного множителя, который, так же как и выше, определяется на следующем этапе интегрирования при нахождении второго приближения чисто моментного напряженного состояния.

2. Применим получившуюся асимптотическую процедуру непосредственно к уравнениям. Система геометрических уравнений при помощи замены

$$u = -\frac{r^2}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F}{r} \right), \quad v = \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (2.1)$$

$$w = -\frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F}{r} \right) \right] + \frac{r^2 r'}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F}{r} \right)$$

сводится к одному уравнению. Если функцию F представить в виде тригонометрического ряда по β , то для n -й гармоники уравнение примет вид

$$F_n'' + \frac{r''}{r} (n^2 - 1) F_n = 0, \quad F_n(z_1) = F_n(z_2) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь приведены также граничные условия для функции F_n , к которым сводится условие $v_0^m = 0$. На этом этапе определяются собственные размеры оболочки, если они неизвестны, а также перемещения u_0^m, v_0^m, w_0^m с точностью до произвольного постоянного множителя.

Безмоментные уравнения в усилиях, которые надо интегрировать на втором этапе при помощи замены

$$T_1 = \frac{A}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad T_2 = \frac{r''}{Ar} \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad S = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F}{r} \right) \quad (2.3)$$

сводятся к уравнению, совпадающему с (2.2).

Обозначим через Φ_1, Φ_2 линейно-независимые решения уравнения (2.2). Граничными условиями в этом случае является первое уравнение (1.8). После подстановки функции $F_n = D_1 \Phi_1 + D_2 \Phi_2$ условия примут вид

$$\begin{aligned} nA(z_1)r^{-2}(z_1)[D_1\Phi_1(z_1)+D_2\Phi_2(z_1)] &= T_1^*(z_1) + pMw_0^m(z_1) \\ nA(z_2)r^{-2}(z_2)[D_1\Phi_1(z_2)+D_2\Phi_2(z_2)] &= T_1^*(z_2) + pMw_0^m(z_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как оболочка имеет собственный размер, система уравнений для определения постоянных интегрирования D_1, D_2 линейно-зависима, т. е. определитель ее равен нулю

$$\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2) - \Phi_1(z_2)\Phi_2(z_1) = 0 \quad (2.5)$$

Для того чтобы система имела решение, правые части должны удовлетворять условию разрешимости, которое имеет вид

$$Q(z_1)R(z_1) - Q(z_2)R(z_2) = 0, \quad Q = \frac{r^2}{\Phi_2 A}, \quad R = T_1^* + pMw_0^m \quad (2.6)$$

Это условие служит для определения неизвестного постоянного коэффициента D_1 или D_2 , оставшегося неопределенным на первом этапе, и после этого полностью определяются первые приближения перемещений u_0^m, v_0^m, w_0^m . Затем, с точностью до неизвестного множителя, определяются функции F и усилия T_1, T_2, S , деформации $\epsilon_1, \epsilon_2, \omega$ и, наконец, безмоментные перемещения. Строится также решение однородной геометрической системы, т. е. определяется чисто моментное напряженное состояние. Оставшийся неопределенным постоянный множитель решения безмоментной системы находится из условия разрешимости этой краевой задачи, которое аналогично условию (2.6)

$$\Phi_1(z_1)[v^*(z_2) + v_1^m(z_2)] - \Phi_1(z_2)[v^*(z_1) + v_1^m(z_1)] = 0 \quad (2.7)$$

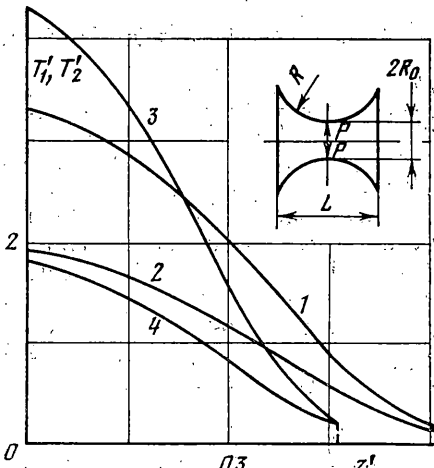
Сравним безмоментную и чисто моментную компоненты напряженного состояния. Имеем следующие соотношения:

$$\sigma_i^b \sim T_i \epsilon^{-2} \sim E(u^b, v^b, w^b), \quad \sigma_i^m \sim G_i \epsilon^{-1} \sim Eh(u^m, v^m, w^m), \quad u^m \sim \epsilon u^b$$

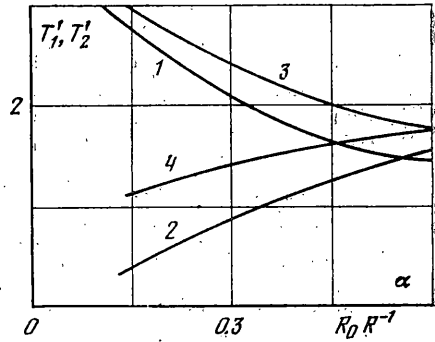
Отсюда видно, что σ^b больше σ^m в ϵ раз. Таким образом, получается, что хотя и более гибкой является оболочка с собственными размерами, основное напряженное состояние в ней преимущественно безмоментное. Следовательно, для построения напряженного состояния в первом приближении нет необходимости строить изгибные деформации и напряжения чисто моментного состояния.

Оценим порядки нагрузок, вызывающих одинаковые перемещения в оболочке с собственными и несобственными размерами. Частное решение для обеих оболочек имеет одинаковый вид, и перемещение w^* пропорционально интенсивности нагрузки $P, (u^*, v^*, w^*) \sim fP$.

Для оболочки с собственными размерами, как нетрудно видеть, порядок полного перемещения определяется компонентами (u^m, v^m, w^m) , имеющими порядок $(u^m, v^m, w^m) \sim f\epsilon^{-1}P$, для оболочки с несобственными размерами порядки безмоментной и изгибной компонент, а вместе с ними и порядок общих перемещений, равны $(u, v, w) \sim (u^*, v^*, w^*) \sim fP$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, одна и та же нагрузка в оболочке с собственными размерами вызывает перемещения в ε^{-1} раз больше. Поэтому чтобы обеспечить в обеих оболочках одинаковые перемещения, к оболочке с собственными размерами следует приложить нагрузку в ε раз меньше.

3. В качестве примера рассмотрим расчет оболочки вращения, очерченной по поверхности катеноида, уравнение меридиана которого $r=R_0 \operatorname{ch} \alpha z$. Считаем, что оболочка симметрична относительно среднего сечения $z=0$, и координаты границ соответственно равны $z_1=-z_2=z_0$. На оболочку действует нормальная сила, приложенная по параллели $z=0$ и распределенная по закону $Z=P_0 \delta(z) \cos 2\beta$. Условия (2.6), (2.7) имеют вид

$$M p w_0^m = -T_1^*, \quad v_1^m = -v^* \quad (3.1)$$

Первый собственный размер, соответствующий $n=2$, равен $(12)^{-1/2} \pi / \alpha$. Частное решение, соответствующее указанной выше сосредоточенной по координате z силе, строим методом расчленения на безмоментную составляющую и внутренний краевой эффект. Уравнение (2.2) примет вид

$$F_n'' + 3r'' r^{-1} F_n = 2P_0 \delta(z) \quad (3.2)$$

Частное решение этого уравнения и соответствующее ему усилие T_1^* и перемещение имеют вид

$$F_n^* = 1/4 P_0 \sin \sqrt{3} |z|, \quad T_{1n}^* = -1/2 P_0 \operatorname{ch}^{-1} z \sin \sqrt{3} |z| \quad (3.3)$$

$$v_n^* = (3)^{-1/2} \cos \sqrt{3} z \int_{-z_0}^{z_0} W_n \sin \sqrt{3} z dz, \quad W_n = \operatorname{ch} z \omega_n' + 2 \operatorname{sh} z \omega_n - 2 \varepsilon_{1n} - 2 \operatorname{ch} z \varepsilon_{2n} \quad (3.4)$$

Решение для перемещений получено в интегральной форме, но имеет, к сожалению, громоздкий вид. Выражения для изгибных компонент перемещений, которые находятся на первом этапе, имеют форму

$$u = C_2 \operatorname{ch}^{-2} z [\sqrt{3} \sin \sqrt{3} z \operatorname{ch} z + \cos \sqrt{3} z \operatorname{sh} z], \quad v = -2C_2 \cos \sqrt{3} z \\ w = C_2 [4 \operatorname{ch} z \cos \sqrt{3} z - \operatorname{th} z (\sqrt{3} \sin \sqrt{3} z \operatorname{ch} z - \cos \sqrt{3} z \operatorname{sh} z)]$$

Постоянная C_2 определяется из первого условия (3.1), в которое необходимо подставить T_1^* из (3.3)

$$C_2 = P_0 \frac{\sqrt{3}(1-\sigma^2)}{\sqrt{24} E h^{3/2}} \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Выражения для усилий, обусловленных общим решением уравнения (3.2), имеют вид

$$T_{1n} = -2B_2 \operatorname{ch}^{-1} z \cos \sqrt{3}z, \quad T_{2n} = -2B_2 \operatorname{ch}^{-1} z \cos \sqrt{3}z \\ S_n = B_2 \operatorname{ch}^{-2} z [\operatorname{sh} z \cos \sqrt{3}z + \sqrt{3} \operatorname{ch} z \sin \sqrt{3}z]$$

Постоянная B_2 , определенная из второго условия (3.1), равна

$$B_2 = -v_n^* \left[\int_{-z_0}^{z_0} W_n \cos \sqrt{3}z dz \right]^{-1}$$

На этом заканчивается построение первого приближения основного напряженного состояния. Внутренний краевой эффект строится как простой краевой эффект [3].

В случае, когда оболочка произвольна, расчет представляет значительную трудность, поэтому для расчета произвольных оболочек авторами был разработан алгоритм и составлена ФОРТРАН-программа. Здесь приведены результаты расчета катеноидной $r = R_0 \operatorname{ch} \alpha z$ и торовой $r = (R + R_0) - \sqrt{R^2 - z^2}$ оболочек.

На фиг. 2 приведены графики усилий $T_i' = P_0^{-1} T_i$ в катеноидной (кривые 1, 2) и торовой (кривые 3, 4) оболочках ($R_0/R = 0.25$, $z' = 2z/L$). При одной и той же нагрузке в катеноидной оболочке возникают несколько меньшие напряжения. На фиг. 3 показаны изменения усилий T_1 , T_2 в катеноидной (кривые 1, 2) и торовой (кривые 3, 4) оболочках в зависимости от параметров α или $R_0 R^{-1}$.

Поступила 31 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. К теории безмоментных оболочек вращения. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5.
2. Шачнев В. А. О корректности некоторых задач безмоментной теории оболочек отрицательной кривизны. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.-Л., Гостехиздат, 1953.