МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Ж.-Л. П. АРМАН, К. А. ЛУРЬЕ, А. В. ЧЕРКАЕВ

(Париж, Ленинград)

Рассматриваются вопросы корректности постановок задач оптимального проектирования упругих конструкций. Показано, что для выделения оптимального решения среди стационарных может эффективно использоваться условие Якоби.

1. В задаче проектирования крыла минимального веса при заданной скорости дивергенции Арманом и Витте [1] было обнаружено явление множественности стационарных решений, удовлетворяющих условию Вейерштрасса. Требовалось минимизировать функционал (объем крыла)

$$I=\int_0^1 t\,dx \tag{1.1}$$

выбором площади поперечного сечения $t(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$ при связях

$$\theta'=s/t,\qquad s'=\omega^2\theta,\qquad \theta(0)=s(1)=0 \tag{1.2}$$

и ограничении

$$t\geqslant t_*=\mathrm{const},\qquad 0\leqslant t_*\leqslant 1 \tag{1.3}$$

Параметр ω, имеющий смысл скорости дивергенции, выбирается равным $^1/_2\pi$; это значение представляет собой минимальное собственное число задачи (1.2) при $t(x)\equiv 1$. При решении задачи (1.1) — (1.3) предполагается, что $\omega={}^1/_2\pi$ — ее минимальное собственное значение.

Явление, обнаруженное в [1], заключается в следующем. Стационарное распределение толщины имеет вид

$$t(x)=\begin{cases} t_*+{}^1/_2\omega^2(\chi^2-x^2) & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\chi<1\\ t_* & \text{при}\quad \chi\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{1.4}$$

где параметр χ находится из уравнения

$$k\chi=\operatorname{ctg} k(1-\chi) \tag{1.5}$$

Число корней этого уравнения зависит от значения k; если $k\leqslant{}^3/_2\pi$, то имеется один корень, если $^3/_2\pi\leqslant k<{}^5/_2\pi$, то имеется два корня и т. д.; вообще, число корней увеличивается на единицу, когда параметр k, возрастая, последовательно переходит через значения $^3/_2\pi$, $^5/_2\pi,\ldots,{}^1/_2(2n+1)\pi,\ldots$ (увеличение параметра соответствует уменьшению нижнего предела толщины t_*).

При $k<{}^3/_2\pi$ единственному корню χ_1 уравнения (1.5) соответствует распределение толщины $t_1(x)$; когда k, возрастая, переходит через значение $^3/_2\pi$, корень χ_1 и распределение $t_1(x)$ меняются непрерывно, но появляются и новый корень χ_2 вместе с соответствующим стационарным распределением $t_2(x)$; эти два корня и два распределения $t_1(x)$ и $t_2(x)$ меняются непрерывно при переходе k через значение $^5/_2\pi$, когда появляется третий корень χ_3, и т. д. Можно непосредственно проверить, что, независимо от величины k, решение θ_1, s_1, отвечающее распределению толщины $t_1(x)$, имеет значение $\omega={}^1/_2\pi$ наименьшим собственным числом; при $k\geqslant{}^3/_2\pi$ решение θ_2, s_2, порожденное распределением $t_2(x)$, имеет $\omega={}^1/_2\pi$ вторым собственным числом и т. д.

Таким образом, оптимальное распределение толщины $t_1(x)$ выделяется из стационарных распределений путем непосредственного вычисления собственных чисел.

Можно дать альтернативную формулировку исходной задачи с тем, чтобы отбор оптимального решения среди стационарных осуществлялся автоматически, в рамках системы необходимых условий. С этой целью перейдем к двойственной задаче нахождения

$$\max_t \min_\theta \int_0^1 t(\theta')^2 dx \tag{1.6}$$

при дополнительных условиях

$$\int_0^1 \theta^2 dx=1, \quad \int_0^1 t dx=V, \quad t-t_*-u^2=0, \quad \theta(0)=\theta'(1)=0 \tag{1.7}$$

Такой подход, как известно [2], корректен при соответствующей нормировке V; пользуясь выпуклостью интегрального функционала в (1.6) по θ и его линейностью по t, поменяем порядок экстремальных операций и придем к равносильной задаче нахождения

$$\min_\theta \max_t \int_0^1 t(\theta')^2 dx \tag{1.8}$$

с ограничениями (1.7). Условия стационарности имеют вид

$$(\theta')^2+\beta+\nu=0, \qquad \nu u=0$$
$$(t\theta')'+\omega^2\theta=0, \qquad \omega^2=\text{const}, \qquad \beta=\text{const}$$

где ν, ω, β — множители Лагранжа.

Задание объема (1.7) определяет следующую связь между χ, ω и k:

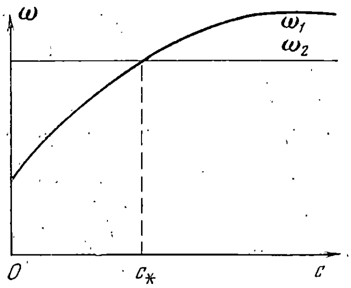
$$\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{1}{k^2}=\frac{\chi^3}{3}, \qquad \omega_0=\frac{\omega}{\sqrt{V}}$$

Последнее равенство вместе с (1.5) позволяет выразить χ и ω через параметр k^2. Если $k_1<k_1={}^3/_2\pi$, то уравнение (1.5) имеет единственный корень χ_1, и собственное число ω определяется однозначно. Для $k_1\leqslant k\leqslant k_2={}^5/_2\pi$ уравнение (1.5) имеет два корня, а значения ω_1 и ω_2 соответствуют первому и второму собственным числам.

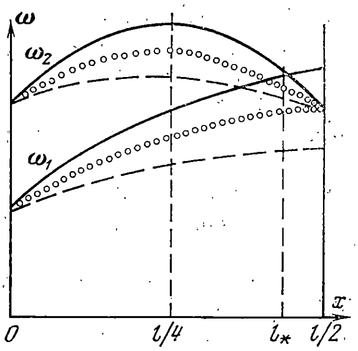
Этот результат можно получить путем исследования необходимого условия Якоби. Например, при $k={}^3/_2\pi$ уравнение (1.5) имеет корень $\chi_2=0$, которому отвечает функция $t_2(x)=\text{const}=V$ и собственное число $\omega={}^3/_2\pi$. Но это число не есть наименьшее для уравнения в вариациях $\delta\theta''+\omega^2\delta\theta=0$, решаемого при граничных условиях $\delta\theta(0)=\delta\theta'(1)=0$; следовательно, условие Якоби нарушено, и функционал (1.8) при $\chi=\chi_2$ не минимален по θ. Напротив, корень $\chi=\chi_1$ приводит к решению $\theta_1(x)$, удовлетворяющему условию Якоби.

2. В работе [3] исследовалось оптимальное распределение защемленной балки с целью максимизации критической величины эйлеровой силы — наименьшего собственного значения соответствующей краевой задачи. Толщина балки считалась ограниченной снизу.

В [3] приведена зависимость максимального значения λ от нижнего предела толщины балки. Оказалось, что при достаточно малой величине этого предела оптимальное собственное число имеет кратность два. Это явление типично для задач оптимизации собственных значений, и для его исследования можно воспользоваться условием Якоби.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим, например, квадратную свободно опертую по контуру пластину со стороной l, подкрепленную двумя ребрами с изгибной жесткостью c. Ребра параллельны одной из сторон пластины и симметричны относительно центра этой стороны. Требуется расположить эти ребра так, чтобы максимизировать основную частоту колебаний пластины.

Пока жесткость ребра не слишком велика по сравнению с цилиндрической жесткостью пластины, основной собственной частоте будет соответствовать симметричная форма прогиба, и, имея в виду повышение частоты этой формы, следует расположить оба ребра в центре пластины, т. е. в узле антисимметричной формы. При таком расположении ребра частота ω_1 симметричной формы будет возрастать с увеличением жесткости c, а частота ω_2 антисимметричной формы не изменится (фиг. 1); для $c>c_*$ частота станет основной. Это находит свое отражение в том, что наряду с центрально расположенным ребром, условия стационарности допускают расположение двух ребер на расстояниях $^1/_4 l$ от противоположных сторон пластины. При $c\leqslant c_*$ условию Якоби удовлетворяет только центральное расположение ребра, а при $c>c_*$ условие Якоби оказывается нарушенным для обоих стационарных расположений ребер.

Эти результаты основаны на молчаливом предположении о том, что минимальное собственное значение в оптимальном режиме является простым. В данной задаче, как и в [3], от этого предположения приходится отказаться. Для получения оптимального решения следует расположить ребра так, чтобы собственные частоты симметричной и антисимметричной форм совпадали $\omega_1=\omega_2$, а это достигается расположением ребер на расстоянии l_* ($^1/_2 l\geqslant l_*\geqslant {}^1/_4 l$) от противоположных сторон квадрата (фиг. 2). Параметр l_* определяется необходимым условием стационарности, построенным в предположении о кратности оптимальной собственной частоты; на этот раз условие Якоби оказывается выполненным. На фиг. 2 показано поведение собственных частот ω_1, ω_2 в зависимости от расположения ребер (отсчет координаты x ведется от края пластины). Сплошные кривые отвечают случаю $c>c_*$, пунктирные — случаю $c<c_*$, а кривые, составленные светлыми точками, соответствуют $c=c_*$. В задаче п. 1 оптимальное собственное значение всегда остается простым, независимо от ограничений на толщину. Задача же, рассмотренная в [3], аналогична рассмотренной в п. 2.

Если количество ребер больше двух, то, в зависимости от их жесткостей, может оказаться, что точка $\omega_1=\omega_2$ не удовлетворяет условию Якоби, так как при соответствующем расположении ребер (числом больше двух) основной станет частота ω_3 и т. д. Это означает, что низшая собственная частота оптимальной пластинки будет иметь бо́льшую кратность. Условие Якоби и здесь позволяет установить оптимальность расположения ребер. Очевидно, что заданному конечному числу ребер отвечает конечная кратность оптимальных собственных чисел.

Наконец, приведем пример задачи, когда кратность собственной частоты увеличивается неограниченно; при этом и само значение собственной частоты стремится к бесконечности. Такой пример дает задача оптимального выбора толщины свободно колеблющейся пластины постоянного объема, если не наложены ограничения на верхний предел изменения толщины. Эта задача может считаться предельной для задачи оптимального расположения ребер, когда жесткость ребер не ограничена и их число беспредельно растет. Но известно [4, 5], что основная частота пластины в этих условиях может быть сделана сколь угодно большой, и оптимальная задача не будет иметь решения.

Разными авторами было показано, что многие задачи оптимального конструирования свободно колеблющихся конструкций минимального объема не имеют решений в отсутствие геометрических ограничений на распределение материала в конструкции. Сюда относятся задачи оптимального проектирования пластины Кирхгофа [4, 5], стержня, совершающего продольные и (или) крутильные колебания [2], и др.

Отсутствие оптимального решения в таких задачах связано с недостатком модели, именно с тем, что рассматривается определенный тип колебаний конструкции (например, колебания пластин только изгибные) и игнорируется возможность появления в оптимальном режиме других типов колебаний. Между тем, именно эти колебания могут обладать существенно более низкими частотами, и в оптимальном режиме достигается совпадение частот колебаний разных типов, т. е. основная частота оказывается кратной. Так, учитывая поперечные колебания стержня наряду с продольными и крутильными, можно регуляризовать соответствующую оптимальную задачу.

Поступила 3 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Armand J.-L., Vitte W. J.* Foundations of aeroelastic optimization and some applications to continuous systems. Dept Aeronaut. and Astronaut. Stanford Univ. Rept, SUDAAR, January, 1970, No. 390.
2. *Olhoff N.* A survey of the optimal Design of vibrating structural elements. Danish Center Appl. Math. and Mech. Rept, No. 102, 1976.
3. *Olhoff N., Rasmussen S. H.* On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns. Danish Center Appl. Math. and Mech. Rept, No. 111, 1976.
4. *Olhoff N.* Optimal desing of vibrating rectangular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1974, vol. 10, No. 1, p. 93–109.
5. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* О применении теоремы Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.