МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1978

УДК 622.011.4; 622.023

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА В ПРОНИЦАЕМОЙ СРЕДЕ

А. Ф. ЗАЗОВСКИЙ, С. В. ПАНЬКО

(Москва, Томск)

Рассматривается задача о нагнетании вязкой фильтрующейся жидкости в пласт через трещину гидроразрыва. В процессе нагнетания жидкость движется по трещине и одновременно отфильтровывается через ее боковые поверхности в окружающие горные породы, содержащие трещину. При этом осредненное по раскрытию давление жидкости в трещине заранее не известно (в отличие от случая «идеальной» трещины, давление в которой считается постоянным) и должно определяться совместно с потоком жидкости через поверхности трещины и их смещением. Такая постановка задачи позволяет учесть гидравлическое сопротивление трещины [1]. Для согласования раскрытия трещины с давлением жидкости в ней и фильтрационным потоком через ее поверхности используется формула Буссинеска для ламинарного движения вязкой жидкости по узкой щели, которая приводит к нелинейному дифференциальному краевому условию на границе трещины.

Полученная таким образом краевая задача для уравнений, описывающих совместные процессы фильтрации и деформации насыщенных пористых сред, в принципе, может быть решена численно [1]. Однако для эффективного применения того или иного численного метода необходимо знать поведение искомых функций вблизи концов трещины, что позволяет искать их в виде произведений некоторых канонических функций на гладкие.

Для отыскания асимптотики давления жидкости в трещине, плотности фильтрационного потока через поверхности трещины и смещений поверхностей трещины ниже рассматривается соответствующая внутренняя задача о плоской полубесконечной трещине в среде, деформирование которой описывается системой уравнений теории консолидации Био [2, 3]; эта задача получается из исходной путем перехода к безразмерным переменным $x'=x/L$, $y'=y/L$, $t'=ct/L^2$ (c – коэффициент консолидации, L – характерный размер трещины) и последующего устремления L к бесконечности. При этом, очевидно, имеет смысл искать только стационарное решение, так как при $L\to\infty$ время $t'\to 0$.

1. Пусть в плоскости переменных x, y вдоль положительной полуоси OX имеется полубесконечная трещина (разрез), $w(x)$ — смещение ее берегов, $\varphi(x)$ и $v(x)$ — осредненные по раскрытию давление и скорость движения жидкости по трещине; тогда по формуле Буссинеска, где μ — вязкость жидкости

$$v(x)=-\frac{1}{3\mu}w^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Пользуясь симметрией задачи относительно оси OX, в соответствии с законом фильтрации Дарси из условия баланса расхода в любом поперечном сечении трещины и расхода жидкости, заканчиваемой в пласт, получим

[1] См., например: *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Зазовский А. Ф.* Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1976, препринт № 78.

$$q(x)=\rho\frac{d}{dx}\left[w^3(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right],\quad q(x)=\frac{\partial p(x,0)}{\partial y},\quad \rho=-\frac{2}{3k}\tag{1.1}$$

где k — проницаемость пористой среды, $p(x, y)$ — поровое давление жидкости.

Условие $\varphi(x)=p(x, 0)$ вместе с (1.1) дает нелинейную связь падения давления в трещине с потоком жидкости через ее поверхности и смещением ее берегов.

Кроме того, на границе трещины и ее продолжении ($x<0$, $y=0$) имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{yy}(x,0)=-p(x,0)\quad (x>0)\\ \frac{\partial p(x,0)}{\partial y}=0,\quad w(x,0)=0\quad (x<0);\quad \sigma_{xy}(x,0)=0\quad (-\infty<x<\infty)\end{gathered}\tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_{yy}(x, y)$, $\sigma_{xy}(x, y)$ — полные (суммарные) нормальное и касательное напряжения, действующие на элемент двухфазной среды; $w(x, y)$ — смещение скелета пористой среды в направлении оси OY.

Наличие нелинейного условия (1.1) не позволяет использовать стандартные методы для непосредственного решения сформулированной задачи, поэтому воспользуемся тем, что в стационарном случае поровое давление несвязанной краевой задачи для системы уравнений теории консолидации Био [2, 3] (например, задачи с идеальной трещиной) не зависит от полей смещений и напряжений и совпадает с решением соответствующей задачи теории фильтрации; будем искать асимптотику давления при $x\to+0$ в виде

$$\varphi(x)=O(1)+O(x^\gamma),\qquad \gamma>0\tag{1.3}$$

Соответствующую асимптотику $w(x)=w(x, 0)$ можно найти из решения краевой задачи с условиями $p(x, 0)=\varphi(x)$ и (1.2). После этого подставим $w(x)$ в условие (1.1) и, решив чисто фильтрационную задачу об определении порового давления $p(x, y)$, определим γ из условия выполнения асимптотического равенства $\varphi(x)\sim p(x, 0)$ при $x\to+0$.

2. Согласно обобщенному представлению Мак-Нейми — Гибсона [4] общего решения системы уравнений теории консолидации Био, будем иметь

$$\begin{gathered}w=-\frac{\partial E}{\partial y}+y\frac{\partial S}{\partial y}+(1-2D)S\\ \frac{\sigma_{yy}}{2\mu}=\nabla^2E-\frac{\partial^2E}{\partial y^2}+y\frac{\partial^2S}{\partial y^2}-D\frac{\partial S}{\partial y}\\ \frac{\sigma_{xy}}{2\mu}=-\frac{\partial^2E}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2S}{\partial x\,\partial y}+(1-D)\frac{\partial S}{\partial x}\\ \frac{p}{2\mu}=\frac{1}{N}\left(-\eta\nabla^2E+\frac{\partial S}{\partial y}\right)\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$D=\frac{\lambda+\alpha^2M+2\mu}{\lambda+\alpha^2M+\mu},\quad \eta=\frac{\lambda+2\mu}{2\alpha^2M(D-1)},\quad N=\frac{\mu}{\alpha M(D-1)}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе скелета пористой среды; α, M — некоторые постоянные [5]; функции E и S удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right)\nabla^2E=0,\quad \nabla^2S=0\tag{2.2}$$

Будем искать асимптотику $w(x)$ при $x \to 0$, отвечающую стационарному распределению давления

$$p(x, y) = O(r^{1/2}), \quad r = (x^2+y^2)^{1/2} \to \infty \tag{2.3}$$

соответствующему промежуточной асимптотике решения задачи о трещине конечной длины; пусть также $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Применим преобразование Фурье по переменной x с параметром ξ к (2.1) и (2.2), где уравнение для функции E заменено бигармоническим уравнением. Возникающие при этом, согласно (2.3), расходящиеся интегралы будем понимать в обобщенном смысле [6]. После несложных выкладок получим уравнение

$$\begin{gathered}\xi w^* + \frac{1}{D}\left(-\frac{1}{2\eta}+1-D\right)(\xi w^* + i\tau^*) = \operatorname{sgn}(\xi)\left(-\frac{N}{2\eta}p^* - \sigma^*\right) \\ w = w(x, 0), \quad 2\mu p = p(x, 0), \quad 2\mu\sigma = \sigma_{yy}(x, 0), \quad 2\mu\tau = \sigma_{xy}(x, 0)\end{gathered} \tag{2.4}$$

(звездочкой обозначены трансформанты Фурье).

Используя краевые условия (1.2) и вводя новые обозначения

$$\tau_+^* = \tau_-^* = w_-^* = 0, \qquad \sigma_+^* = -p_+^*$$

$$f_+^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x) e^{i\xi x}dx, \quad f_-^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\xi x}dx$$

преобразуем (2.4) к виду

$$\begin{gathered}A\xi w_+^* = \operatorname{sgn}(\xi)(Bp_+^* + Cp_-^* - \sigma_-^*) \\ A = {}^1/_2(2\eta - 1)/(\eta D), \quad B = {}^1/_2(2\eta - N)/\eta, \quad C = {}^1/_2 N/\eta\end{gathered} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) является уравнением Винера — Хопфа [7]; для приведения его к стандартному виду представим $\operatorname{sgn}(\xi)$ в виде отношения $\operatorname{sgn}(\xi) = \sqrt{-\xi}/\sqrt{+\xi}$, где под $\sqrt{+\xi}$ и $\sqrt{-\xi}$ понимаются значения $\sqrt{\xi}$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной ξ (разрез для корня проведен вдоль отрицательной действительной полуоси), а $\sqrt{-\xi}\, p_+^*$ в виде разности

$$\sqrt{-\xi}\, p_+^* = D_-(\xi) - D_+(\xi), \quad \mathrm{D}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{-s}\, p_+^*(s)}{s-\xi}ds \tag{2.6}$$

Умножим затем обе части уравнения (2.5) на $\xi\sqrt{+\xi}$. В результате получим уравнение

$$A\xi^2\sqrt{+\xi}w_+^* + B\xi \mathrm{D}_+ = B\xi\mathrm{D}_- + \xi\sqrt{-\xi}(Cp_-^* - \sigma_-^*) \tag{2.7}$$

левая и правая части которого аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и совпадают на действительной оси; поэтому их можно считать аналитическими продолжениями в соответствующие полуплоскости функции $\Psi(\xi)$, аналитической во всей плоскости переменной ξ. Остается выяснить поведение $\Psi(\xi)$ в бесконечно удаленной точке.

В силу (1.3) $p_+^*(\xi) = O(|\xi|^{-1})$ при $|\xi| \to \infty$, следовательно, $\sqrt{-\xi}p_+^*(\xi) = O(|\xi|^{-1/2})$ при $|\xi| \to \infty$ и, согласно (2.6), $\mathrm{D}_+(\xi) = O(|\xi|^{-1})$ при $|\xi| \to \infty$. Аналогично из условия $w(+0) = 0$ следует, что $w_+^*(\xi) = O(|\xi|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $|\xi| \to \infty$ и $\xi^2\sqrt{+\xi}w_+^*(\xi) = O(|\xi|^{3/2-\varepsilon})$ при $|\xi| \to \infty$, т. е. левая часть уравнения (2.7) растет на бесконечности не быстрее $|\xi|^{3/2}$. По теореме Лиувилля $\Psi(\xi)=F+G\xi$, где F и G — константы, которые могут быть определены из условий

$$F=\lim_{\xi\to 0}[A\xi^2\gamma_+\xi w_+^*(\xi)+B\xi D_+(\xi)],\quad G=\lim_{\xi\to 0}[A\xi\gamma_+\xi w_+^*(\xi)+BD_+(\xi)]$$

Очевидно, что $G\neq 0$, поэтому $w_+^*(\xi)=O(|\xi|^{-3/2})$ при $|\xi|\to\infty$ и, таким образом

$$w(x)=O(x^{1/2}) \text{ при } x\to+0 \tag{2.8}$$

независимо от значения γ, т. е. точно так же, как в соответствующей задаче теории упругости.

3. Далее рассмотрим краевую задачу теории фильтрации относительно порового давления $p(x, y)$ при условии, что $w(x)$ известно и удовлетворяет (2.8).

Перейдем к полярным координатам r, θ и будем искать асимптотику решения уравнения Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}=0 \tag{3.1}$$

в полуплоскости $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, на границе которой согласно (1.1), (1.2) и (2.8)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p(r,\pi)}{\partial\theta}=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial p(r,0)}{\partial\theta}=\rho\frac{d}{dr}\left[r^{3/2}\frac{\partial p(r,0)}{\partial r}\right] \tag{3.2}$$

В данном случае искомая функция $p(x, y)$ определяется только с точностью до постоянного множителя и аддитивной постоянной. В исходной связанной задаче такая неопределенность не возникает благодаря наличию двух условий нормировки: значения $\varphi(x)$ при $x\to\infty$ и $p(x, y)$ при $y\to\infty$.

Представим искомую функцию в виде суммы двух функций

$$p(r,\theta)=p_0(r,\theta)+p_1(r,\theta) \tag{3.3}$$

одна из которых, $p_0(r,\theta)$, удовлетворяет условию (2.3), а другая — $p_1(r,\theta)\to 0$ при $r\to\infty$. Пусть $p_0(r,\theta)=r^{1/2}\sin{}^1/_2\theta$, тогда $p_1(r,\theta)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta p_1=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial p_1(r,\pi)}{\partial\theta}=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial p_1(r,0)}{\partial\theta}+\frac{1}{2}r^{1/2}=\rho\frac{d}{dr}\left[r^{3/2}\frac{\partial p_1(r,0)}{\partial r}\right] \tag{3.4}$$

Воспользуемся обобщенным преобразованием Меллина [8] по переменной r:

$$P_1(s,\theta)=\int_0^\infty r^{s-1}p_1(r,\theta)\,dr \tag{3.5}$$

Так как $p_1(r,\theta)$ ограничена при $r\to 0$ и $p_1(r,\theta)\to 0$ при $r\to\infty$, то интеграл (3.5) сходится в обычном смысле в некоторой полосе $0<\operatorname{Re}s<\delta$, т. е. является обычным преобразованием Меллина функции $p_1(r,\theta)$.

Применяя (3.5) к (3.4), получим

$$\begin{gathered}P_1(s,\theta)=A(s)\sin s\theta+B(s)\cos s\theta\\ A(s)\cos\pi s=B(s)\sin\pi s,\qquad A(s)=\rho(s+{}^1/_2)B(s+{}^1/_2)\end{gathered} \tag{3.6}$$

Обозначим $B(s)\sin\pi s=\Phi(s)$; тогда будем иметь

$$\Phi(s)=\rho(s+{}^1/_2)\,\Phi(s+{}^1/_2) \tag{3.7}$$

Решение функционального уравнения (3.7) строится следующим образом. Представим $\Phi(s)$ в виде

$$\Phi(s)=\Psi(s)\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{as+b}dt \tag{3.8}$$

где a и b — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Интегрируя (3.8) по частям, получим

$$\Phi(s)=\Psi(s)\left[-t^{is+b}e^{-t}\Big|_0^\infty+(as+b)\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{as+b-1}dt\right]$$

Для того чтобы удовлетворить (3.7), следует положить $a=-2$, $b=-1$; при этом $\Psi(s)$ должна удовлетворять уравнению $2\Psi(s)=-\rho\Psi(s+{}^1/_2)$.

Пусть $\Psi(s)=e^{ds}$, тогда $\Psi(s)=e^{-d/2}\Psi(s+{}^1/_2)$ и, следовательно, $d=-2\ln(-{}^1/_2\rho)$, т. е. $\Psi(s)=(-2/\rho)^{2s}$. В результате будем иметь

$$\Phi(s)=\left(-\frac{2}{\rho}\right)^{2s}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{-2s-1}dt=\left(-\frac{2}{\rho}\right)^{2s}\Gamma(-2s) \tag{3.9}$$

Из (3.6) по формуле обращения преобразования Меллина находим

$$p_1(r,0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T(s)r^{-s}ds,\quad T(s)=\frac{\Phi(s)}{\sin\pi s} \tag{3.10}$$

где $0<\sigma<{}^1/_2$, так как $T(s)$ имеет полюс в точке $s={}^1/_2$.

Исследуем поведение решения (3.9), (3.10) при $r\to0$. Смещая прямую, по которой ведется интегрирование, влево и пользуясь теоремой о вычетах, получим выражение для $p_1(r,0)$ в виде суммы ряда по вычетам, сходящегося при $r<1$. Так как $T(s)$ имеет двойной полюс при $s=0$ и простые полюсы в точках $s=-1,-2,-3,\ldots$, то

$$p_1(r,0)=a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots \tag{3.11}$$

На основании (3.2), (3.3) и (3.11) заключаем, что $\gamma=1$ и

$$\varphi(x)=O(1)+O(x),\qquad q(x)=O(x^{1/2})\quad\text{при } x\to+0 \tag{3.12}$$

Таким образом, в отличие от решения задачи теории фильтрации с идеальной трещиной, вблизи концов которой плотность потока имеет корневую особенность ($q(x)=O(x^{-1/2})$ при $x\to+0$), учет гидравлического сопротивления трещины с помощью формулы Буссинеска приводит к тому, что $q(x)$ оказывается ограниченной функцией при $x\to+0$, принадлежащей к классу (3.12).

Полученные результаты, очевидно, могут быть использованы при численном решении и осесимметричной задачи о нагнетании жидкости в пласт через плоскую круговую трещину.

Авторы признательны В. М. Ентову за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Поступила 28 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желтов Ю. П.* Деформации горных пород. М., «Недра», 1966.
2. *Biot M. A.* General theory of three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys., 1941, vol. 12, No. 2, p. 155–165.
3. *Biot M. A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation of a porous material. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 1, p. 91–96.
4. *Керчман В. И.* Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
5. *Biot M. A. Willis D. G.* The elastic coefficients of the theory of consolidation. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 4, p. 594–601.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Изд. 2. М., Физматгиз, 1959.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Земанян А. Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М., «Наука», 1974.