

ТЕРМОУПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА С ТРЕЩИНАМИ  
ПРИ РАЗОГРЕВЕ, ВЫЗВАННОМ ПРОПУСКАНИЕМ ТОКА  
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ТРЕЩИНАМ

Р. Л. САЛГАНИК

(Москва)

Рассматривается задача о бесконечном теле с дискообразной трещиной, находящейся в однородном вдаль от нее поле электрического тока, перпендикулярном плоскости трещины. Предполагается, что механическое действие тока связано только с разогревом материала вследствие омических потерь, приводящим к возникновению термоупругих напряжений. Среда внутри трещины предполагается непроводящей.

Задача решается в квазистатическом приближении в предположении, что все характеристики материала являются константами и что создаваемое трещиной возмущение поля температур описывается уравнением стационарной теплопроводности. Отметим, что это предположение оправдано и в том случае, когда суммарное поле температур медленно меняется по сравнению со временем прогрева области порядка размера трещины, а также если ток медленно меняется или является быстро осциллирующим с фиксированными или медленно меняющимися параметрами при условии, что период осцилляций тока существенно меньше указанного времени. Для такого быстро осциллирующего тока должно использоваться среднее за период тепловыделение.

Показано, что в результате описанного механического действия тока трещина раскрывается, так что на ее продолжении возникают растягивающие напряжения. Найден соответствующий коэффициент интенсивности напряжений.

Для тела, в котором имеется много не взаимодействующих параллельных дискообразных трещин, найден вклад раскрытия этих трещин, вызванного указанным эффектом, в суммарную деформацию материала (эффективная деформация).

**1. Основные соотношения.** Предположим, что задано распределение отклонения температуры  $\vartheta$  от некоторой равновесной. Для тензора термоупругих напряжений  $\sigma_{ij}$  в декартовой системе координат (с использованием правила суммирования по повторяющимся индексам) имеем [1]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \beta \vartheta \delta_{ij} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Здесь  $u_i$  — вектор смещений,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\beta$  — линейный коэффициент температурного расширения. Подстановка (1.1) в уравнения равновесия дает

$$\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i} + (1-2\nu) \nabla^2 u_i = 2(1+\nu) \beta \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

Искомое решение уравнений (1.2) представляется в виде суммы некоторого частного, находимого без учета граничных условий на поверхностях трещины и соответствующего решению уравнений теории упругости (получающихся, если правую часть (1.2) заменить нулем).

Будем предполагать поверхности трещины свободными от напряжений. Тогда соответствующее решение уравнений теории упругости должно быть таким, чтобы получающиеся в нем напряжения на поверхности трещины равнялись с обратным знаком напряжениям в частном решении на том месте, где находится трещина. Вследствие симметрии распределения температуры относительно плоскости трещины  $x_3 = z = 0$  скачок смещения на трещине будет определяться чисто нормальными напряжениями  $\sigma_{zz}^*$  (звездочкой отмечается частное решение).

Таким образом, сначала нужно найти частное решение. Это можно сделать, воспользовавшись приемом Гудьера [1]. Полагая  $u_i^* = \partial\psi / \partial x_i$ , видим, что уравнения (1.2) будут удовлетворены, если  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi = m\vartheta, \quad m = \beta(1+\nu)(1-\nu)^{-1} \quad (1.3)$$

Будем искать решение этого уравнения для осесимметричного распределения  $\vartheta$ , стремящегося на бесконечности к нулю. Введем цилиндрическую систему координат с началом в центре трещины (ось  $z$  перпендикулярна плоскости трещины). В этой системе координат решение уравнения (1.3) удобно представить при помощи преобразования Ханкеля [2].

Этим способом из (1.3) находим

$$\psi(r, z) = -\frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I(|z'|, r, r') \vartheta(r', z-z') r' dr' dz' \quad (1.4)$$

$$I(z, r, r') = I(z, r', r) = \int_0^{\infty} e^{-qz} J_0(qr) J_0(qr') dq$$

Здесь  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка,  $r$  — расстояние точки от оси  $z$ . При помощи (1.1) и соотношения  $u_i^* = \partial\psi / \partial x_i$  находим

$$\sigma_{zz}^* = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - m\vartheta \right] \quad (1.5)$$

Теперь надо найти указанное выше решение уравнений теории упругости; в нем поверхности трещины загружены напряжениями  $-\sigma_{zz}^*$ , а вдали от трещины напряжения стремятся к нулю.

Решение задачи теории упругости для тела с дискообразной трещиной, поверхности которой загружены произвольно распределенными нормальными напряжениями, известно [2]; следует только в нем положить  $\sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^* = -p$ . Смещение  $w = u_3$  верхнего берега трещины при этом равно [2]:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)a}{\pi E} \int_0^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{\alpha p(\alpha\mu a) d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (1.6)$$

Здесь  $a$  — радиус трещины. При нахождении главного члена асимптотики  $w$  вблизи контура трещины можно во внутреннем интеграле сразу положить  $\mu=1$ . После этого интегрирование по  $\mu$  выполняется независимо и при  $\rho \rightarrow 1$  интеграл от  $(\mu^2 - \rho^2)^{1/2}$  по  $\mu$  дает  $[2(1-\rho)]^{1/2}$ .

Сравнивая окончательный результат с выражением для главного члена асимптотики нормального смещения у контура трещины  $w = 4(1-\nu^2)E^{-1}Ns^{1/2}$ , где  $s$  — расстояние точки от контура трещины,  $N$  — ко-

ээффициент интенсивности напряжений, получаем известную формулу для  $N$  [3]:

$$N = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{a} \right)^{1/2} \int_0^a \frac{rp(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (1.7)$$

Интеграл  $V$  от скачка нормальной компоненты смещения по поверхности трещины, очевидно, равен

$$V = 4\pi \int_0^a wr dr \quad (1.8)$$

Подставляя сюда  $w$  из (1.6), меняя в получившемся интеграле порядок интегрирования по  $\rho$  и  $\mu$  и вычисля получившийся при этом интеграл по  $\rho$ , находим

$$V = \frac{16(1-\nu^2)a^3}{E} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\alpha p(\alpha\mu a) d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \mu^2 d\mu \quad (1.9)$$

Здесь в интеграле по  $\alpha$  производим замену переменной интегрирования по формуле  $\alpha\mu a = r$ , после чего внутреннее интегрирование выполняем по  $\mu$ . В результате находим

$$V = \frac{16(1-\nu^2)}{E} \int_0^a p(r) \sqrt{a^2 - r^2} r dr \quad (1.10)$$

**2. Выражение для коэффициента интенсивности напряжений через температуру.** Подставляя (1.4) в (1.5) и далее полученный результат при  $z=0$  в (1.7), находим

$$N = - \frac{Em}{\pi(1+\nu)} \left( \frac{2}{a} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 \Phi(r', z)}{\partial z^2} \int_0^a \frac{rI(z, r, r') dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} r' dr' dz + \int_0^a \frac{r\Phi(r, 0) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь учтена четность  $\Phi$  по  $z$  и интегрирование приведено к полупространству  $z > 0$ .

Используя формулу 11.26 из [4], находим

$$\int_0^a \frac{rI(z, r, r') dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int_0^\infty e^{-az} J_0(qr') \frac{\sin aq}{q} dq = J(r', z) \quad (2.2)$$

Далее, из (2.1) интегрированием по частям получим

$$N = - \frac{Em}{\pi(1+\nu)} \left( \frac{2}{a} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^\infty \Phi(r, 0) \left( \frac{\partial J}{\partial z} \right)_{z=0} r dr + \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(r, z) \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} r dr dz + \int_0^a \frac{r\Phi(r, 0) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} \quad (2.3)$$

Здесь учтено, что вследствие четности  $\vartheta$  по  $z$  имеем  $\partial\vartheta/\partial z=0$  при  $z=0$ . Выражение (2.3) справедливо также, когда  $\partial\vartheta/\partial z$  изменяется скачком при переходе через трещину. При этом четность  $\vartheta$  по  $z$  приводит к тому, что по-прежнему будут лишь нормальные к трещине скачок смещений и коэффициент интенсивности напряжений.

Из (2.2) с использованием формулы 9.297 из [4] находим

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \text{Im} \int_0^{\infty} e^{-q(z+ia)} J_0(qr) dq = \text{Im} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+ia)^2}} \quad (2.4)$$

Из той же формулы [4] следует, что

$$F = \int_0^{\infty} e^{-az} \cos aq J_0(qr) dq = \text{Re} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+ia)^2}} \quad (2.5)$$

Из (2.4) имеем

$$\left( \frac{\partial J}{\partial z} \right)_{z=0} = \{ -(a^2 - r^2)^{-1/2}, r < a; 0, r > a \} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) и выражение для  $\partial^2 J / \partial z^2$  (получаемое из (2.4)) в (2.3), после преобразований найдем

$$N = \frac{Em}{\pi(1+\nu)} \left( \frac{2}{a} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \vartheta(r, z) \text{Im} \frac{z+ia}{[(z+ia)^2 + r^2]^{1/2}} r dr dz \quad (2.7)$$

Здесь в двойном интеграле удобно перейти к эллипсоидальным координатам

$$\sqrt{(z+ia)^2 + r^2} = \sqrt{\xi + i\sqrt{|\eta|}} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \xi &= 1/2 \{ z^2 + r^2 - a^2 + [(z^2 + r^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2]^{1/2} \} \\ \eta &= 1/2 \{ z^2 + r^2 - a^2 - [(z^2 + r^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2]^{1/2} \} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поверхности постоянных  $\xi$  и  $\eta$  представляют собой эллипсоиды и однополостные гиперболоиды вращения соответственно, так что их пересечение с плоскостями, проходящими через ось  $z$ , образует сетку криволинейных прямоугольных координат; трещине соответствует вырожденный эллипсоид  $\xi=0$ .

Выражения  $r$  и  $z$  (в верхнем полупространстве) через  $\xi$  и  $\eta$  имеют вид

$$r = [(\xi + a^2)(\eta + a^2)]^{1/2} a^{-1}, \quad z = (\xi |\eta|)^{1/2} a^{-1} \quad (2.10)$$

При переходе к интегрированию по  $\xi$  и  $|\eta|$  следует  $r dr dz$  заменить на  $1/4 (\xi + |\eta|) (\xi |\eta|)^{-1/2} a^{-1} d\xi d|\eta|$ , причем интегрирование по  $\xi$  проводить в пределах от 0 до  $\infty$ , по  $|\eta|$  — в пределах от 0 до  $a^2$ .

Учитывая также, что (с использованием (2.10))

$$\frac{z+ia}{[(z+ia)^2 + r^2]^{1/2}} = \frac{\sqrt{\xi |\eta|} + ia^2}{(\sqrt{\xi} + i\sqrt{|\eta|})^2 a} \quad (2.11)$$

из (2.8) и (2.11) находим

$$N = \frac{Em}{\pi(1+\nu)} \left( \frac{2}{a} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^{a^2} \vartheta \frac{\xi(a^2 - 3|\eta|) + |\eta|(|\eta| - 3a^2)}{\sqrt{|\eta|} (\xi + |\eta|)^2} d\xi d|\eta| \quad (2.12)$$

Здесь  $\Phi$  в двойном интеграле должно быть представлено как функция  $\xi$  и  $|\eta|$ . Это и есть искомое выражение для  $N$  через  $\Phi$ . Отметим, что множитель при  $\Phi$  имеет особенность при  $\xi = |\eta| = 0$  (контур трещины) типа  $-3/2$ , интегрируемую в плоскости.

**3. Выражение для объема трещины через температуру.** Подставляя в (1.10)  $p = \sigma_{zz}^*$ , используя (1.5) и выполняя интегрирование по частям с учетом четности  $\Phi$  по  $z$ , находим

$$V = -16(1-\nu)m \left[ \int_0^{\infty} \Phi(r, 0) \left( \frac{\partial J_*}{\partial z} \right)_{z=0} r dr + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi \frac{\partial^2 J_*}{\partial z^2} r dr dz + \int_0^a \Phi(r, 0) \sqrt{a^2 - r^2} r dr \right] \quad (3.1)$$

$$J_*(r, z) = \int_0^{\infty} \int_0^a e^{-qz} J_0(qr) J_0(r'q) \sqrt{a^2 - r'^2} r' dr' \quad (3.2)$$

Здесь член с  $(\partial\Phi/\partial z)_{z=0}$  исчезает по тем же причинам, что и в п.2. Легко видеть, что  $\partial J_*/\partial a = aJ$ . Подставляя сюда выражение  $J$  из (2.2) и интегрируя по  $a$  в пределах от 0 до  $a$  с учетом того, что  $J_* = 0$  при  $a = 0$ , находим

$$J_*(r, z) = - \int_0^{\infty} e^{-qz} J_0(qr) \frac{1}{q} \frac{d}{dq} \left( \frac{\sin aq}{q} \right) dq \quad (3.3)$$

Осталось найти выражения для  $(\partial J_*/\partial z)_{z=0}$ ,  $\partial^2 J_*/\partial z^2$ . Начнем с последнего. Из (3.3) имеем

$$\partial^2 J_*/\partial z^2 = J - aF \quad (3.4)$$

Из (2.5) с учетом (2.9), (2.10) находим, что  $F = \xi^{1/2}(\xi + |\eta|)^{-1}$ . Используя (2.5), с учетом (2.2) находим также

$$J = \int_0^a F da = \text{Im} \ln \frac{z + ia + \sqrt{r^2 + (z + ia)^2}}{z + \sqrt{r^2 + z^2}} = \text{arctg}(a\xi^{-1/2}) \quad (3.5)$$

Здесь использованы формулы (2.9) и вторая формула (2.11). Таким образом, из (3.4) получим

$$\frac{\partial^2 J_*}{\partial z^2} = \text{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a\sqrt{\xi}}{\xi + |\eta|} \quad (3.6)$$

Интегрируя (3.4) по  $z$  с использованием (2.5) и первого равенства (3.5), имеем

$$\frac{\partial J_*}{\partial z} = \text{Re} \{ -iz \ln [ (z + ia) + \sqrt{r^2 + (z + ia)^2} ] + i\sqrt{r^2 + (z + ia)^2} \} \quad (3.7)$$

При интегрировании учтено условие обращения в нуль  $\partial J_*/\partial z$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Отсюда с учетом (2.9) и второй формулы (2.11) находим

$$\frac{\partial J_*}{\partial z} = \frac{\sqrt{\xi}|\eta|}{a} \text{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \sqrt{|\eta|} \quad (3.8)$$

При  $z=0$ , очевидно,  $\xi=0$ ,  $\eta=r^2-a^2$ , если  $r < a$ , и  $\xi=r^2-a^2$ ,  $\eta=0$ , если  $r > a$ . Поэтому

$$(\partial J_*/\partial z)_{z=0} = \{-\sqrt{a^2-r^2}, r < a; 0, r > a\} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.6), (3.9) в (3.1) и переходя аналогично тому, как это было сделано в п.2, к интегрированию в двойном интеграле по переменным  $\xi$  и  $|\eta|$ , получаем искомое выражение для  $V$  через  $\vartheta$ :

$$V = -\frac{4}{a} (1-\nu) m \int_0^{\infty} \int_0^{a^2} \vartheta \left[ \frac{\xi+|\eta|}{\sqrt{\xi}|\eta|} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{|\eta|}} \right] d|\eta| d\xi \quad (3.10)$$

Чтобы можно было вычислять  $N$  и  $V$  по формулам (2.12) и (3.10), распределение температуры  $\vartheta$  должно на бесконечности убывать со скоростью, достаточной для обеспечения сходимости интегралов.

**4. Выражение для электрического потенциала и тепловыделения.** Пренебрегая нестационарными явлениями в распространении тока, имеем [5]:

$$\mathbf{G} = -\nabla\varphi, \quad \nabla\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \gamma\mathbf{G} \quad (4.1)$$

Здесь  $\mathbf{G}$  и  $\varphi$  — напряженность и потенциал электрического поля,  $j$  — плотность тока,  $\gamma$  — проводимость. Условия применимости этих уравнений для переменных токов сформулированы в [5]. Подчеркнем, что размеры трещины при этом должны быть существенно меньше толщины скин-слоя.

Из (4.1) следует, что  $\nabla^2\varphi = 0$ . Считая, что трещина не пропускает ток, имеем на ее поверхности условие  $\partial\varphi/\partial z = 0$ . Вдали от трещины поле однородно и параллельно оси  $z$ , т. е.  $\varphi \approx -G_\infty z$  при  $z \rightarrow \infty$ , где  $G_\infty$  — величина напряженности на больших расстояниях от трещины.

Как видно из п. 2–3,  $\varphi$  удобно искать в эллипсоидальных координатах. Необходимые для этого формулы имеются в [5] (§ 4), где приведено решение задачи электростатики о проводящем эллипсоиде, находящемся в однородном вдали от него электрическом поле (следует учесть известную математическую аналогию между задачей электростатики и задачей электропроводности).

Пользуясь этими формулами, в которых следует перейти к осесимметричному случаю и устремить к нулю наименьшую из осей эллипсоида, находим, что потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий сформулированным выше требованиям, дается выражением

$$\varphi = -\frac{2G_\infty}{\pi} \sqrt{|\eta|} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\xi}}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\xi}}{a} \right] \quad (4.2)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  связаны с цилиндрическими координатами формулами (2.10).

Отсюда видно, что при  $z=0$  вне контура трещины потенциал постоянен. Значение этой постоянной в данном решении выбрано равным нулю, что удобно для дальнейших вычислений, но, как известно, не влияет на физические результаты.

Джоулево тепло  $Q$ , выделяющееся вокруг трещины в единице объема материала в единицу времени, определяется формулой

$$Q = \mathbf{j}\mathbf{G} = \gamma(\nabla\varphi)^2 \quad (4.3)$$

в которую вместо  $\varphi$  в данном случае следует подставить выражение (4.1). Если ток переменный с периодом, достаточно малым по сравнению с вре-

менем установления температуры в области размером порядка  $a$ , то величину в правой части (4.2) следует усреднить по периоду.

5. Распределение температуры вокруг трещины. Обозначим через  $\lambda$  коэффициент теплопроводности, через  $\rho$  плотность материала, через  $c$  его удельную теплоемкость. Принимая, что разогрев вызван тепловыделением  $Q$ , определяемым (4.3), запишем уравнение теплопроводности в виде

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \vartheta + \gamma (\nabla \varphi)^2 \quad (5.1)$$

где  $\vartheta$  — температура,  $\varphi$  определяется выражением (4.1).

Представим  $\vartheta$  как  $\vartheta = \vartheta_h + \vartheta_n$ , где  $\vartheta_h$  — температура в отсутствие трещины. Имеем

$$\rho c \frac{\partial \vartheta_h}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \vartheta_h + \gamma (\nabla \varphi_h)^2, \quad \varphi_h = -G_\infty z \quad (5.2)$$

Вычитая (5.2) из (5.1), находим (пренебрегая с учетом оговоренных выше условий членом  $\partial \vartheta_n / \partial t$ )

$$\lambda \nabla^2 \vartheta_n + \gamma [(\nabla \varphi)^2 - (\nabla \varphi_h)^2] = 0 \quad (5.3)$$

Возмущение  $\vartheta_n$  должно стремиться к нулю при удалении от трещины; условия на границах тела имеют значения только при нахождении  $\vartheta_h$ . Потребуем, чтобы на поверхностях трещины было  $\partial \vartheta / \partial z = 0$  (отсутствие теплоотвода через среду, заполняющую трещину). Считая  $\partial \vartheta_h / \partial z = 0$ , имеем, что на поверхностях трещины  $\partial \vartheta_n / \partial z = 0$ .

Условие  $\partial \vartheta_n / \partial z = 0$  заведомо справедливо для тела в виде бесконечного цилиндра с образующими, параллельными оси  $z$  и однородными по  $z$  граничными условиями. Приближенно оно верно и в других случаях при предполагаемой здесь малости размера трещины, поскольку можно при нахождении возмущения от трещины пренебречь изменением  $\vartheta_h$  на расстояниях порядка размера трещины. Из выражений для  $\varphi$  и  $\varphi_h$  очевидна четность  $\vartheta_n$  по  $z$ .

Таким образом, достаточно рассмотреть задачу при  $z > 0$ , причем из только что изложенного следует, что  $\partial \vartheta_n / \partial z = 0$  всюду при  $z = 0$ .

Заметим, что  $\frac{1}{2} \nabla^2 \varphi^2 = \nabla (\varphi \nabla \varphi) = (\nabla \varphi)^2$ , так как  $\nabla^2 \varphi = 0$ , и аналогично для  $\varphi_h$ . С учетом этого из (5.3) находим

$$\nabla^2 \chi = 0, \quad \chi = \lambda \vartheta_n + \frac{1}{2} \gamma (\varphi^2 - \varphi_h^2) \quad (5.4)$$

Поскольку при  $z = 0$  вне контура трещины  $\varphi = 0$ , а внутри  $-\partial \varphi / \partial z = 0$ , то  $\partial \varphi^2 / \partial z = 0$  всюду в плоскости  $z = 0$ ; то же имеет место, очевидно, и для  $\varphi_h$ . Отсюда с учетом того, что и  $\partial \vartheta_n / \partial z = 0$  при  $z = 0$ , находим  $\partial \chi / \partial z = 0$  при  $z = 0$ .

Рассмотрим поведение  $\varphi^2 - \varphi_h^2$  на бесконечности. Из (4.1) с учетом (2.10) следует, что на больших расстояниях от трещины

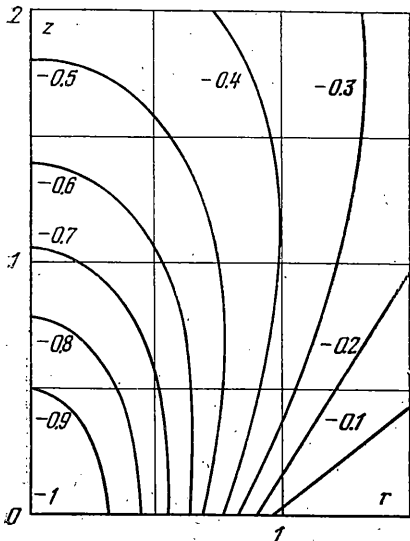
$$\varphi = -G_\infty z \left[ 1 + \frac{2a^3}{3\pi R^3} + \dots \right], \quad R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (5.5)$$

Отсюда, используя равенство  $\varphi_h = -G_\infty z$ , находим, что при  $R \rightarrow \infty$

$$\frac{\gamma}{2\lambda} (\varphi^2 - \varphi_h^2) = \frac{2j_\infty^2 a^3 z^2}{3\pi \gamma \lambda R^3}, \quad j_\infty = \gamma G_\infty \quad (5.6)$$

т. е. второе слагаемое в  $\chi$  стремится на бесконечности к нулю. По условию  $\Phi_n$  также должно стремиться на бесконечности к нулю.

Таким образом,  $\chi$  удовлетворяет в верхнем полупространстве уравнению Лапласа, стремится к нулю на бесконечности и  $\partial\chi/\partial z$  обращается в нуль при  $z=0$ . Отсюда следует, что  $\chi=0$  во всем полупространстве и поэтому (см. (5.4))



$$\Phi_n = -\frac{\gamma}{2\lambda} (\Phi^2 - \Phi_n^2) =$$

$$= -\Phi_{n0} \frac{|\eta|}{a^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{\sqrt{\xi}}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\xi}}{a} \right]^2 - \frac{\pi^2 \xi}{4a^2} \right\} \quad (5.7)$$

$$\Phi_{n0} = 2\pi^{-2} j_{\infty}^2 a^2 (\gamma\lambda)^{-1}$$

На больших расстояниях от трещины  $\Phi_n$  выражается правой частью (5.6), взятой с обратным знаком. На фигуре в безразмерных переменных представлена карта изотерм при  $z \geq 0$ , построенная по уравнению (5.8) (числа у кривых — значения  $\Phi_n/\Phi_{n0}$ , радиус трещины принят равным единице). Наибольшее понижение температуры, равное  $\Phi_{n0}$ , имеет место в центре трещины.

Следует отметить, что плотность тока при подходе к контуру трещины (в чем нетрудно убедиться, используя (4.2)) безгранично возрастает как  $s^{-1/2}$ ;  $s$  — расстояние до контура трещины. Следовательно, тепловыделение при подходе к контуру трещины безгранично возрастает как  $s^{-1}$ .

При быстром включении тока его распределение и, следовательно, тепловыделение устанавливаются практически сразу; разогрев же происходит постепенно. Из-за большой величины тепловыделения у контура трещины разогрев прежде всего произойдет здесь. При достаточной величине тока трещина по этой причине может начать закрываться. При больших значениях начального тока температура на контуре трещины может оказаться достаточной для того, чтобы смыкание трещины сопровождалось ее залечиванием при сравнительно небольших значениях температуры вдали от контура трещины.

Однако, если возрастание тока происходит столь быстро не до столь больших значений, а далее его изменение удовлетворяет указанным выше ограничениям, то будет реализовываться рассматриваемое здесь распределение. При этом уже никакого повышения температуры на контуре трещины не будет, и вообще вне трещины в ее плоскости температура остается невозмущенной (см. фигуру).

Время установления распределения температуры (5.7) вокруг трещины относится ко времени установления температуры во всем теле как  $(a/L)^2$ , где  $L$  — характерный размер тела.

В меру малости этого отношения можно пользоваться решением (5.7) и вычисленным по нему термоупругим полем вблизи трещины и на ней самой в случае нестационарного распределения температуры в теле. На расстояниях от трещины, значительно больших чем  $a$ , этого уже делать нельзя. Возмущение температуры на таких расстояниях убывает в нестационарном случае с удалением от трещины гораздо быстрее, чем это определяется (5.6); быстрее поэтому убывает и соответствующее термоупругое поле. В дальнейшем ограничимся рассмотрением описанного нестационарного случая.

Предположим, что прошло небольшое время с начала процесса, так что происходит равномерный по объему образца разогрев. При этом

$$\Phi_h = \Phi_i + \frac{\kappa}{\gamma\lambda} \int_0^t j_{\infty}^2(t) dt, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (5.8)$$

Здесь  $\Phi_i$  — начальная температура. Считая для простоты ток постоянным, из (5.7) и (5.8) имеем

$$\Phi_{n0}/(\Phi_h - \Phi_i) = (2/\pi^2) (a^2/\kappa t)$$



Поскольку для возможности использования квазистационарного решения необходимо, чтобы было  $a^2 \ll \kappa t$ , видим, что наибольшая величина понижения температуры, вызванного внесением трещины, с которым связан рассматриваемый ниже термоупругий эффект, должна быть существенно меньше повышения температуры при однородном прогреве. Это повышение, в свою очередь, для того чтобы можно было считать деформирование термоупругим, не должно быть очень большим. Отсюда получается ограничение на величину рассматриваемого термоупругого эффекта.

В рассматриваемом примере потоки тепла определяются градиентом  $\varphi_h$  и, как видно из фигуры, направлены к трещине. Эти потоки возникают в связи с уменьшением здесь тепловыделения, но, как видно из решения, не компенсируют этого уменьшения полностью, и температура в области, примыкающей к центру трещины, оказывается пониженной. Это приводит к возникновению в этой области растягивающих напряжений, стремящихся раскрыть трещину.

Вне растянутой области в плоскости  $z=0$  возникают сжимающие напряжения, стремящиеся закрыть трещину.

Как будет показано в п. 6, эффект раскрытия сильнее: величины  $N$  и  $V$  оказываются положительными. Таким образом, у концов трещины возникают растягивающие напряжения, которые при соответствующих условиях могут вызывать рост трещины.

**6. Выражения коэффициента интенсивности и изменения объема трещины через плотность тока.** Очевидно, в силу линейности задачи, чтобы найти  $N$  и  $V$  в поле термоупругих напряжений, вызванных распределением  $\varphi$ , достаточно отдельно найти раскрытие от распределений  $\varphi_h$  и  $\varphi_n$ , после чего результаты сложить.

Вычисление слагаемых, возникающих от  $\varphi_h$ , сводится к решению задачи теории упругости о трещине, на поверхностях которой заданы напряжения, равные с обратным знаком тем, которые возникают в сплошном теле на месте трещины. При достаточно малых размерах трещины эти напряжения можно считать одинаковыми во всех точках ее поверхности: касательные напряжения на месте трещины в данной задаче считаются равными нулю; нормальные обозначим  $\sigma$ . Как известно [2, 3], и как это можно получить из (1.7), (1.10)

$$N_h = \pi^{-1} (2a)^{1/2} \sigma, \quad V_h = \frac{16}{3} (1-\nu^2) a^3 \sigma E^{-1} \quad (6.1)$$

Вычисление слагаемых в  $N$  и  $V$ , возникающих от  $\varphi_n$ , выполняется подстановкой (5.7) в (2.12) и (3.10).

Выполняя в получающихся интегралах подстановку  $\xi' = a^{-2} \xi$ ,  $\eta' = -a^{-2} |\eta|$  и опуская для простоты записи штрихи, имеем

$$N_h = - \frac{Em\varphi_{n0}}{4\pi(1+\nu)} (2a)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^1 \left\{ \left[ (1 + \sqrt{\xi} \operatorname{arctg} \sqrt{\xi})^2 - \frac{\pi^2}{4} \xi \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\xi(1-3\eta) + \eta(\eta-3)}{(\xi+\eta)^2} \sqrt{\eta} \right\} d\eta d\xi \quad (6.2)$$

$$V = 4(1-\nu)m\varphi_{n0}a^3 \int_0^{\infty} \int_0^1 \left\{ \left[ (1 + \sqrt{\xi} \operatorname{arctg} \sqrt{\xi})^2 - \frac{\pi^2}{4} \xi \right] \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\xi+\eta}{\sqrt{\xi}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi}} - 1 \right) \sqrt{\eta} \right\} d\eta d\xi \quad (6.3)$$

Интегралы в (6.2), (6.3) сходятся и представляют собой просто числа. Интегралы по  $\eta$  можно вычислить, пользуясь стандартными приемами.

Имеем

$$\int_0^1 \sqrt{\eta} \frac{\xi(1-3\eta) + \eta(\eta-3)}{(\xi+\eta)^2} d\eta = (14\xi+10) \sqrt{\xi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi}} - 14\xi - \frac{16}{3} \quad (6.4)$$

$$(6.5)$$

$$\int_0^1 \sqrt{\eta} \left( \frac{\xi+\eta}{\sqrt{\xi}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi}} - 1 \right) d\eta = 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right) \left( \frac{1}{3} \xi + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{3} \right]$$

Интегралы, получающиеся после подстановки (6.4) в (6.2) и (6.5) в (6.3), находились численно. В результате двойной интеграл в (6.2) получился равным  $-1.85$ ; двойной интеграл в (6.3) равен  $0.78$ .

Таким образом, с учетом (1.3) и (5.7) имеем

$$N_n = 0.21 \frac{\beta E}{1-\nu} \vartheta_{n0} a^{1/2}, \quad V_n = 3.12(1+\nu) \beta \vartheta_{n0} a^3, \quad \vartheta_{n0} = 2\pi^{-2} j_\infty^2 a^2 (\gamma \lambda)^{-1} \quad (6.6)$$

Как видим, обе величины  $N_n$  и  $V_n$  положительны.

Если в образце содержится много плоских трещин, то определяемая ими дополнительная деформация образца равна  $\varepsilon_{ii}' = 1/2 \sum (n_i V_h + n_h V_i)$ , где  $n_i$  — вектор единичной нормали к плоскости трещины,  $V_i$  — проинтегрированный по плоскости трещины скачок  $i$ -й компоненты вектора смещения, и суммирование распространяется на все трещины в единице объема [6].

В данном случае, очевидно, отлична от нуля только компонента  $\varepsilon_{zz}'$ , причем она состоит из двух слагаемых, соответственно тому, что  $V = V_z = V_h + V_n$ .

Рассмотрим случай, когда температура  $\vartheta_h$  распределена однородно по образцу (см. (5.8)), а поверхности образца свободны от напряжений и взаимодействием трещин можно пренебречь. При нахождении решения задачи теории упругости, связанной с задачей термоупругости, как это было описано в п.1, соответствующей однородному распределению  $\vartheta_h$ , имеем трещину в бесконечном теле с действующими на бесконечности и на поверхности трещины одними и теми же напряжениями. Так как для нахождения  $V_h$  надо решить задачу о трещине, к поверхностям которой приложена разность указанных напряжений, то  $V_h = 0$ .

Таким образом, с учетом (6.6) находим

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\beta}{\gamma \lambda} \left[ \kappa \int_0^t j_\infty^2 dt + 0.64(1+\nu) j_\infty^2 D \right] \quad (6.7)$$

$$D = \int a^5 f(a) da, \quad \int f(a) da = M \quad (6.8)$$

где  $f(a) da$  — количество трещин в единице объема, радиус которых заключен между  $a$  и  $a+da$ ;  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности. Первое слагаемое представляет собой обычную температурную деформацию свободного образца, второе выражает влияние трещин.

Если ток в материале с рассматриваемой системой трещин вызывается разностью потенциалов  $U$ , приложенной на базе  $H$  (параллельной оси  $z$ ), то (см. [7]):

$$j_\infty = \gamma \left( 1 - \frac{8}{3} \nu \right) U H^{-1}, \quad v = \int a^3 f(a) da \quad (6.9)$$

Здесь учтено, что средняя плотность тока совпадает с фигурирующей в (6.7).

Таким образом, измеряя электрическое сопротивление образца с указанной системой трещин, можно по (6.9) найти  $v$ , а измеряя вклад трещин в деформацию при пропускании тока, можно по (6.7) найти  $D$ . Если допустимо пренебречь различиями в размерах трещин, то  $v=Ma^3$ ,  $D=Ma^5$ , откуда  $a=(D/v)^{1/2}$ ,  $M=v^{3/2}D^{-3/2}$ , т. е. по  $v$  и  $D$  можно найти радиус трещин и их количество в единице объема. Когда существенно распределение трещин по размерам, можно получить оценки для этих величин.

Если заданы смещения торцев образца, аналогично можно найти влияние трещин на механическое напряжение при пропускании тока. Следует подчеркнуть, однако, что указанные эффекты невелики.

Рассмотрим теперь условие роста макроскопической трещины. Если концевая область трещины, где происходит разрушение и предшествующее ему нелинейное деформирование, мала, в закон роста такой трещины входит из внешних параметров только  $N$ . Будем по-прежнему считать распределение  $\phi_h$  однородным, так что  $N_h=0$ .

Рассмотрим также случай, когда трещиностойкость материала, выражаемая модулем сцепления  $K$ , является константой. Тогда условие предельного равновесия трещины принимает вид  $\mu N=K$  [2]. Если никаких внешних нагрузок к образцу не приложено, то, так как  $N_h=0$ , имеем  $N=N_n$ . В результате, используя (6.8), находим

$$j_{\infty}^{(G)} = 2.75[K(1-v)\gamma\lambda(\beta E)^{-1}]^{1/2}a^{-3/4} \quad (6.10)$$

Это уравнение определяет критическую плотность тока (либо соответствующую разность потенциалов), которая должна быть достигнута в установившемся режиме для того, чтобы трещина радиуса  $a$  начала расти. Важным может быть связанное с коэффициентом интенсивности напряжений (6.6) усталостное подрастание трещины при многократных включениях — выключениях тока.

Влияние электрического тока на механическое поведение материала через джоулево тепло, когда последнее выделяется достаточно интенсивно, является, по-видимому, основным (если нет ферромагнетизма). Однако поскольку в данном случае у контура трещины происходит быстрее и до больших величин возрастание плотности тока (вытекающая из приведенного решения безграничность возрастания является следствием пренебрежения размером концевой области трещины), здесь возможно заметное влияние и других эффектов, что может отражаться на трещиностойкости. С этой точки зрения отметим в связи с этим влияние электрического тока на пластическое деформирование металлов вследствие эффекта взаимодействия дислокаций с электронами проводимости [8].

Отметим, что использованное выше допущение о значительно более быстром установлении тока, чем температуры, справедливо, если  $(\mu\gamma\lambda/\rho c) \ll 1$ , где  $\mu$  — магнитная проницаемость. Условие малости механического эффекта магнитного поля по сравнению с рассмотренным термоупругим эффектом имеет аналогичный вид с заменой  $\rho c$  на  $\beta E$ . При этом предполагается, что отсутствуют собственная намагниченность и нелинейные эффекты, связанные с ферромагнетизмом. Пренебрегается также токами смещения в проводнике (при достаточно быстром изменении тока они могут, однако, стать существенными внутри трещин).

Таким образом, оба неравенства требуют, чтобы проводимость материала была не слишком велика. Например, для вольфрама (принимая  $\mu=\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$  ом·сек·м<sup>-1</sup>) при обычных условиях отношения в левых частях обоих неравенств оцениваются величиной порядка  $10^{-4}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Снеддон И. Н.* Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. Разрушение, т. 2. М., «Мир», 1975.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
6. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
7. *Салганик Р. Л.* Процессы переноса в телах с большим числом трещин. Инж.-физ. ж., 1974, т. 27, № 6.
8. *Каганов М. И., Кравченко В. Я., Нацык В. Д.* Электронное торможение дислокаций в металлах. Успехи физ. наук, 1973, т. 111, вып. 4.