МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1978

УДК 539.374

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

С. И. МЕШКОВ, А. В. ЧИГАРЕВ

(*Москва, Воронеж*)

Рассматривается получение замкнутой системы определяющих уравнений для динамических и геометрических величин, характеризующих распространение волновых фронтов в неоднородных вязкоупругопластических средах. Построение уравнений динамики проводится с использованием теории разрывов [1–3], геометрических уравнений фронта и луча на основе принципа Ферма [4].

Замкнутая система определяющих уравнений неоднородной линейной вязкоупругой среды [5] использовалась при изучении распространения разрывных волн в предположении, что изменением параметров среды (т. е. скорости) на фронте волны можно пренебречь по сравнению с их изменением вдоль луча. Разрывные волны изучались и в однородных вязкопластических средах [6, 7].

Уравнения для изменения динамических величин в лучевом приближении существенно зависят от геометрии фронта волны (средней кривизны или расходимости) [4–6, 8]. Дальнейший интерес представляет обобщение этих проблем на неоднородные вязкоупругопластические среды.

Для стохастических моделей сплошных сред к полученным системам уравнений оказывается возможным применение метода уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова [9].

1. Определяющие уравнения геометрических величин, характеризующих процесс движения фронта волны в сплошной среде, неоднородность которой понимается в смысле зависимости скорости распространения волны G от пространственной точки M среды, получается на основе следующих рассуждений.

Используя понятие волны k-го порядка [2, 3] как однопараметрического семейства ориентированных поверхностей Σ_t, на которых пространственные и временные производные от полевых величин до $k-1$-го порядка включительно непрерывны, а k-е производные при переходе через эти поверхности терпят разрыв, введем в рассмотрение удовлетворяющий уравнению эйконала [4] функционал Ферма

$$\tau=\int_{M_0}^{M}\frac{ds}{G(M)} \tag{1.1}$$

экстремали которого удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{v}}{G}\right)-\nabla\frac{1}{G}=0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – единичный вектор нормали к поверхности Σ_t; s – расстояние вдоль луча; M_0 и M – соответственно фиксированная и переменная точки на экстремале.

Применяя формулу

$$g^{\alpha\beta}x_\alpha{}^i x_\beta{}^k=\delta_{ik}-\nu^i\nu^k \tag{1.3}$$

к уравнениям (1.2) и учитывая равенство

$$Gdf/ds=\delta f/\delta t \tag{1.4}$$

получаем

$$\delta v^i/\delta t=-g^{\alpha\beta}G_{,\alpha}x_\beta^i \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем x^i — пространственные декартовы координаты; u^α ($\alpha=1, 2$) — ортогональные криволинейные координаты на поверхности Σ_t; $g^{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — первая и вторая квадратичные формы этой поверхности; x_β^i — производная от x^i по u^β, $\delta/\delta t$ — δ-производная; индексы, стоящие после запятой, означают дифференцирование по соответствующей координате.

Используя соответственно формулы Гаусса и Вейнгартена [10]:

$$x_{\alpha\beta}^i=b_{\alpha\beta}v^i, \quad v_{,\alpha}^i=-g^{\beta\gamma}b_{\beta\alpha}x_\gamma^i \tag{1.6}$$

а также соотношения

$$v^iv^i=1, \quad v^ix_\alpha^i=0, \quad \delta x^i/\delta t=Gv^i, \quad G=v^i\partial x^i/\partial t \tag{1.7}$$

и применяя операцию δ-дифференцирования к выражениям (1.6), получим

$$\delta g_{\alpha\beta}/\delta t=-2Gb_{\alpha\beta}, \quad \delta g^{\alpha\beta}/\delta t=2Gb^{\alpha\beta}, \quad \delta b_{\alpha\beta}/\delta t=G_{,\alpha\beta}-Gc_{\alpha\beta}, \quad \delta b^{\alpha\beta}/\delta t=G_{,}^{\alpha\beta}+3Gc^{\alpha\beta} \tag{1.8}$$

На основе формул $2\Omega=g^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$, $K=bg^{-1}$ (g, b — определители первой и второй квадратичных форм) с учетом (1.4) будем иметь

$$\begin{gathered} d\Omega/ds=2\Omega^2-K+(2G)^{-1}G_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \\ dK/ds=2K\Omega+G^{-1}(2\Omega g^{\alpha\beta}-b^{\alpha\beta})G_{,\alpha\beta} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь Ω и K — соответственно средняя и гауссова кривизны поверхности Σ_t.

Система уравнений (1.8), (1.9) при заданных начальных условиях Ω_0, K_0, $g_0^{\alpha\beta}$, $b_0^{\alpha\beta}$ и функции G однозначно определяет изменение параметров внутренней геометрии поверхности вдоль луча.

Уравнения луча, вдоль которого изменяются динамические и геометрические параметры, имеют вид

$$dx^i/ds=v^i, \quad dv^i/ds=-g^{\alpha\beta}(\ln G)_{,\alpha}x_\beta^i \tag{1.10}$$

Соотношения (1.10) рассматриваются совместно с уравнениями (1.8), а также уравнением для вектора x_β^i, касательного к поверхности Σ_t:

$$dx_\alpha^i/ds=(\ln G)_{,\alpha}v^i-g^{\delta\gamma}b_{\delta\alpha}x_\gamma^i \tag{1.11}$$

Значения величин x^i, x_α^i, v_i^i в начальный момент времени обозначаются соответственно x_0^i, $x_{\alpha 0}^i$, v_0^i.

2. Уравнения, описывающие модель тела Бингама [6], можно записать в обобщенной форме, учитывающей неоднородные свойства среды; компоненты тензора малых деформаций представляются в виде суммы упругих и пластических составляющих

$$e_{ij}=e_{ij}^e+e_{ij}^p, \quad 2e_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i} \tag{2.1}$$

Компоненты тензора упругих деформаций e_{ij}^e связаны с компонентами тензора напряжений σ_{ij} обобщенным законом Гука, в котором параметры Ламэ λ и μ зависят от точки сплошной среды

$$\sigma_{ij}=\lambda(x_i)e_{kk}^e\delta_{ij}+2\mu(x_i)e_{ij}^e \tag{2.2}$$

Компоненты тензора пластических деформаций $e_{ij}{}^p$ связаны с компонентами тензора напряжений σ_{ij} локальным условием пластичности

$$(s_{ij}-\eta\varepsilon_{ij}{}^p)(s_{ij}-\eta\varepsilon_{ij}{}^p)=2k^2$$
$$s_{ij}=\sigma_{ij}-{}^1/_3\sigma_{kk}\delta_{ij},\qquad \varepsilon_{ij}{}^p=\partial e_{ij}{}^p/\partial t \tag{2.3}$$

и соотношениями ассоциированного закона течения

$$\varepsilon_{ij}{}^p=\psi(s_{ij}-\eta\varepsilon_{ij}{}^p) \tag{2.4}$$

Здесь $\eta\equiv\eta(x_i)$ — коэффициент вязкости и $k\equiv k(x_i)$ — предел текучести, зависящие от пространственных точек сплошной среды; $\psi(x_i)$ — положительный множитель.

Из соотношений (2.1) — (2.4) следует

$$\sigma_{ij}{}^\bullet=\lambda(x_i)v_{k,k}\delta_{ij}+\mu(x_i)(v_{i,j}+v_{j,i}-2a\psi s_{ij}) \tag{2.5}$$
$$a\equiv(1+\eta\psi)^{-1},\quad \psi>0 \text{ при } s_{ij}s_{ij}>2k^2,\quad \psi=0 \text{ при } s_{ij}s_{ij}\leqslant 2k^2$$

уравнение движения имеет вид

$$\sigma_{ij,j}-\rho v_i{}^\bullet=0 \tag{2.6}$$

Соотношения (2.1) — (2.4), (2.6) определяют локальное динамическое поведение вязкоупругопластического тела.

Волна ускорения в рассматриваемой среде определяется изолированной поверхностью Σ_t, на которой напряжения и скорости непрерывны, а их частные производные претерпевают разрыв.

Применение теории разрывов [1–6, 8] с учетом пространственной зависимости параметров от точек сплошной среды позволяет на основании системы уравнений (2.1) — (2.6) сделать вывод о существовании в рассматриваемом случае двух типов волн ускорения, а именно, продольных (безвихревых) и поперечных (эквиволюминальных), скорости распространения которых соответственно равны скоростям в упругих неоднородных средах

$$G_l=(\lambda+2\mu)^{1/2}\rho^{-1/2},\qquad G_t=\mu^{1/2}\rho^{-1/2} \tag{2.7}$$

Уравнение для изменения интенсивности продольной волны вдоль луча имеет вид

$$\frac{d}{ds}\ln\omega=\Omega-\frac{1}{2}\left\{\frac{d}{ds}\ln(\Lambda_l\rho^{-1})^{1/2}+\frac{d}{ds}\ln\Lambda_l\right\}-$$
$$-\frac{a\mu^2\rho^{1/2}}{\Lambda_l l^{3/2}}\left\{\frac{a^2(s_{ij}\nu_i\nu_j)^2}{k^2\eta^2}+\frac{4\psi}{3}\right\}$$
$$\omega=\lambda_i\nu_i,\qquad \lambda_k=\omega\nu_k,\qquad \Lambda_l=\lambda+2\mu \tag{2.8}$$

Здесь величина λ_i характеризует скачок нормальных производных скорости v_i при переходе через поверхность Σ_t.

Аналогично для поперечной волны получим

$$\frac{dW}{ds}=\left\{2(\Omega-G_t^{-1}a\mu)-\frac{d}{ds}\ln(\Lambda_t\rho^{-1})^{1/2}-\frac{d}{ds}\ln\Lambda_t\right\}W^2+\frac{a^3\mu(\sigma_{kl}\lambda_k\nu_l)^2}{k^2G\eta}$$
$$\lambda_i\nu_i=0,\qquad \Lambda_t=\mu,\qquad W^2=\lambda_i\lambda_i \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8) и (2.9) при заданных начальных условиях ω_0 и W_0 должны рассматриваться совместно с уравнениями (1.8) — (1.11), так как в них входит средняя кривизна Ω и нормаль ν^i.

Исключая из уравнений (1.9), (2.8) и (2.9) кривизны Ω и K, можно получить [5] уравнения третьего порядка относительно величины ω и W^2 которые исследуются совместно с уравнениями (1.8). Инварианты $G_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ и $G_{,\alpha\beta}b^{\alpha\beta}$, входящие в уравнения (1.9), учитывают влияние кривизны и кручения луча.

Из соотношений (1.9), (2.8) и (2.9) следует, что интенсивность волн зависит от характера изменения параметров упругости и плотности, т. е. скорости вдоль луча и в поперечном направлении. Если представить скорость двумя слагаемыми $G(x)=G_0+G'(x)$, то величина флуктуации $G'(x)$ от постоянного значения G_0 окажется несущественной,так как уравнения содержат лишь производные от G. Так как вязкие и пластические параметры входят без производных, то существенное значение имеют их локальные величины, а не характер изменения.

3. Ударная волна в неоднородной вязкоупругопластической среде определяется изолированной поверхностью Σ_t, на которой перемещения и параметры среды непрерывны, а напряжения и скорости перемещений терпят разрыв.

Формулируя динамические и кинематические условия совместности на поверхности Σ_t и применяя операцию разрывов аналогично результату для волн ускорения, приходим к выводу о существовании в рассматриваемой среде поперечных и продольных волн, распространяющихся соответственно с теми же скоростями (2.7). Уравнения для изменения характеристических параметров вдоль луча для продольных и поперечных волн соответственно имеют вид

$$\frac{d}{ds}\ln\sigma=\Omega-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\Lambda_l}{\rho}\right)^{1/2}+\frac{M}{\Lambda_l\sigma}[\varepsilon_{ij}^p]\nu_i\nu_j,\qquad [v_i]\nu_i=\sigma$$

$$\frac{d}{ds}\ln[v_i]=\Omega-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\ln\left(\frac{\Lambda_t}{\rho}\right)^{1/2}+$$

$$+\{[\varepsilon_{ij}^p]\nu_j-[\varepsilon_{kl}^p]\nu_k\nu_l\nu_i\}[v_i]^{-1},\qquad [v_i]\nu_i=0 \tag{3.1}$$

Величины скачков скоростей пластических деформаций, входящие в уравнения (3.1), определяются следующим образом. Если материал с обеих сторон поверхности Σ_t находится в пластическом состоянии, то $[\varepsilon_{ij}^p]=[s_{ij}(\eta+\psi^{-1})^{-1}]$.

Если материал деформируется с одной стороны от поверхности Σ_t, то на волнах нагрузки и разгрузки имеем соответственно $[\varepsilon_{ij}^p]=\pm(\eta+1/\psi^p)^{-1}$.

Здесь величины ψ^p и s_{ij}^p определены в пластической области.

Если материал пластически деформируется с двух сторон от волновой поверхности Σ_t, то на безвихревой и эквиволюминальной волнах соответственно будем иметь

$$[\varepsilon_{ij}^p]\nu_i\nu_j=\frac{\sqrt{2}k}{\eta}\left\{\frac{Gs_i\nu_i+{}^4/_3\mu\sigma}{(G^2s^2+4G\mu\sigma s_i\nu_i+{}^8/_3\mu^2\sigma^2)^{1/2}}-\frac{s_i\nu_i}{s}\right\}-\frac{4\mu\sigma}{3\eta G}$$

$$[\varepsilon_{ij}^p]\nu_j-[\varepsilon_{kl}^p]\nu_k\nu_l\nu_i=\frac{\sqrt{2}k}{\eta}\left\{\frac{\mu[v_i]+(s_i-s_k\nu_k\nu_i)G}{(G^2s^2+4\mu s_i[v_i]+2\mu^2[v_i][v_i])^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{s_i-s_k\nu_k\nu_i}{s}\right\}-\frac{\mu[v_i]}{\eta G}$$

Для безвихревой и эквиволюминальной волн нагрузки имеют место выражения

$$[\varepsilon_{ij}^p]\nu_i\nu_j=\frac{{}^4/_3\mu\sigma-Gs_i\nu_i}{G\eta}+\frac{\sqrt{2}\,k}{\eta}\,\frac{{}^4/_3\mu\sigma+Gs_i\nu_i}{(G^2s^2+4G\mu\sigma s_i\nu_i+{}^8/_3\mu^2\sigma^2)^{1/2}}$$

$$[\varepsilon_{ij}{}^p]\nu_j-[\varepsilon_{kl}{}^p]\nu_k\nu_l\nu_i=\frac{\sqrt{2}\,k}{\eta}\frac{\mu[v_i]+G(s_i-s_k\nu_i\nu_k)}{(G^2s^2+4G\mu s_i[v_i]+2\mu^2[v_i][v_i])^{1/2}}-$$
$$-\frac{G(s_i-s_k\nu_k\nu_i)+\mu[v_i]}{G\eta}$$

На безвихревой и эквиволюминальной волнах разгрузки соответственно можно определить

$$[\varepsilon_{ij}{}^p]\nu_i\nu_j=\frac{s_i\nu_i}{\eta}\left(1-\frac{\sqrt{2}\,k}{s}\right)$$

$$[\varepsilon_{ij}{}^p]\nu_j-[\varepsilon_{kl}{}^p]\nu_k\nu_l\nu_i=\frac{s_i-s_k\nu_k\nu_i}{\eta}\left(1-\frac{\sqrt{2}\,k}{s}\right)$$

Таким образом, динамические уравнения (3.1) совместно с уравнениями геометрии (1.8)—(1.11) и соотношениями, определяющими характер пластического деформирования на волне, образуют замкнутую систему уравнений, позволяющую, в принципе, исследовать задачу о распространении ударных волн в неоднородной вязкоупругопластической среде. Относительно характера влияния неоднородности материала на затухание волн можно сделать те же замечания, что и для волн ускорений.

Вместо зависимости от средней кривизны Ω можно ввести в уравнения (3.1) зависимость от расходимости [4]. Для стохастически неоднородных сред лучевой метод, называемый также методом разрывов, открывает возможность применения для исследования полученных уравнений теорию марковских процессов — метод Фоккера — Планка — Колмогорова [9, 11]. Это оказывается возможным потому, что полученные уравнения геометрии и динамики имеют первый порядок. Условия, необходимые для перехода к методу Фоккера — Планка — Колмогорова, определяются выбором модели сплошной среды.

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для чисто упругой неоднородной среды имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial s}+\Omega\frac{\partial P}{\partial x}-4\Omega P+(N_{\alpha\beta}-g^{\eta\delta}b_{\alpha\eta}b_{\rho\delta})\frac{\partial P}{\partial b_{\alpha\beta}}-2b_{\alpha\beta}\frac{\partial P}{\partial g_{\alpha\beta}}-$$
$$-\pi\left\{D_{11}\frac{\partial^2P}{\partial\chi^2}+(D_{12}^{(\alpha\beta)}+D_{21}^{(\alpha\beta)})\frac{\partial^2P}{\partial\chi\partial N_{\alpha\beta}}+D_{22}^{(\alpha\beta\gamma\delta)}\frac{\partial^2P}{\partial N_{\alpha\beta}\partial N_{\gamma\delta}}\right\}=0 \qquad (3.2)$$

Здесь $P(\chi,\ N_{\alpha\beta},\ b_{\alpha\beta},\ g_{\alpha\beta},\ s)$ — плотность распределения многомерного случайного процесса; $\chi=\ln\omega$, $N_{\alpha\beta}=G_{,\alpha\beta}G^{-1}=(\ln G)_{\alpha\beta}+(\ln G)_{,\alpha}$, D_{11}, $D_{12}^{(\alpha\beta)}$, $D_{21}^{(\alpha\beta)}$, $D_{22}^{(\alpha\beta\gamma\delta)}$ - постоянные спектральные плотности возмущений $d\ln G/ds$ и $dN_{\alpha\beta}/ds$.

Для некоторых моделей сплошных сред уравнение (3.2) можно упростить. Например, если неоднородность среды изменяется только вдоль луча, то для винеровской модели $d\ln G/ds=g(s)$ получаем

$$\frac{\partial P(\chi,s)}{\partial s}+\frac{\Omega_0-K_0s}{S}\frac{\partial P(\chi,s)}{\partial\chi}=\frac{N}{2}\frac{\partial^2P(\chi,s)}{\partial\chi^2}.$$

$$S=1-2\Omega_0s+K_0s^2$$

Решение этого уравнения при начальном условии $P(\chi, 0)=\delta(\chi-\chi_0)$ имеет вид

$$P(\chi, s)=\sqrt{\frac{2}{\pi Ns}}\exp\left\{-\frac{2(\chi-\chi_0+{}^1/_2\ln S)^2}{Ns}\right\}.$$

Таким образом, интенсивность ω определяется логарифмическим нормальным законом распределения

$$P(\omega, s)=\frac{\omega_0}{\omega\sqrt{2\pi Ns}}\exp\left\{-\frac{\ln\omega\omega_0^{-1}+{}^1/_2\ln S}{2Ns}\right\}$$

В общем случае исследование стохастической и детерминированной модели, описываемой уравнениями (1.8)—(1.11), (3.1), проводится методом последовательных приближений.

Поступила 23 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
2. *Coleman B. D., Gurtin M. E., Herrera I. R.* Waves in materials with memory. I. The velocity of one-dimensional shock and accelaration waves. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1965, vol. 19, No. 1, p. 1.
3. *Truesdell C., Toupin R. A.* The Classical Field Theories. Handbuch der Physik. Bd III/I, Berlin — Gottingen — Heidelberg, Springer Verlag, 1960.
4. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
5. *Лимарев А. Е., Мешков С. И., Чигарев А. В.* К расчету интенсивности волновых фронтов в неоднородной вязкоупругой среде. В сб.: Механика деформируемого твердого тела, вып. 1. Куйбышев, 1975.
6. *Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д.* О распространении волн в вязкоупругопластической среде. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
7. *Ивлев Д. Д.* К теории сплошных сред. Докл. АН СССР, 1962, т. 148, № 1.
8. *Блитштейн Ю. М., Мешков С. И., Чигарев А. В.* Распространение волн в линейной вязкоупругой неоднородной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
9. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
10. *Thomas T. Y.* Concepts from tensor analysis and differential geometry. N. Y., Acad. Press, 1961.
11. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики. Успехи физ. наук, 1973, т. 110, вып. 4.