МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1978

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ-ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ НА ГРАНИЦЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД

М. А. ГРИНФЕЛЬД

(Москва)

Развивается метод изучения поведения слабых разрывов на границе раздела двух сред. Предлагаемая процедура, основанная на соотношениях совместности для разрывов производных, позволяет вычислять амплитуды и углы наклона отраженных-преломленных волн на линии их взаимного пересечения как в случае линейной, так и в случае нелинейной теории упругости. Предполагается, что угол падения исходной волны является докритическим.

Задача об отражении-преломлении на границе двух сред рассматривалась многими авторами в различной по общности постановке [1] (отражение-преломление в однородной и неоднородной, изотропной и анизотропной среде; граница раздела предполагалась плоской, цилиндрической или произвольной гладкой). Варьировалось также понятие волны. Под волной различные исследователи подразумевали любое решение уравнений линейной теории упругости или акустики или некоторые частные решения, такие, как функционально-инвариантные решения [2, 3], синусоидальные бегущие волны [4] и т. д. Некоторые авторы под волной понимали ту изменяющуюся во времени часть пространства, где сосредоточены особенности решения. Последнее представление о волне, которое принято и в данной статье, оказалось во многих отношениях наиболее гибким и в сочетании с лучевым методом вычисления интенсивности волновых фронтов позволило подойти к изучению отражения-преломления на произвольной гладкой границе двух неоднородных сред в рамках линейной теории [5].

Вопрос об отражении-преломлении падающей волны на границе двух нелинейно-упругих сред представляет значительный интерес не только с практической но и с теоретической точки зрения (поскольку традиционные варианты лучевого метода в нелинейных задачах не приемлемы, их приходится заменять другими, что и делается в данной работе для случая докритического угла падения).

В п. 1 рассматриваются кинематические аспекты отражения-преломления. Дается чисто кинематическая трактовка закона Снеллиуса, которая использовалась еще в [6, 7] (однако данный подход отличается от подхода, развитого в этих работах). Приводятся обобщения закона Снеллиуса и формулы для разрыва геометрического расхождения на случай подвижной границы раздела.

В п. 2 представлены динамические аспекты отражения-преломления, т. е. вопросы, связанные с определением амплитуды отраженных-преломленных волн по амплитуде падающей волны. Хотя исследуется отражение-преломление слабых разрывов типа волн ускорений, предлагаемая процедура применима к другим моделям сплошных сред и другим типам сингулярных поверхностей. По существу, здесь преодолевается единственное затруднение: как из условий на границе раздела, связывающих предельные значения перемещений и их первых производных, получить необходимые соотношения для предельных значений вторых производных. Отметим, что в двух важных частных случаях затруднений такого рода не возникает: для отражения-преломления ударных волн на границе сжимаемых жидкостей (при использовании эйлерова описания) и для отражения ударной волны от свободной поверхности упругого тела [8], когда исследуются скачки низших разрывных производных.

Полученные уравнения по своей структуре вполне совпадают с уравнениями, характеризующими отражение-преломление на границе анизотропных сред и изученными, например, в [9]; под докритическим углом падения подразумеваются условия, при которых решения этих уравнений имеют физический смысл.

Заметим также, что движение слабых разрывов для одномерных задач с разрывными коэффициентами рассматривалось в [10].

1. В евклидовом пространстве, отнесенном к криволинейной неподвижной системе координат x^i, рассмотрим движущиеся поверхности ξ, ξ^*, ξ°, $\xi^\vee$:

$$x^i=x^i(\xi^\alpha,\ t)\quad (i=1,2,3;\ \alpha=1,2) \tag{1.1}$$

(построение различных геометрических и кинематических объектов проводится на примере поверхности ξ; аналогичные объекты, относящиеся к поверхностям ξ^*, ${}^\circ\xi$, $\xi^\vee$, имеют соответствующие индексы (*, °, $^\vee$)). Для функций, задающих евклидовы координаты точек поверхностей и кривых, используется одна и та же корневая буква x, хотя соответствующие функции различны. Индексы аргументов обычно не указываются, t — время.

Скорость поверхности ξ $\mathrm{C}(\xi,t)$ определим как составляющую вектора $\partial\boldsymbol{\xi}(\xi,t)/\partial t$, перпендикулярную этой поверхности

$$\begin{gathered}\mathrm{C}(\xi,t)=\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\xi,t)}{\partial t}-\boldsymbol{\xi}_\alpha(\xi,t)\left[\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\xi,t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\xi}^\alpha(\xi,t)\right]=\\ =\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\xi,t)}{\partial t}-\boldsymbol{\xi}_\alpha(\xi,t)v^\alpha(\xi,t)=C(\xi,t)\mathbf{N}(\xi,t)\\ \boldsymbol{\xi}(\xi,t)=\mathbf{x}(x(\xi,t)),\qquad \boldsymbol{\xi}_\alpha(\xi,t)=\partial\boldsymbol{\xi}(\xi,t)/\partial\xi^\alpha\\ \boldsymbol{\xi}^\alpha(\xi,t)=\boldsymbol{\xi}_\beta(\xi,t)\xi^{\alpha\beta}(\xi,t),\qquad v^\alpha(\xi,t)=\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\xi,t)}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\xi}^\alpha(\xi,t)\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{x}(x)$ — (достаточно гладкий) радиус-вектор пространственной системы координат x^i, ей соответствуют также метрический тензор $x_{ij}(x)$, $x^{ij}(x)$ (с помощью которого осуществляется поднятие и опускание латинских индексов, а также определяется ковариантное дифференцирование, обозначаемое в дальнейшем латинским индексом после вертикальной черты), ко- и контравариантные базисы $\mathbf{x}_i(x)$, $\mathbf{x}^i(x)$; $\boldsymbol{\xi}(\xi,t)$ — радиус-вектор поверхности ξ, ей соответствуют также метрический тензор $\xi_{\alpha\beta}(\xi,t)$, $\xi^{\alpha\beta}(\xi,t)$ (с помощью которого осуществляется поднятие и опускание греческих индексов, а также осуществляется ковариантное дифференцирование, обозначаемое греческим индексом после точки с запятой), ко- и контравариантные базисы $\boldsymbol{\xi}_\alpha(\xi,t)$, $\boldsymbol{\xi}^\alpha(\xi,t)$, поле единичных нормалей $N(\xi,t)=N^i\mathbf{x}_i$.

Пусть имеется движущаяся кривая σ:

$$x^i=x^i(\sigma,\ t) \tag{1.3}$$

с радиус-вектором $\boldsymbol{\sigma}(\sigma,t)$ и базисом $\boldsymbol{\sigma}_1(\sigma,t)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\sigma,t)=\mathbf{x}(x(\sigma,t)),\qquad \boldsymbol{\sigma}_1(\sigma,t)=\partial\boldsymbol{\sigma}(\sigma,t)/\partial\sigma \tag{1.4}$$

Вектор скорости кривой σ $\mathbf{c}(\sigma,t)$ определим как составляющую вектора $\partial\boldsymbol{\sigma}(\sigma,t)/\partial t$, перпендикулярную этой кривой

$$\mathbf{c}(\sigma,t)=\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\sigma,t)}{\partial t}-\frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{|\boldsymbol{\sigma}_1|}\left[\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\sigma,t)}{\partial t}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{|\boldsymbol{\sigma}_1|}\right] \tag{1.5}$$

Определенные выше векторы скоростей движущейся поверхности и кривой не зависят от выбора системы координат на этих объектах.

Предположим, что кривая σ лежит на поверхности ξ, т. е. существуют такие функции $\xi^\alpha(\sigma,t)$, что

$$x^i(\sigma,t)=x^i(\xi^\alpha(\sigma,t),t) \tag{1.6}$$

Комбинируя (1.2) — (1.6), получаем следующее выражение для вектора скорости кривой σ:

$$\mathbf{c}(\sigma,t)=\frac{\partial}{\partial t}\xi(\xi(\sigma,t),t)-\mathbf{e}(\sigma,t)\left[\mathbf{e}(\sigma,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\xi(\xi(\sigma,t),t)\right]=$$
$$=\frac{\partial\xi(\xi,t)}{\partial t}+\xi_\alpha\frac{\partial\xi^\alpha(\sigma,t)}{\partial t}-\xi_\alpha e^\alpha\left\{\xi_\beta e^\beta\cdot\left[\frac{\partial\xi(\xi,t)}{\partial t}+\xi_\gamma\frac{\partial\xi^\gamma(\sigma,t)}{\partial t}\right]\right\}= \tag{1.7}$$
$$=\mathbf{C}(\xi(\sigma,t)+\xi_\alpha\left[v^\alpha(\xi(\sigma,t),t)+\frac{\partial\xi^\alpha(\sigma,t)}{\partial t}\right]-\xi_\alpha e^\alpha e_\gamma\left[w^\gamma(\xi(\sigma,t),t)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\xi^\gamma(\sigma,t)}{\partial t}\right]=\mathbf{C}(\xi(\sigma,t)+\xi_\alpha(\xi(\sigma,t),t)\left[v^\gamma(\xi(\sigma,t),t)+\frac{\partial\xi^\gamma(\sigma,t)}{\partial t}\right]\times$$
$$\times(\delta_\gamma^\alpha-e^\alpha e_\gamma)=\mathbf{C}(\xi(\sigma,t),t)+\mathbf{s}(\sigma,t)$$

$$\mathbf{e}(\sigma,t)=\frac{\boldsymbol{\sigma}_1(\sigma,t)}{|\boldsymbol{\sigma}_1(\sigma,t)|},\quad e_\alpha(\sigma,t)=\mathbf{e}(\sigma,t)\cdot\xi_\alpha(\xi(\sigma,t),t)$$
$$\mathbf{s}(\sigma,t)=\xi_\alpha(\xi(\sigma,t),t)\,(\delta_\gamma{}^\alpha-e^\alpha e_\gamma)\left[v^\gamma(\xi(\sigma,t),t)+\frac{\partial\xi^\gamma(\sigma,t)}{\partial t}\right] \tag{1.8}$$

Используя (1.8), нетрудно заметить, что вектор $\mathbf{s}(\sigma, t)$ ортогонален векторам $\mathbf{e}(\sigma, t)$ и $\mathbf{N}(\xi(\sigma, t), t)$; назовем его скоростью кривой σ относительно поверхности ξ. Пусть $\mathbf{n}(\sigma, t)$ — поле единичных нормалей к кривой σ, лежащих в касательных плоскостях поверхности ξ. Тогда

$$\mathbf{s}(\sigma,t)=s(\sigma,t)\mathbf{n}(\sigma,t),\ s(\sigma,t)=\mathbf{s}(\sigma,t)\cdot\mathbf{n}(\sigma,t),\ \mathbf{s}(\sigma,t)\cdot\mathbf{N}(\xi(\sigma,t),t)=0 \tag{1.9}$$

Кажущейся скоростью поверхности ξ относительно поверхности $\xi^\vee$ называется скорость их линии пересечения относительно $\xi^\vee$. Рассмотрим вопрос, как по скоростям поверхностей ξ, $\xi^\vee$ определить их кажущиеся скорости относительно одна другой. Используя (1.7), запишем скорость линии пересечения двумя способами

$$\mathbf{C}(\xi(\sigma,t),t)+\mathbf{s}(\sigma,t)=\mathbf{C}^\vee(\xi^\vee(\sigma,t),t)+\mathbf{s}^\vee(\sigma,t) \tag{1.10}$$

Умножив (1.10) скалярно на $\mathbf{N}(\xi(\sigma, t), t)$ и используя (1.2), (1.9), получаем

$$s^\vee\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}=C-\mathbf{C}^\vee\cdot\mathbf{N} \tag{1.11}$$

Если $\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}\neq0$, то из (1.11) следует

$$s^\vee=(C-\mathbf{C}^\vee\cdot\mathbf{N})\,/\,(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}) \tag{1.12}$$

Если поверхности ξ, ξ^*, ξ° пересекаются с поверхностью $\xi^\vee$ вдоль одной движущейся кривой, используя (1.12), получаем

$$(C-\mathbf{C}^\vee\cdot\mathbf{N})/(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N})=(C^*-\mathbf{C}^\vee\cdot\mathbf{N}^*)/(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}^*)=(C^\circ-\mathbf{C}^\vee\cdot\mathbf{N}^\circ)/(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}^\circ) \tag{1.13}$$

Соотношение (1.13) соответствует закону Снеллиуса для случая подвижной границы раздела $\xi^\vee$. Если же граница покоится, приходим к обычной форме закона Снеллиуса

$$C\,/\,(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N})=C^*\,/\,(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}^*)=C^\circ\,/\,(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}^\circ) \tag{1.14}$$

Часто падающий и отраженный (или преломленный) фронты бывает удобно рассматривать как одну поверхность, причем функции $x^i(\xi, t)$, задающие эту поверхность, непрерывны, а их первые производные терпят разрыв на линии пересечения фронтов $\xi^\alpha=\xi^\alpha(\sigma, t)$. Единичные нормали к линии пересечения $\mathbf{n}_+$, $\mathbf{n}_-$, лежащие в касательных плоскостях фронтов, имеют следующие компоненты по предельным базисам на поверхности [11] (эти базисы, очевидно, также терпят разрыв на линии пересечения фронтов)

$$n_{\alpha+}(\sigma,t)=\sqrt{\xi_+}\,e_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\beta(\sigma,t)}{\partial\sigma}\,|\sigma_1|,\quad n_{\alpha-}(\sigma,t)=\sqrt{\xi_-}\,e_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\beta(\sigma,t)}{\partial\sigma}\,|\sigma_1| \tag{1.15}$$

Здесь $e_{\alpha\beta}$ – кососимметричная подстановка чисел 1, 2; $\xi(\xi, t)=|\xi_{\alpha\beta}(\xi, t)|$; метками плюс и минус различаются объекты, относящиеся к двум гладким частям составной поверхности. Свертывая оба соотношения (1.15) с $\partial\xi^\alpha(\sigma, t)/\partial t$ и используя (1.8), (1.9), получаем

$$\sqrt{\xi_+}/\sqrt{\xi_-}=(s_+-v_+{}^\alpha n_{\alpha+})/(s_--v_-{}^\alpha n_{\alpha-}) \tag{1.16}$$

В (1.16) s_+, s_- – скорость линии разрыва относительно каждой из гладких частей составной поверхности. Вводя компоненты нормалей по пространственному базису $n_{i\pm}=\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{n}_\pm$, легко получить

$$v^\alpha{}_\pm n_{\alpha\pm}=\frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial t}{}_\pm n_{i\pm} \tag{1.17}$$

Если $\xi^\vee$ – гладкая поверхность, по которой перемещается линия пересечения фронтов (в дальнейшем ею будет граница раздела сред), из (1.13) следует

$$s_+=(C^\vee-\mathbf{N}^\vee\cdot\mathbf{C}_+)/(\mathbf{N}^\vee\cdot\mathbf{n}_+),\qquad s_-=(C^\vee-\mathbf{N}^\vee\cdot\mathbf{C}_-)/(\mathbf{N}^\vee\cdot\mathbf{n}_-) \tag{1.18}$$

Здесь C_+, C_-, $C^\vee$ – предельные значения гладких частей составной поверхности и скорость границы на линии пересечения фронтов. Обозначим через $\mathbf{N}_+$, $\mathbf{N}_-$ предельные значения единичных нормалей к составной поверхности на линии пересечения фронтов. Комбинируя (1.16) – (1.18), получаем следующую формулу для расчета разрыва геометрического расхождения на движущейся границе раздела:

$$\sqrt{\xi_+}\left[\frac{C^\vee-C_-\mathbf{N}_-\cdot\mathbf{N}^\vee}{\mathbf{N}^\vee\cdot\mathbf{n}_-}-\frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial t}{}_-n_{i-}\right]=\sqrt{\xi_-}\left[\frac{C^\vee-C_+\mathbf{N}_+\cdot\mathbf{N}^\vee}{\mathbf{N}^\vee\cdot\mathbf{n}_+}-\frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial t}{}_+n_{i+}\right] \tag{1.19}$$

Применяя (1.19) к случаю, когда поверхность $\xi^\vee$ покоится и лучи ортогональны последовательным положением фронта волны, получаем хорошо известное соотношение $\sqrt{\xi_+}/\sqrt{\xi_-}=|\mathbf{N}_+\cdot\mathbf{N}^\vee/\mathbf{N}_-\cdot\mathbf{N}^\vee|$.

2. Вопросы, рассмотренные в п. 1, не были связаны с какой-либо конкретной моделью сплошной среды и конкретным выбором независимых переменных (лагранжевых или эйлеровых координат). Здесь x^i — лагранжевы координаты материальных точек, а $\mathbf{x}(x)$ — радиус-вектор точки с координатами x^i в исходной конфигурации. Пусть $m(x)$ — плотность тела в исходном состоянии, $\mathbf{u}(x, t)=u^i(x, t)\ \mathbf{x}_i(x)$ — вектор перемещения, $p^{ji}(x, u_{k|l})$ — тензор-функция, задающая зависимость тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа от градиентов перемещений.

В области дважды непрерывно дифференцируемых перемещений упругого тела в отсутствие массовых сил справедливы следующие уравнения движения:

$$m(x)\frac{\partial^2 u^i(x, t)}{\partial t^2}=p^{ji}{}_{|j}(x, u_{k|l}) \tag{2.1}$$

Если в теле имеется слабый разрыв типа волны ускорения, то квадрат скорости этой волны C^2, нормаль к ней N_i и вектор разрыва вторых производных h_k удовлетворяют следующей системе уравнений [12]:

$$[mC^2x^{ik}-\varphi^{ijkl}(x, u_{m|n})N_jN_l]h_k=0 \tag{2.2}$$

$$\varphi^{ijkl}(x, u_{m|n})=\frac{\partial p^{ji}(x, u_{m|n})}{\partial u},\qquad h_k(\xi, t)=[u_{k|l\cdot n}]_-N^lN^m$$

Функции C, N_i относятся к воображаемым поверхностям с радиус-векторами $\xi=\mathbf{x}(x(\xi, t))$, где $x^i=x^i(\xi, t)$ — точечное уравнение соответствующей поверхности слабого разрыва. Через эти функции, однако, очень просто выражаются скорости и нормали реальных поверхностей разрыва.

Для удовлетворения условий на границе раздела $x^i=x^{\vee i}(\xi^\vee)$ к падающей волне будут добавлены отраженные-преломленные волны слабого разрыва с таким расчетом, чтобы все разрывы пересекались в каждый момент времени по общей линии, называемой в дальнейшем ребром. В результате тело окажется разбитым на несколько двугранных углов с общим ребром; поверхности слабых разрывов предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми.

Внутри каждого двугранного угла перемещения их первые и вторые производные предполагаются непрерывными и имеющими конечные предельные значения на сторонах угла и его ребре, где эти предельные значения также должны быть непрерывны. Если два угла имеют общей гранью слабый разрыв, то предельные значения перемещений и их первых производных с обеих сторон, очевидно, совпадают. Если же два угла имеют общей стороной границу раздела, то предельные значения перемещений и их первых производных должны удовлетворять тем или иным граничным условиям. Остановимся для определенности на случае жесткого контакта, когда должны выполняться соотношения

$$[u^i]_-^+=0, \quad [p^{ji}]_-^+N_j^\vee=0 \tag{2.3}$$

Здесь $N_j^\vee(\xi^\vee)$ — компоненты единичной нормали к поверхности $\xi^\vee = \mathbf{x}(x^\vee(\xi^\vee))$ по исходному базису. Эту покоящуюся поверхность также следует отличать от реальной границы раздела, которая, вообще говоря, движется.

Используя лемму Адамара [12], дифференцированием по времени из условий (2.3) можно получить такие следствия:

$$\left[\frac{\partial^2 u^i(x,t)}{\partial t^2}\right]_-^+=0, \quad \left[\varphi^{ijkl}(x,u_{m|n})\frac{\partial u_{k|l}(x,t)}{\partial t}\right]_-^+N_j^\vee=0 \tag{2.4}$$

Введем обозначения h^i, h^{*i}, $h^{\circ i}$ для векторов разрыва вторых производных перемещений падающей, отраженных и преломленных волн (отраженных и преломленных волн бывает, как правило, несколько; во избежание загромождения формул они не будут различаться дополнительными метками)

$$h^i=[\overset{i}{u}_{|jk}]_-^+N^jN^k, \quad h^{*i}=[\overset{i}{u}_{|jk}]_-^+N^{*j}N^{*k}, \quad h^{\circ i}=[u_{|jk}]_-^+N^{\circ j}N^{\circ k}$$

где N^i, N^{*i}, $N^{\circ i}$ — единичные нормали к падающей, отраженным и преломленным волнам соответственно.

Скорости и векторы разрывов падающей, отраженных и преломленных волн слабого разрыва вне границы раздела, очевидно, должны удовлетворять уравнению (2.2). В момент времени t выберем точку на ребре и начнем приближаться к ней по каждому из разрывов. Тогда для всех разрывов, находящихся по одну сторону границы раздела, предельные значения тензора $\varphi^{ijkl}(x, u_{m|n})$ будут совпадать.

Предположим, что для каждого из этих предельных значений φ^{*ijkl}, $\varphi^{\circ ijkl}$ уравнение (2.2) имеет по три положительных собственных значения C для всех направлений нормали. Эти собственные значения и соответствующие им единичные собственные векторы обозначим через $C^*(N)$, $r_k^*(N)$, $C^\circ(N)$, $r_k^\circ(N)$; скорость и нормированный вектор разрыва падающей волны обозначим через C, r_k.

Так как падающая, отраженные и преломленные волны пересекаются все время вдоль общей движущейся линии, то должен выполняться закон Снеллиуса (1.14):

$$C/(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N})=C^*(N^*)/(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}^*)=C^\circ(N^\circ)/(\mathbf{n}^\vee\cdot\mathbf{N}^\circ) \tag{2.5}$$

Здесь использовалась форма закона Снеллиуса, соответствующая неподвижной границе раздела, поскольку таковой является поверхность $\xi=\mathbf{x}(x^\vee(\xi^\vee))$, реальная же граница раздела при этом, как отмечалось выше, может быть подвижной.

Положение падающей волны определяет линию пересечения фронтов и, следовательно, вектор $\mathbf{n}^\vee$ — единичную нормаль к этой кривой, лежащую в касательной плоскости к границе раздела. Далее, в плоскости векторов **N**, $\mathbf{n}^{\vee}$ должны лежать нормали к отраженным-преломленным волнам, так как все эти векторы ортогональны $\boldsymbol{\sigma}_1$ – базисному вектору линии пересечения фронтов. Для определения единичной нормали к отраженному (преломленному) фронту остается задать еще одно условие – для этого достаточно использовать одно из уравнений (2.5) (для каждой волны свое). Если каждое из уравнений (2.5) определяет лишь одну возможную нормаль, то используя граничные условия (2.4), можно полностью определить шесть векторов разрыва производных перемещений на фронтах отраженных-преломленных волн.

Действительно, на поверхности волны ускорения должны выполняться следующие соотношения совместности для разрывов вторых производных:

$$[u^i{}_{|jk}]_-^+=h^iN_jN_k,\qquad \left[\frac{\partial u^i{}_{|j}(x,t)}{\partial t}\right]_-^+=-h^iCN_j,\qquad \left[\frac{\partial^2u^i(x,t)}{\partial t_2}\right]_-^+=h^iC^2 \tag{2.6}$$

Используя (2.6), условия на границе раздела (2.4) можно записать в виде (для точек, лежащих на линии пересечения фронтов)

$$\sum_1^3{}^* h^{*i}C^{*2}+h^iC^2=\sum_1^3{}^\circ h^{\circ i}C^{\circ 2} \tag{2.7}$$

$$\sum_1^3{}^* h_k{}^*\varphi^{*ijkl}N_l{}^*C^*N_j{}^{\vee}+h_k\varphi^{*ijkl}N_lCN_j{}^{\vee}=\sum_1^3{}^\circ h_k{}^\circ\varphi^{\circ ijkl}N_l{}^\circ C^\circ N_j{}^{\vee} \tag{2.8}$$

Здесь символы $\sum_1^3{}^*$, $\sum_1^3{}^\circ$ обозначают суммирование по всем отраженным и преломленным волнам соответственно.

Векторы разрыва в случае различных собственных значений акустического тензора можно представить в виде

$$h_k=hr_k,\quad h^*{}_k=h^*r^*{}_k,\quad h^\circ{}_k=h^\circ r^\circ{}_k \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.7), (2.8), получаем систему из шести линейных уравнений с шестью неизвестными $h^*{}_k$, $h^\circ{}_k$:

$$\sum_1^3{}^\circ h^\circ r_k{}^\circ C^{\circ 2}-\sum_1^3{}^* h^*r_k{}^*C^{*2}=hr_kC^2 \tag{2.10}$$

$$\sum_1{}^\circ \varphi^{\circ ijkl}N_j{}^{\vee}r_k{}^\circ N_l{}^\circ C^\circ h^\circ-\sum_1{}^* \varphi^{*ijkl}N_j{}^{\vee}r_k{}^*N_l{}^*C^*h^*=\varphi^{*ijkl}N_j{}^{\vee}r_kN_lCh \tag{2.11}$$

Процедура расчета отраженных-преломленных волн сводится, таким образом, к следующему. Из системы (2.2) определяются ветви функций $C(N)$, $r_k(N)$, затем из закона Снеллиуса (2.5) определяются нормали к отраженным-преломленным волнам и, наконец, из уравнений (2.10), (3.11) определяются интенсивности отраженных-преломленных волн.

Вообще говоря, кроме уравнений (2.5), следовало бы рассмотреть также уравнения

$$C/(\mathbf{n}^{\vee}\cdot\mathbf{N})=-C^*(N^*)/(\mathbf{n}^{\vee}\cdot\mathbf{N}^*)=-C^\circ(N^\circ)/(\mathbf{n}^{\vee}\cdot\mathbf{N}^\circ) \tag{2.12}$$

Можно показать, однако, что уравнения (2.12) приводят к тем же волнам слабого разрыва, что и (2.5).

Разберем еще одно кажущееся затруднение. Чтобы получить условие (2.10), первое из соотношений (2.3) дважды дифференцировалось по t.

Однако (2.3) можно продифференцировать дважды иным способом (например, по $\xi^{\vee\alpha}$, $\xi^{\vee\beta}$ или $\xi^{\vee\alpha}$, t). При этом казалось бы возникают новые условия, которые следует наложить на векторы разрыва. То же самое относится к использованию второго из уравнений (2.3). Покажем, что в действительности дополнительные условия эквивалентны старым (2.7), (2.8). Дифференцируя, к примеру, первое из уравнений (2.3) по $\xi^{\vee\alpha}$, $\xi^{\vee\beta}$, получаем

$$[u^i]^{+}_{-;\alpha\beta}=0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) эквивалентно следующему:

$$[u^i]^{+}_{-;\alpha\beta}x^{\vee j\alpha}x^{\vee k\beta}=0 \tag{2.14}$$

Используя лемму Адамара, условие жесткого контакта и соотношение $x^{\vee m}{}_{\alpha}x^{\vee j\alpha}=x^{mj}-N^{\vee m}N^{\vee j}$, уравнение (2.14) можно привести к виду

$$[\overset{i}{u}_{|mn}]^{+}_{-}\,(x^{mj}-N^{\vee m}N^{\vee m}N^{\vee j})\,(x^{nk}-N^{\vee n}N^{\vee k})=0 \tag{2.15}$$

Из (2.6), (2.15) вытекают следующие дополнительные условия, которым должны удовлетворять векторы разрывов отраженных-преломленных волн:

$$\left(\sum_{1}^{3}{}^{*} h^{*i}N_m{}^{*}N_n{}^{*}-\sum_{1}^{3}{}^{\circ} h^{\circ i}N_m{}^{\circ}N_n{}^{\circ}+h^iN_mN_n\right)(x^{mj}-N^{\vee m}N^{\vee j})\,(x^{nk}-N^{\vee n}N^{\vee k})=0 \tag{2.16}$$

Используя легко проверяемое соотношение

$$\frac{N_j{}^{*}}{C^{*}}(x^{jk}-N^{\vee j}N^{\vee k})=\frac{N_j{}^{\circ}}{C^{\circ}}(x^{jk}-N^{\vee j}N^{\vee k})=\frac{N_j}{C}(x^{jk}-N^{\vee j}N^{\vee k})=\frac{n^{\vee k}}{s^{\vee}}$$

условие (2.16) можно привести к виду

$$\frac{n^{\vee j}}{s^{\vee}}\frac{n^{\vee k}}{s^{\vee}}\left(\sum_{1}^{3}{}^{*} h^{*i}C^{*2}-\sum_{1}^{3}{}^{\circ} h^{\circ i}C^{\circ 2}+h^iC^2\right)=0 \tag{2.17}$$

Условия (2.7), (2.17), очевидно, эквивалентны.

Поступила 30 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cagniard L.* Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Gauthier-Villars, Paris, 1939.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Ф. Франк., Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.– М., ОНТИ, 1937.
3. *Зволинский Н. В.* Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1957, № 10.
4. *Скуридин Г. А., Гвоздев А. А.* О краевых условиях для скачков разрывных решений динамических уравнений теории упругости. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1958, № 2.
5. *Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 5. Изд-во ЛГУ, 1961.
6. *Luneburg R. K.* Matematical theory of optics. Providence, Brown Univ., 1944.
7. *Keller J. B.* Geometrical acoustics. The theory of weak shock waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.
8. *Wright T. W.* Reflection of oblique shock waves in elastic solids. Internat. J. Solids and Structures, 1971, vol. 7, No. 2.
9. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
10. *Jeffrey A.* The propagation of weak discontinuities in quasiliner hyperbolic sistems with discontinuous coefficients, pt 1. Fundamental theory. Appl. Anal., 1973, vol. 3, No. 1; 1974, vol. 3, No. 4.
11. *Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ. М., Физматгиз, 1963.
12. *Truesdell C., Toupin R.* The classical field theories, In: Handbuch Phys., Bd 3/1, Berlin, Springer, 1960.