

ОБ УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ
У РЕБРА СОСТАВНОГО КЛИНА

О. К. АКСЕНТЯН, О. Н. ЛУЩИК

(Ростов-на-Дону)

Находятся условия отсутствия высокой концентрации напряжений у ребра составной трехмерной плиты для различных способов закрепления образующих его поверхностей. Строятся кривые, которые при фиксированных значениях упругих констант на плоскости геометрических параметров, характеризующих тело, разделяют области конечных и бесконечных напряжений у ребра.

1. Рассмотрим окрестность ребра составного тела, у которого сечение, перпендикулярное ребру, состоит из двух клиньев с углами раствора α и β .

В [1] было показано, что напряжения в окрестности ребра такого тела имеют особенность вида ρ^{2k-1} , где ρ — расстояние от ребра, а k — корни уравнения

$$F(\alpha, \beta, k)F_1(\alpha, \beta, k) = 0 \quad (1.1)$$

В случае свободных от напряжений поверхностей, образующих ребро, будем иметь

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, k) = & g^2(1-\sigma_2)^2(\sin^2 k\alpha - k^2 \sin^2 \alpha) + (1-\sigma_1)^2(\sin^2 k\beta - \\ & - k^2 \sin^2 \beta) + 1/4(1-g)^2(\sin^2 k\alpha - k^2 \sin^2 \alpha)(\sin^2 k\beta - k^2 \sin^2 \beta) + \\ & + 2g(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)[\sin k\alpha \sin k\beta \cos k(\alpha+\beta) - k^2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta)] + \\ & + g(1-g)(1-\sigma_2)(\sin^2 k\alpha - k^2 \sin^2 \alpha)\sin^2 k\beta + \\ & + (g-1)(1-\sigma_1)(\sin^2 k\beta - k^2 \sin^2 \beta)\sin^2 k\alpha \\ F_1(\alpha, \beta, k) = & \cos k\alpha \sin k\beta + g \sin k\alpha \cos k\beta, \quad g = G_1/G_2, \quad \operatorname{Re} k \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где G_1 , σ_1 и G_2 , σ_2 — соответственно модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов первого (с углом α) и второго (с углом β) клиньев.

Очевидно, что для ограниченности напряжений (на практике — высокой концентрации) в окрестности ребра достаточно, чтобы $\operatorname{Re} k \geq 1$.

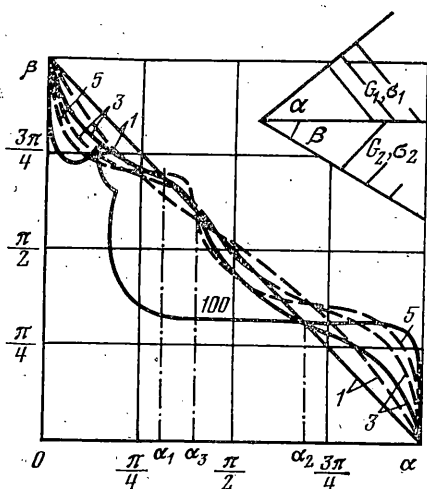
Исследованию первого уравнения (1.2) посвящена работа [2], в которой численно определяются его корни, в том числе и комплексные, для некоторых определенных значений углов. Однако следует отметить, что результаты этой работы трудно использовать, когда нужно при соединении двух конкретных материалов так подобрать их углы раствора, чтобы напряжения были ограничены в окрестности ребра.

Корни первого уравнения (1.2) зависят от пяти параметров, характеризующих геометрию тела (α , β) и упругие свойства материалов (σ_1 , σ_2 , g). Число упругих параметров можно было бы сократить до двух [2], но это представляется неудобным для приложений. Выделить область ограниченных напряжений в пространстве параметров α , β , σ_1 , σ_2 , g затруднительно, поэтому будем строить сечения этой области плоскостями $g=C$, $\sigma_1=C_1$, $\sigma_2=C_2$; таким образом, полученные ниже результаты дополняют исследование, проведенное в [2].

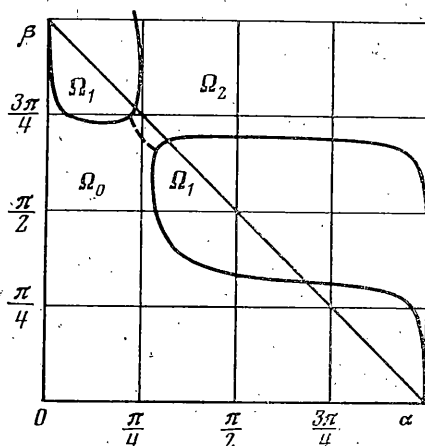
2. Рассмотрим уравнение $F(\alpha, \beta, k)=0$ в случае свободных от напряжений поверхностей, образующих ребро. Предполагая, что вблизи границы области высокой концентрации напряжений наименьший корень этого уравнения действительный, и учитывая, что значение $k=1$ всегда является его корнем, упомянутую выше границу можно представить зависимостью $F_k'(\alpha, \beta, 1)=0$, т. е.

$$g(1-\sigma_2) \sin \alpha (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) [g(1-\sigma_2) + (1-g) \sin^2 \beta] + (1-\sigma_1) \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta) [(1-\sigma_1) + (g-1) \sin^2 \alpha] + g(1-\sigma_1)(1-\sigma_2) [\alpha \cos \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta) + \beta \sin \alpha \cos \beta \cos(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta) \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha+\beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta)] = 0 \quad (2.1)$$

Кривая, определяемая уравнением (2.1), ближайшая к началу координат, для $\sigma_1=\sigma_2=0.3$ и $g=3$ показана сплошной линией 3 на фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

При $g=1$ она вырождается в прямую $\alpha+\beta=\pi$, что совпадает с результатами [3, 4] для однородного клина со свободными от напряжений гранями, у которого концентрация напряжений отсутствует, если угол не больше развернутого. Область конечных напряжений у ребра лежит по одну сторону с началом координат от ближайшей к нему кривой, определяемой уравнением (2.1).

Но при увеличении g ($g>10$) картина изменяется: нарушается монотонность кривой (2.1), и появляются такие значения α , для которых вблизи прямой $\alpha+\beta=\pi$ нет соответствующих β , определяемых уравнением (2.1). На фиг. 2 решение уравнения (2.1) при $\sigma_1=\sigma_2=0.3$ и $g=20$ показано сплошной линией.

Численный анализ, основанный на использовании принципа аргумента, показывает, что для таких α число корней уравнения $F(\alpha, \beta, k)=0$ в полосе $0 < \text{Re } k < 1$ меняется с ростом β следующим образом: для малых β нет корней, потом, начиная с некоторого β , появляются сразу два корня. Это заставляет предположить, что здесь корень уравнения $F(\alpha, \beta, k)=0$ попадает в полосу $0 < \text{Re } k < 1$ через точки с координатами $x=1, y=\pm \epsilon$ ($\epsilon \neq 0$). В этом случае граница раздела определяется системой двух трансцендентных уравнений

$$\text{Re } F(\alpha, \beta, 1+iy)=0, \text{Im } F(\alpha, \beta, 1+iy)=0 \quad (2.2)$$

Решая эту систему численно, достраиваем границу раздела областей конечных и бесконечных напряжений у ребра — пунктирная линия на фиг. 2.

По принципу аргумента численно установлено, что в области Ω_0 (фиг. 2) нет, корней с $0 < \text{Re } k < 1$, в областях Ω_1 — один такой корень, следовательно, он вещественный, в области Ω_2 — два корня с $0 < \text{Re } k < 1$. Это подтверждается и результатами [2, 5-7], в которых рассмотрены частные случаи растворов углов составного клина.

Аналогично строятся границы раздела для других значений упругих постоянных. На фиг. 1 сплошными линиями приведены границы для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$, а пунктирными — для $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.2$. Цифрами указаны значения g .

Анализ уравнения (2.1) показывает, что кривые, соответствующие различным значениям g , при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ пересекаются в одной точке с координатами $\alpha = \pi - \arcsin \sqrt{1 - \sigma}$, $\beta = \arcsin \sqrt{1 - \sigma}$; кривые, соответствующие различным σ_1 и σ_2 , не пересекаются в одной точке, что из-за малости масштаба не заметно на фиг. 1.

Далее, представляют интерес координаты точек пересечения кривых с прямой $\alpha + \beta = \pi$. Как было сказано выше, при небольших значениях g ($g < 10$) граница раздела определяется только уравнением (2.1). Тогда точки пересечения границы с прямой $\alpha + \beta = \pi$ (сплошная линия 1 на фиг. 1) определяются корнями уравнений

$$\sin \alpha = 0, \quad \sin^2 \alpha = \frac{g(1 - \sigma_2) - (1 - \sigma_1)}{g - 1}, \quad \alpha + \frac{\pi(1 - \sigma_1)}{g(1 - \sigma_2) - (1 - \sigma_1)} = \text{tg } \alpha \quad (2.3)$$

Второе уравнение в (2.3) имеет два корня α_1 и α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$) в интервале $(0, \pi)$, если выполняются одновременно два неравенства $g > (1 - \sigma_1)/(1 - \sigma_2)$ и $g > \sigma_1/\sigma_2$. Третье уравнение в (2.3) имеет корень α_3 в интервале $(0, \pi/2)$, если выполняется первое из этих неравенств, а если оно не выполняется, то уравнение имеет соответствующий корень в интервале $(\pi/2, \pi)$. На фиг. 1 указаны точки α_1 , α_2 , α_3 для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ и $g = 3$.

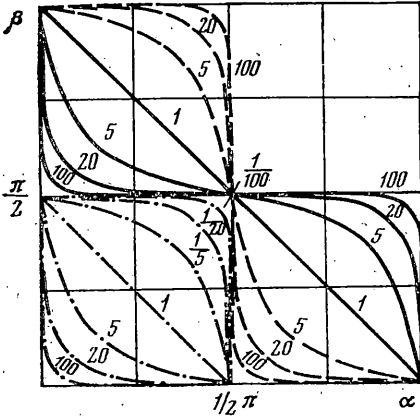
Следовательно, для рассматриваемого соединения двух различных материалов можно подобрать такие растворы углов α и β , что напряжения у ребра будут конечными, хотя $\alpha + \beta > \pi$, в то время как для однородного клина угол при вершине должен быть не больше развернутого. А именно, в случае, если упругие постоянные соединяемых материалов удовлетворяют двум неравенствам, приведенным выше, высокой концентрации напряжений не будет, когда угол более жесткого материала α заключен между α_1 и α_3 или больше α_2 , но меньше π . Если же хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, напряжения будут конечными, когда $\alpha_3 \leq \alpha \leq \pi$. Угол β не должен при этом выходить за граничную кривую (фиг. 1).

Для больших значений g , когда часть границы определяется системой (2.2), тоже всегда можно подобрать раствор угла α более жесткого материала таким образом, что концентрации напряжений у ребра не будет, хотя сумма углов и больше π , а именно, α должно быть из интервала (α_2, π) . При этом угол β менее жесткого материала должен быть острым и лежать ниже граничной кривой (фиг. 1 и 2).

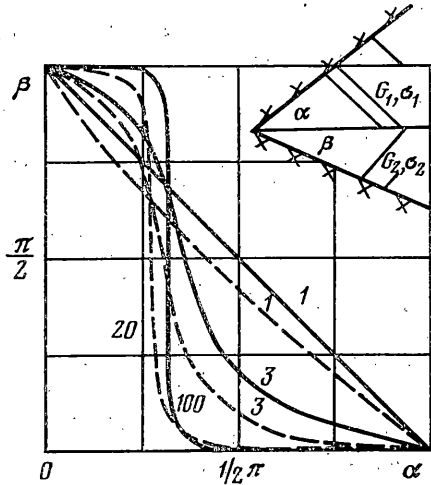
Следует отметить, что с ростом g , как это видно на фиг. 1 для $g = 100$, граничные кривые стремятся к ломаной $\alpha = 0$, $\beta = \arcsin \sqrt{1 - \sigma_2}$, $\alpha = \pi$. Причем эти предельные значения совпадают со значениями углов раздела областей конечных и бесконечных напряжений в вершине плоского однородного клина с углом α при свободных от напряжений гранях и плоского однородного клина с углом β , у которого одна грань свободна от напряжений, а другая жестко закреплена [3, 4].

Рассмотрим второе уравнение в (1.2), все корни которого действительны. Границей раздела областей конечных и бесконечных напряжений у ребра в этом случае будет ближайшая к началу координат кривая, определяемая уравнением $F_1(\alpha, \beta, 1) = 0$, что совпадает с результатами [8, 9]. На фиг. 3 сплошными линиями показаны эти границы; цифры над кривыми соответствуют значению g . Бесконечные напряжения у ребра отсутствуют в областях, лежащих по одну сторону с началом координат от кривых.

Область, в которой напряжения у ребра конечны в общем случае загрузки тела (когда есть и кручение, и плоская деформация), представляет собой пересечение соответствующих областей, расположенных на фиг. 1 и 3.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Рассмотрим второй случай граничных условий, а именно, когда поверхности, образующие ребро составного тела, жестко закреплены. Согласно [1], имеем

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \beta, k) = & \left(\frac{1-\sigma_2}{3-4\sigma_2} \right)^2 \left[\sin^2 k\alpha - \left(\frac{k}{3-4\sigma_1} \right)^2 \sin^2 \alpha \right] + \\
 & + g^2 \left(\frac{1-\sigma_1}{3-4\sigma_1} \right)^2 \left[\sin^2 k\beta - \left(\frac{k}{3-4\sigma_2} \right)^2 \sin^2 \beta \right] + \\
 & + \left(\frac{1-g}{2} \right)^2 \left[\sin^2 k\alpha - \left(\frac{k}{3-4\sigma_1} \right)^2 \sin^2 \alpha \right] \left[\sin^2 k\beta - \left(\frac{k}{3-4\sigma_2} \right)^2 \sin^2 \beta \right] + \\
 & + (g-1) \frac{1-\sigma_2}{3-4\sigma_2} \left[\sin^2 k\alpha - \left(\frac{k}{3-4\sigma_1} \right)^2 \sin^2 \alpha \right] \sin^2 k\beta + \\
 & + g(1-g) \frac{1-\sigma_1}{3-4\sigma_1} \left[\sin^2 k\beta - \left(\frac{k}{3-4\sigma_2} \right)^2 \sin^2 \beta \right] \sin^2 k\alpha + \\
 & + 2g \left(\frac{1-\sigma_1}{3-4\sigma_1} \right) \left(\frac{1-\sigma_2}{3-4\sigma_2} \right) \left[\sin k\alpha \sin k\beta \cos k(\alpha+\beta) - \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta)}{(3-4\sigma_1)(3-4\sigma_2)} \right] \\
 F_1(\alpha, \beta, k) = & g \cos k\alpha \sin k\beta + \sin k\alpha \cos k\beta \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Бесконечные напряжения в окрестности ребра будут отсутствовать, если $\text{Re } k \geq 1$. В [10] был сделан частичный анализ уравнения $F(\alpha, \beta, k) = 0$ для случая плоского напряженного состояния при некоторых фиксированных значениях суммарного угла раствора.

Предполагая, что вблизи границы раздела областей конечных и бесконечных напряжений у ребра корни уравнения (3.1) действительны (ниже это будет обосновано), упомянутую границу можно представить уравнением $F(\alpha, \beta, 1) = 0$, т. е.

$$4(1-2\sigma_1)(1-\sigma_2)\sin^2\alpha + 4g^2(1-2\sigma_2)(1-\sigma_1)\sin^2\beta + 4(1-g)[g(1-2\sigma_2) - (1-2\sigma_1)]\sin^2\alpha\sin^2\beta + g[(3-4\sigma_1)(3-4\sigma_2) - 1]\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = 0 \quad (3.3)$$

Кривые, ближайшие к началу координат, определяемые уравнением (3.3), на фиг. 4 показаны сплошными линиями для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ и пунктирными для $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.2$. Цифрами указаны значения g :

Численно, по принципу аргумента, установлено, что в областях, лежащих левее этих кривых, нет корней уравнения (3.1) в полосе $0 < \operatorname{Re} k < 1$. Кроме того, численный анализ показал, что имеющиеся в этих областях комплексно-сопряженные корни уравнения (3.1) с наименьшей положительной реальной частью переходят в пару действительных корней в области, где их реальная часть больше единицы. Следовательно, в областях, лежащих по одну сторону с началом координат от этих кривых, напряжения в окрестности жестко закрепленного угла составного клина ограничены.

С увеличением g при фиксированных σ_1 и σ_2 , как это видно на фиг. 4 для $g=20$ и $g=100$, кривые, определяемые уравнением (3.3), приближаются к ломаной $\beta = \pi$, $\alpha = \arcsin \sqrt{1-\sigma_1}$, $\beta = 0$, а область конечных напряжений вырождается при $g \rightarrow \infty$ в прямоугольник $0 \leq \alpha \leq \arcsin \sqrt{1-\sigma_1}$, $0 \leq \beta \leq \pi$, что совпадает с результатами [3, 4] для однородного плоского жестко закрепленного клина с углом β и однородного клина с углом α при смешанных условиях закрепления.

Заметим, что в рассматриваемом случае соединения двух различных материалов, упругие постоянные которых удовлетворяют одному из следующих условий: коэффициент Пуассона более жесткого материала σ_1 не меньше σ_2 или $\sigma_1 < \sigma_2$, а параметр g удовлетворяет неравенствам

$$g > \frac{(1-2\sigma_1)\sigma_2}{(1-2\sigma_2)_1} \quad \text{или} \quad 1 < g < \frac{(1-2\sigma_1)(1-\sigma_2)}{(1-2\sigma_2)(1-\sigma_1)}$$

всегда можно подобрать такие растворы углов α и β , что бесконечные напряжения у ребра будут отсутствовать, хотя $\alpha + \beta > \pi$, в то время как для однородного жестко закрепленного клина угол для любого материала должен быть не больше развернутого. А именно, угол более жесткого материала α должен удовлетворять условию

$$\alpha < \arcsin \left[\frac{g^2(1-\sigma_1)(1-2\sigma_2) + (1-\sigma_2)(1-2\sigma_1) - g(2-3\sigma_1-3\sigma_2+4\sigma_1\sigma_2)}{(g-1)[g(1-2\sigma_2) - (1-2\sigma_1)]} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

Угол β при этом не должен выходить за граничную кривую, определяемую уравнением (3.3).

Рассмотрим далее уравнение (3.2), все корни которого действительны. Область конечных напряжений у ребра в этом случае будет лежать по одну сторону с началом координат от ближайшей к нему кривой, определяемой уравнением $F_1(\alpha, \beta, 1) = 0$. Эти кривые показаны пунктирными линиями на фиг. 3 для $g=5, 20, 100$.

Область конечных напряжений у жестко закрепленного ребра составного тела в общем случае загрузжения (когда есть и кручение, и плоская деформация), представляющая собой пересечение соответствующих областей на фиг. 3 и 4, совпадает при данных граничных условиях с областью конечных напряжений в случае плоской деформации.

4. При смешанных граничных условиях, когда одна из поверхностей, образующих ребро (а именно та, которая принадлежит клину с углом α), свободна от напряжений, а другая, принадлежащая клину с углом β , жест-

ко закреплена, уравнение (4.1) принимает вид [1]:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \beta, k) = & (1-\sigma_2)^2(3-4\sigma_1) \left[\sin^2 k\alpha - \frac{4(1-\sigma_1)^2 - k^2 \sin^2 \alpha}{3-4\sigma_1} \right] + \\
 & + (1-\sigma_1)^2(3-4\sigma_2) \left[\sin^2 k\beta - \frac{4(1-\sigma_2)^2 - k^2 \sin^2 \beta}{3-4\sigma_2} \right] + \\
 & + (1-g)(1-\sigma_2)(3-4\sigma_2) [\sin^2 k\alpha - k^2 \sin^2 \alpha] \sin^2 k\beta + \\
 & + (1-g)(1-\sigma_1)(3-4\sigma_2)^2 \left[\sin^2 k\beta - \frac{k^2 \sin^2 \beta}{(3-4\sigma_2)^2} \right] \sin^2 k\alpha - \\
 & - \frac{(g-1)^2}{4} (3-4\sigma_2)^2 [\sin^2 k\alpha - k^2 \sin^2 \alpha] \left[\sin^2 k\beta - \frac{k^2 \sin^2 \beta}{(3-4\sigma_2)^2} \right] + \\
 & + 4(1-\sigma_1)^2(1-\sigma_2)^2 + 2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2) \{ gk^2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha+\beta) - \\
 & - (3-4\sigma_2) \sin k\alpha \sin k\beta [2 \sin k\alpha \sin k\beta - g \cos k(\alpha-\beta)] \}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$F_1(\alpha, \beta, k) = \cos k\alpha \cos k\beta - g \sin k\alpha \sin k\beta$$

Предполагая, что вблизи границы раздела областей конечных и бесконечных напряжений у ребра наименьший корень первого уравнения в (4.1) действительный [11], упомянутую границу можно представить в виде $F(\alpha, \beta, 1) = 0$, т. е.

$$\begin{aligned}
 & 2(1-\sigma_2) [\sin^2 \alpha - (1-\sigma_1)] + 2(1-\sigma_1) [\sin^2 \beta - (1-\sigma_2)] + \\
 & + 2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2) - 4(g-1)(1-2\sigma_2) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \\
 & + \sin \alpha \sin \beta \{ g \cos(\alpha+\beta) - (3-4\sigma_2) [2 \sin \alpha \sin \beta - g \cos(\alpha-\beta)] \} = 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $g < 1$, т. е. более жесткий материал закреплён. На фиг. 5 сплошной линией ($g = 1/3$) показана ближайшая к началу координат кривая, определяемая уравнением (4.2), для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$. При $g \rightarrow 1$ она вырождается в прямую $\alpha + \beta = 57^\circ$, что соответствует величине угла, разграничивающего области конечных и бесконечных напряжений в вершине однородного клина с углом $(\alpha + \beta)$ [3, 4]. Причем область конечных напряжений в этом случае соответствует углам $0 \leq \alpha + \beta \leq 57^\circ$.

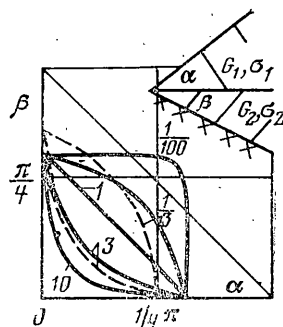
С уменьшением g при фиксированных σ_1 и σ_2 , как это видно на фиг. 5 для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ и $g = 0.01$ (сплошная линия), область конечных напряжений вырождается в прямоугольник $0 \leq \alpha \leq \arcsin \sqrt{1-\sigma_1}$, $0 \leq \beta \leq \arcsin \sqrt{1-\sigma_2}$, что совпадает с результатами [3, 4] для однородных клиньев с углами α и β при смешанных граничных условиях.

Заметим, что при достаточно большой разнице жесткостей ($g < 1/10$) соединяемых материалов в этом случае граничных условий можно подобрать такие значения углов α и β , что концентрации напряжений не будет, даже если суммарный угол тупой.

Для $g > 1$, т. е. когда более жесткий материал имеет свободную от напряжений поверхность, граничные кривые, определяемые уравнением (4.2), показаны на фиг. 5 сплошной ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$) и пунктирной ($\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0.2$) линиями 3 ($g = 3$).

С ростом g эти кривые приближаются к координатным осям (сплошная линия на фиг. 5, соответствующая $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ и $g = 10$). Следовательно, при смешанных граничных условиях на поверхностях, образующих ребро составного тела, желательно, чтобы менее жесткий материал имел свободную от напряжений поверхность. Особенно это важно, когда жесткости соединяемых материалов сильно отличаются.

Граничные кривые в случае деформации кручения, определяемые уравнением $F_1(\alpha, \beta, 1) = 0$, изображены на фиг. 3 штрихпунктирными линиями для $g = 1, 5, 20, 100, 1/5, 1/20, 1/100$.



Фиг. 5

Область, в которой напряжения у ребра конечны в общем случае нагружения тела (когда есть и кручение, и плоская деформация), представляет собой пересечение соответствующих областей, построенных отдельно для кручения и для плоской деформации.

Поступила 31 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. Vogy D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1971, vol. 38, No 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1971, т. 38, № 2.)
3. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
5. Vogy D. B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E. 1968, т. 35, № 3.)
6. Gdoutos E. E., Theocaris P. S. Stress concentrations at the apex of a plane indenter acting on an elastic half plane. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, vol. 42, No. 3.
7. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. Bull. Seismolog. Soc. Amer., 1959, vol. 49, No. 2.
8. Rao A. K. Stress concentrations and singularities at interface corners. Z. angew. Math. und Mech., 1971, Bd 51, No 5.
9. Алексанян Р. К., Чобанян К. С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 6.
10. Аветисян А. Г., Чобанян К. С. Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, № 6.
11. Аветисян А. Г. Исследование характера напряженного состояния в частично заделанной окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, № 5.