

Здесь T_1 , T_2 , l_1 , l_2 — параметры фильтра. Аналогично п. 1 имеем в невозмущенном движении

$$y'' + l_2 T_2^{-1} y' + l_1 (T_1 T_2)^{-1} y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

т. е. $y \equiv 0$, и условия невозмущаемости по-прежнему выполняются. Порядок фильтра, следовательно, может быть увеличен без нарушения условий невозмущаемости.

Устойчивость гироскопа с фильтрами второго порядка и выше требует дополнительного рассмотрения.

Поступила 5 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы. М., «Наука», 1966.
2. Шульман И. Ш. Достаточные условия асимптотической устойчивости корректируемого гироскопа. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
3. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.

УДК 531.383

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ АСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С УПРУГИМ КАРДАНОВЫМ ПОДВЕСОМ

В. М. РУДЕНКО

(Москва)

Определяются аналитические выражения для вычисления приближенных значений собственных частот колебаний астатического гироскопа с упругим кардановым подвесом. Для каждой из частот получены выражения оценок сверху и снизу, причем эти оценки не являются асимптотическими.

Рассмотрим астатический гироскоп в кардановом подвесе (фиг. 1). Система координат $Oxyz$ неподвижна в абсолютном пространстве, и в начальный момент времени оси карданова подвеса направлены вдоль осей x , y и z , а центр карданова подвеса совпадает с точкой O .

Составляя уравнения движения полученной механической системы, будем считать, что каждое из трех тел — ротор, кожух и наружное кольцо — имеют по три угловые степени свободы. Оставляя в уравнениях движения лишь линейные члены, получим систему линейных дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение которой имеет восемнадцатый порядок.

Однако эта система уравнений распадается на независимые между собой подсистемы. Например, отделяются уравнения угловых маятниковых колебаний наружного кольца вокруг оси y и уравнения, описывающие совместные угловые маятниковые колебания кожуха и наружного кольца вокруг оси z . Собственное вращение ротора определяет циклическую координату, и, кроме того, система линейных дифференциальных уравнений безразлична к аддитивным составляющим углов поворота наружного кольца вокруг оси x и кожуха вокруг оси y .

Таким образом задача сводится к исследованию системы линейных дифференциальных уравнений восьмого порядка, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\lambda^2 [\lambda^2 (b-1) + b] [\lambda^4 (a-b) (b-1) + \lambda^2 (\varepsilon (a-1) + b(a-b)) + \varepsilon a] + \lambda^2 [\lambda^2 (b-1) + 1] [\lambda^4 (a-b) (b-1) + \lambda^2 (\varepsilon (a-1) + a-b) + \varepsilon] = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) для определения собственных частот записано в безразмерных переменных

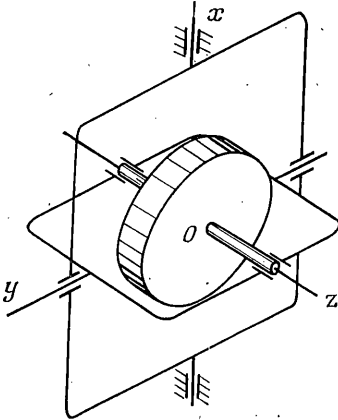
$$\lambda^2 = \lambda^2 A_3 / K_3, \quad a = (A_1 + A_2 + A_3) / A_3, \quad b = (A_2 + A_3) / A_3, \quad \varepsilon = K_2 / K_3, \quad \Omega^2 = H^2 / K_3 A_3$$

Здесь A_1 , A_2 , A_3 — моменты инерции наружного кольца, кожуха и ротора вокруг оси x ; K_2 — жесткость крепления кожуха относительно наружного кольца, K_3 — жесткость крепления ротора относительно кожуха, H — кинетический момент и λ^2 — характеристическое число. Заметим, что характеристическое уравнение, как и собственные частоты, является инвариантом механической системы и не зависит от способа его получения.

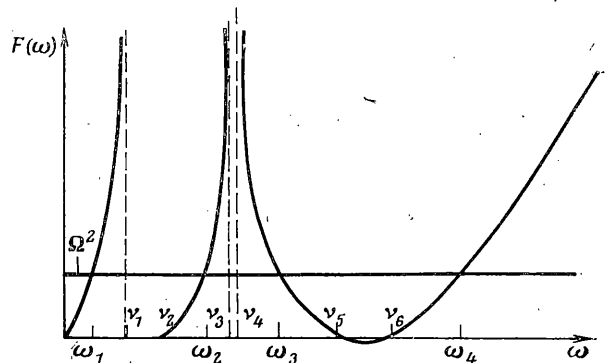
Производя замену переменных $\lambda = i(\omega)^{1/2}$, где i — комплексная единица, и разрешая уравнение (1) относительно Ω^2 , представим характеристическое уравнение системы в форме

$$\Omega^2 = \frac{\omega(\omega - \nu_2)(\omega - \nu_5)(\omega - \nu_6)}{(\omega - \nu_1)(\omega - \nu_3)(\omega - \nu_4)} \quad (2)$$

Обозначим правую часть уравнения (2) через $F(\omega)$. В уравнении (2) ν_2, ν_5 и ν_6 представляют собой нули, а ν_1, ν_3 и ν_4 — полюсы функции $F(\omega)$. График функции $F(\omega)$ изображен на фиг. 2. Пересечения графика функции $F(\omega)$ с прямой горизонтальной линией $F = \Omega^2$ дают значения корней уравнения (2), которые обозначим через ω_1, ω_2 ,



Фиг. 1



Фиг. 2

ω_3 и ω_4 соответственно¹. Из графика функции $F(\omega)$ видно, что первую ветвь характеризуют полюс $\omega = \nu_1$ и нули $\omega = 0, \omega = \nu_2$; вторую ветвь графика характеризуют полюсы $\omega = \nu_3, \omega = \nu_4$ и нуль функции $F(\omega)$ $\omega = \nu_2$; третью ветвь характеризуют полюсы $\omega = \nu_5, \omega = \nu_6$ и нули $\omega = \nu_5, \omega = \nu_6$ и, наконец, четвертая ветвь определяется нулями $\omega = \nu_5, \omega = \nu_6$ и наклонной асимптотой $F = \omega$.

Для получения оценок корня ω_j ($j=1, 2, 3, 4$) уравнения (2) в функции $F(\omega)$ выделим часть множителей, характеризующих j -ю ветвь, а оставшийся множитель заменим его максимальным или минимальным значением на отрезке, соответствующем этой ветви. В результате будем иметь мажорирующие функции для каждой ветви графика $F(\omega)$.

В силу монотонности на соответствующих отрезках мажорант, минорант и функции $F(\omega)$, приравнявая полученные функции $\Omega^2 = \text{const}$, получим оценки сверху и снизу для корней уравнения (2).

Поясним указанную процедуру на примере определения оценок корня ω_1 . Представим выражения для $F(\omega)$ в виде

$$F(\omega) = \frac{\omega(\omega - \nu_2)}{(\omega - \nu_1)} K(\omega), \quad K(\omega) = \frac{(\omega - \nu_5)(\omega - \nu_6)}{(\omega - \nu_3)(\omega - \nu_4)}$$

График функции $K(\omega)$ представлен на фиг. 3. Функция $K(\omega)$ является монотонной на отрезке $[0, \nu_1]$, где справедливо неравенство (3)

$$\frac{\omega(\omega - \nu_2)}{(\omega - \nu_1)} K(0) \leq F(\omega) \leq \frac{\omega(\omega - \nu_2)}{(\omega - \nu_1)} K(\nu_1) \quad (3)$$

Левая и правая части неравенства (3) представляют собой функции, ограничивающие соответственно снизу и сверху функцию $F(\omega)$ для каждого значения ω , принадлежащего отрезку $[0, \nu_1]$. В полученное неравенство (3) необходимо подставить значения ν_j ($j=1, 2, \dots, 6$), зависящие от параметров системы. Приравнявая левую и правую части неравенства (3) величине $\Omega^2 = \text{const}$, получим соответственно

¹ Журавлев В. Ф. Теория вибрации гироскопов. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1972, препринт № 22.

нижнюю и верхнюю оценки для корня ω_1 . Однако зависимости v_1, v_4 и v_2, v_6 от параметров системы являются сложными алгебраическими выражениями и определяются соответственно двумя квадратными уравнениями (4)

$$\begin{aligned} v_2^- v_1^- &= \left[\frac{\varepsilon(a-1)}{(a-b)(b-1)} + \frac{1}{b-1} \right] + \frac{\varepsilon}{(a-b)(b-1)} = 0 \\ v_2^- v_4^- &= \left[\frac{\varepsilon(a-1)}{(a-b)(b-1)} + \frac{b}{b-1} \right] + \frac{\varepsilon a}{(a-b)(b-1)} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Оценки для ω_1 , полученные таким образом, будут сложными. Поэтому произведем оценку корней уравнений (4) более простыми выражениями. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} v_1^- &= \frac{\varepsilon}{a-b+\varepsilon(a-1)} \leq v_1 \leq \frac{\varepsilon}{a-b} = v_1^+, \quad v_2^- = \frac{\varepsilon a}{b(a-b)+\varepsilon(a-1)} \leq v_2 \leq \frac{\varepsilon a}{b(a-b)} = v_2^+ \\ v_4^- &= \frac{1+\varepsilon}{b-1} \leq v_4 \leq \frac{1+\varepsilon}{b-1} + \frac{\varepsilon^2(a-1)}{(a-b)[a-b+\varepsilon(a-1)]} = v_4^+ \\ v_6^- &= \frac{b^2+\varepsilon}{b(b-1)} \leq v_6 \leq \frac{b^2+\varepsilon}{b(b-1)} + \frac{\varepsilon^2 a(a-1)}{b(a-b)[(a-b)b+\varepsilon(a-1)]} = v_6^+ \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения для v_3 и v_5 определяются точно: $v_3 = (b-1)^{-1}$, $v_5 = b(b-1)^{-1}$.

Подставим в левую и правую части неравенства (3) оценки нулей и полюсов функции $F(\omega)$ так, чтобы оба неравенства (3) усилились.

Исходя из неравенств (3) и (5), можно написать выражения для функций, ограничивающих $F(\omega)$ на соответствующем отрезке, в виде

$$\frac{\omega \varepsilon a b}{\omega^2(b-1)(a-b) - \omega[\varepsilon(a-1) + a - b] + \varepsilon} \geq F(\omega) \geq \frac{\omega(\omega - v_2^-)}{(\omega - v_1^+)} \left[1 + \frac{\varepsilon}{b(b-1)} \right] \quad (6)$$

Приравняв обе части неравенства (6) $\Omega^2 = \text{const}$ и пользуясь неравенством вида $(1-x)^{1/2} \leq 1 - 1/2x$, находим из полученных уравнений значения оценок корня

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \Omega^2}{(a-b)\Omega^2 + \varepsilon[(a-1)\Omega^2 + ab]} \leq \omega_1 \leq R - \left[R^2 - \frac{\varepsilon \Omega^2}{(a-b)\Lambda b^2} \right]^{1/2} \\ R = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon a}{b(a-b) - (a-1)\varepsilon} + \frac{\Omega^2}{\Lambda b^2} \right], \quad \Lambda = \frac{b(b-1) + \varepsilon}{b(b-1)} \end{aligned} \quad (7)$$

Оценки других корней уравнения (2) $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ находятся аналогичным образом. Оценки корня ω_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + R_1 \right] - \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + R_1 \right) \right]^2 + R_1 \left(\frac{1}{b-1} + \frac{\varepsilon a}{b(a-b)} \right) \right\}^{1/2} \leq \\ \leq \omega_2 \leq \frac{\varepsilon a(b-1) + \Omega^2(1+\varepsilon)(a-b)}{(a-b)(b-1)[b + \Omega^2(1+\varepsilon)]}, \quad R_1 = ab^2[(a-b)(b-1)\Omega^2]^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Корень ω_3 оценивается выражениями

$$\begin{aligned} \frac{b}{b-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + R_2 \right) - \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + R_2 \right]^2 + R_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{b} \right) \right\}^{1/2} \leq \omega_3 \leq \\ \leq \frac{1+\varepsilon}{b-1} + \frac{\varepsilon(a-1)}{(a-b)[a-b+\varepsilon(a-1)]} + \frac{b-\varepsilon}{b + [\Omega^2(b-1)b]^{1/2}} \\ R_2 = \frac{\Omega^2(b-1)}{b} \left(\frac{b}{b-1} - \frac{\varepsilon}{a-b} \right) \left(\frac{b}{b-1} - \frac{\varepsilon a}{b(a-b)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

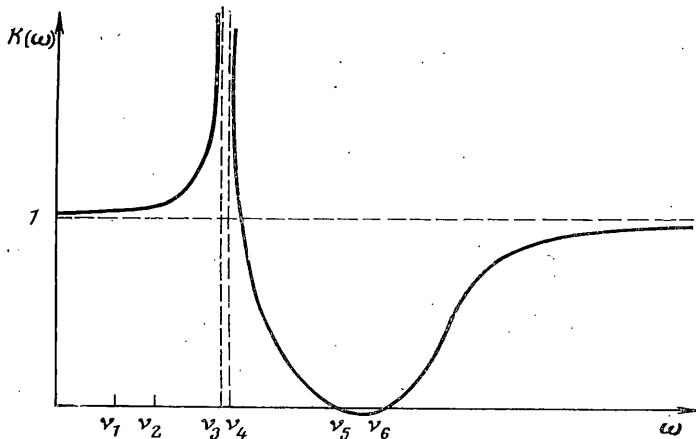
Выражения (10) дают оценки корня ω_4

$$\frac{b}{b-1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + R_2 \right] + \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + R_2 \right] + R_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{b} \right) \right\}^{1/2} \leq \omega_4 \leq \frac{b}{b-1} + R_3 + (R_3^2 + \Omega^2)^{1/2} \quad (10)$$

В неравенстве (10) величина R_2 определяется из выражений (9), а

$$R_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + \frac{\varepsilon^2 a(a-1)}{b(a-b)[(a-b)b + \varepsilon(a-1)]} + \Omega^2 \right]$$

Так же, как были получены оценки, находятся приближенные формулы для определения корней ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4 .



Фиг. 3

Заменяя в уравнении (2) $F(\omega)$ на функцию, удовлетворяющую неравенству (6), получаем уравнение

$$\Omega^2 = -\omega \varepsilon a b (\omega - \nu_1^+) (a - b)^{-1} \quad (11)$$

Решение уравнения (11) дает формулу для вычисления приближенных значений корня ω_4 . Функция, стоящая в правой части уравнения (11), выбрана в таком виде для того, чтобы решение уравнения (11) имело наиболее простой вид

$$\omega_4 \approx \varepsilon \Omega^2 [\Omega^2 (a - b) + \varepsilon a b]^{-1} \quad (12)$$

Аналогично получены формулы для определения приближенных значений других корней уравнения (2) ω_2 , ω_3 и ω_4 :

$$\omega_2 \approx \frac{\varepsilon(b-1)a + \Omega^2(a-b)}{(a-b)(b-1)(b+\Omega^2)}, \quad \omega_{3,4} \approx \frac{b}{b-1} + R_3 \mp \left[R_3^2 + \frac{(b-1)\Omega^2(b-\varepsilon)}{b^2} \right]^{1/2} \quad (13)$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{b(b-1)} + \frac{(b-1)\Omega^2}{b} \right)$$

Возвращаясь в выражениях (12) и (13) к размерным переменным, получим выражения для определения частот собственных колебаний астатического гироскопа с упругим кардановым подвесом

$$\lambda_1^0 = H [A_1 H^2 K_2^{-1} + (A_1 + A_2 + A_3)(A_2 + A_3)]^{-1/2}$$

$$\lambda_2^0 = \left[\frac{K_2 A_2 (A_1 + A_2 + A_3) + H^2 A_1}{A_1 A_2 (A_2 + A_3 + H^2 K_3^{-1})} \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$\lambda_{3,4}^0 = \left\{ \frac{K_3 (A_2 + A_3)}{A_2 A_3} + R_4 \mp \left[R_4^2 + \frac{A_2 H^2}{(A_2 + A_3) A_3^2} \left(\frac{K_3}{A_3} - \frac{K_2}{A_2 + A_3} \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

$$R_4 = \frac{A_3}{2(A_2 + A_3)} \left(\frac{K_2}{A_2} + \frac{A_2 H^2}{A_3} \right)$$

Выражения (14) позволяют установить ряд свойств поведения спектра собственных частот собственных колебаний астатического гироскопа с упругим кардановым подвесом при изменении параметров системы. Из полученных выражений видно, что когда жесткость крепления осей подвеса будет бесконечно большой, выражение для ω_1 дает известную формулу первой нутационной частоты [1, 2], а остальные частоты обращаются в бесконечно большие величины [3]. Надо отметить, что оценки получены без использования малости какого-либо параметра.

Анализируя формулы, определяющие λ_1^0 и λ_2^0 , получаем, что если величина $H^2[K_3(A_2+A_3)]^{-1}$ достаточно мала по отношению к единице (в реальных конструкциях это условие выполняется), то первая и вторая собственные частоты практически не зависят от жесткости K_3 крепления ротора относительно кожуха.

Из выражений для определения третьей и четвертой собственных частот гироскопа с упругим кардановым подвесом находим, что при достаточно малом ε (≈ 0.2) (отношении жесткости K_2 крепления кожуха относительно наружного кольца к жесткости крепления ротора относительно кожуха) значения λ_3^0 и λ_4^0 не зависят от A_1 — момента инерции наружного кольца относительно его оси вращения и от K_2 — жесткости крепления кожуха.

Подставляя конкретные значения параметров системы ($a=15.08$, $b=6.154$, $\Omega_2=0.629$, $\varepsilon=0.1076$) в выражения оценок (7)–(10) и приближенные формулы (12), (13), получим значения собственных частот, выраженных в герцах. Для первой частоты имеем $\lambda_1^- = 39.5$, $\lambda_1 \approx 40.6$, $\lambda_1^+ = 43.4$.

Здесь знак минус означает, что это оценка снизу, плюс — оценка сверху и знак приближенно означает, что это значение вычислено по приближенным формулам. Для других собственных частот будем иметь: $\lambda_2^- = 119.5$, $\lambda_2 \approx 128$, $\lambda_2^+ = 130.4$, $\lambda_3^- = 513.4$, $\lambda_3 \approx 514$, $\lambda_3^+ = 546$, $\lambda_4^- = 923.5$, $\lambda_4 \approx 922$, $\lambda_4^+ = 950.8$.

Точные значения частот собственных колебаний, определенные из уравнения (1) при помощи вычислительной машины, дают $\lambda_1 = 41.4$, $\lambda_2 = 121.5$, $\lambda_3 = 521.5$, $\lambda_4 = 935.7$.

Полученные численные результаты показывают, что погрешность полученных оценок и приближенных формул не превышает 5%.

Автор благодарит В. Ф. Журавлева и Д. М. Климова за постановку задачи и обсуждение изложенной работы.

Поступила 3 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Новожилев И. В. О «магнусовых уходах» гироскопа в кардановом подвесе конечной жесткости. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
3. Лазарев Ю. Ф. К вопросу о влиянии нутационных колебаний на уход свободного гироскопа в кардановом подвесе на неподвижном основании. Докл. Юбилейной научно-техн. конф. Томск. политехн. ин-та. Фак. автомат. систем., Томск, 1970.

УДК 534.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРОЙ ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. С. МИРКИНА

(Ленинград)

Предлагается метод исследования стохастических систем, позволяющий получить асимптотическое представление решений уравнений со случайными коэффициентами и уточнить структуру областей устойчивости. Рассмотрен пример: уравнение второго порядка со случайным коэффициентом.

1. В механических системах, подверженных случайному параметрическому возмущению, имеют место эффекты, аналогичные параметрическому резонансу в системах с периодическим возмущением. Так, в работах [1–4] показано, что подобный эффект возникает в системе, описываемой уравнением

$$x'' + 2\varepsilon^2 n x' + k_1^2 (1 + \varepsilon \xi_1(t)) x = 0 \quad (1.1)$$

в котором $\xi_1(t)$ — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_{\xi_1}(\omega)$, если $S_{\xi_1}(\omega)$ достаточно велика на частоте $\omega \approx 2k_1$. Это соответствует главному параметрическому резонансу в детерминированном уравнении Матье. В [3, 4] на основе рассмотрения уравнений для вторых моментов показано, что резонансные явления могут возникнуть, если $\xi_1(t)$ — узкополосный случайный процесс с несущей ча-