

**ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ  
ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ**

**О. И. ЗАЯЦ, А. А. СВЕШНИКОВ**

(Ленинград)

Исследование ошибок гировертикали с нелинейной коррекцией при обычных допущениях нормальности ошибок физического маятника сводится к решению уравнения Колмогорова для многомерного марковского процесса. Приводится решение этого уравнения и даются результаты расчетов, позволяющие оценить точность приближенных методов, используемых в аналогичных задачах. Полученные результаты применимы не только к задачам гироскопии, но и к целому ряду нелинейных задач, возникающих в механике и теории автоматического управления.

1. Задача исследования ошибок  $\alpha(t)$  гировертикали с релейной коррекцией от физического маятника, определяемых прецессионным уравнением

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = c \operatorname{sign}[X(t) - \alpha(t)] \quad (1.1)$$

где  $c$  — положительная постоянная, а  $X(t)$  — ошибка физического маятника, принимаемая нормальной случайной функцией с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_X(\tau) = \sigma^2 \exp(-\mu|\tau|), \quad \mu > 0 \quad (1.2)$$

была рассмотрена в [1], однако решение не было доведено до числовых результатов. Кроме того, при получении коэффициентов ряда, дающего решение, не было использовано условие непрерывности искомой плотности вероятности, весьма существенное при ее практическом определении. В предлагаемой работе решение задачи доводится до конца, и полученные результаты сравниваются с результатами применения различных приближенных методов.

Как показано в [1], случайные функции

$$\eta_1(t) = \alpha(t)/\sigma_2, \quad \eta_2(t) = X(t)/\sigma_2 \quad (1.3)$$

образуют двумерный марковский процесс, для которого второе уравнение Колмогорова, определяющее плотность вероятности  $f(\eta_1; \eta_2)$  после окончания переходного процесса, имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial f}{\partial \eta_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_2}(\eta_2 f) - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_2^2} &= 0, & \eta_2 > \eta_1 \\ \kappa &= \frac{c}{\mu \sigma_2} \\ -\kappa \frac{\partial f}{\partial \eta_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_2}(\eta_2 f) - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_2^2} &= 0, & \eta_2 < \eta_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение  $f(\eta_1, \eta_2)$  уравнения (1.4), помимо естественного требования обращения в нуль на бесконечности, должно удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\eta_2^2} \quad (1.5)$$

вытекающему из сделанного допущения о нормальности случайной функции  $X(t)$ . Условие (1.5) эквивалентно условию

$$\begin{aligned} & \left[ (\eta_2 + \kappa) f(\eta_1, \eta_2) + \frac{\partial f(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + 2 \frac{\partial f(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]_{\eta_2 = \eta_1 + 0} = \\ & = \left[ (\eta_2 - \kappa) f(\eta_1, \eta_2) + \frac{\partial f(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} + 2 \frac{\partial f(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]_{\eta_2 = \eta_1 - 0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

следующему из общих соображений для уравнения Колмогорова с разрывными коэффициентами [2]. Помимо условий (1.5) либо (1.6) решение уравнения (1.4) необходимо еще подчинить требованию непрерывности на прямой  $\eta_1 = \eta_2$ :

$$f(\eta_1, \eta_2) |_{\eta_2 = \eta_1 + 0} = f(\eta_1, \eta_2) |_{\eta_2 = \eta_1 - 0} \quad (1.7)$$

Уравнение (1.4) с добавочными условиями (1.5) и (1.7) или эквивалентными им условиями (1.6) и (1.7) имеет единственное решение.

Плотность вероятности ошибок гировертикали  $f(\eta_1)$  связана с двумерной плотностью вероятности  $f(\eta_1, \eta_2)$  очевидным соотношением

$$f(\eta_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_2 \quad (1.8)$$

В [1] показано, что уравнению (1.4) можно удовлетворить, положив

$$f(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(\frac{m}{\kappa} \eta_1 - \frac{\eta_2^2}{4}\right) D_{-m}(\eta_2), \quad \eta_2 > \eta_1 \quad (1.9)$$

$$f(\eta_1, \eta_2) = f(-\eta_1, -\eta_2), \quad \eta_2 < \eta_1$$

где  $D_{-m}(\eta_2)$  — функция параболического цилиндра с отрицательным целочисленным индексом, определяемая равенством

$$D_{-m}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-1/4\eta^2} \frac{d^{m-1}}{d\eta^{m-1}} [e^{-1/4\eta^2} (1 - \Phi(\eta))] \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (1.10)$$

причем под  $\Phi(x)$  понимается функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-1/2t^2} dt \quad (1.11)$$

Коэффициенты  $a_m$  должны быть определены на основании условий (1.5) и (1.7), из которых следует

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa}{m} a_m [e^{m\eta/\kappa} D_{-m}(\eta) + e^{-m\eta/\kappa} D_{-m}(-\eta)] e^{-1/4\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\eta^2} \quad (1.12)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m [e^{m\eta/\kappa} D_{-m}(\eta) - e^{-m\eta/\kappa} D_{-m}(-\eta)] e^{-1/4\eta^2} = 0 \quad (1.13)$$

Умножив обе части равенства (1.12) на полином Эрмита  $H_{2j}(\eta\sqrt{2})$  четной степени, а обе части равенства (1.13) — на полином Эрмита  $H_{2j+1}(\eta/\sqrt{2})$  нечетной степени ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) и проинтегрировав получающиеся равенства от  $-\infty$  до  $+\infty$  по  $\eta$ , получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{j,m} a_m = \delta_{0,j} \quad (j=0, 1, 2, \dots) \tag{1.14}$$

$$\alpha_{j,m} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{m}{\kappa} \eta - \frac{\eta^2}{4}\right) D_{-m}(\eta) H_j\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) d\eta \begin{cases} \kappa/m & \text{при } j=0, 2, 4, \dots \\ 1 & \text{при } j=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Для вычисления интегралов

$$s_{j,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{m}{\kappa} \eta - \frac{\eta^2}{4}\right) D_{-m}(\eta) H_j\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) d\eta \tag{1.15}$$

целесообразно вначале найти их производящую функцию  $S_m(z)$ , которую удобно определить в виде

$$S_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_{j,m}}{j!} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^j \quad (m=1, 2, 3, \dots) \tag{1.16}$$

Подставив в правую часть последней формулы выражение (1.15), воспользовавшись интегральным представлением для функций параболического цилиндра и производящей функцией для полиномов Эрмита, обнаруживаем, что

$$S_m(z) = \sqrt{2\pi} e^{m^2/2\kappa^2} \frac{e^{mz/\kappa}}{(z+m/\kappa)^m} \tag{1.17}$$

Разложив производящую функцию  $S_m(z)$  в ряд по степеням  $z$  и выделив коэффициент при  $z^j/(\sqrt{2})^j j!$ , окончательно находим

$$\alpha_{j,m} = \sqrt{2\pi} 2^{1/2j+1} \frac{e^{m^2/2\kappa^2}}{(m-1)!} \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{j-m} \sum_{r=0}^j C_j^r (-1)^r \left(\frac{\kappa}{m}\right)^r (m+r-1)! \times$$

$$\times \begin{cases} \kappa/m & \text{при } j=0, 2, 4, \dots \\ 1 & \text{при } j=1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (m=1, 2, 3, \dots; j=0, 1, 2, \dots) \tag{1.18}$$

Таким образом, коэффициенты  $a_m$  определяются бесконечной системой линейных алгебраических уравнений (1.14) с известными коэффициентами.

Подставляя ряд (1.9) в (1.8), для плотности вероятности ошибок гировертикали получим разложение

$$f(\eta_1) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m [e^{m\eta_1/\kappa} D_{-(m+1)}(\eta_1) + e^{-m\eta_1/\kappa} D_{-(m+1)}(-\eta_1)] e^{-1/4\eta_1^2} \tag{1.19}$$

Плотность вероятности  $f(\eta_1)$  является четной функцией своего аргумента. Следовательно, математическое ожидание  $M(\eta_1) = 0$ , а дисперсия

$\sigma_{\eta_1}^2$  равна второму начальному моменту случайной величины  $\eta_1$ . Выполнив необходимые преобразования, будем иметь

$$\sigma_{\eta_1}^2 = 2\sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{m^2/2\kappa^2} \left(\frac{\kappa}{m}\right)^{m+1} \left[ \frac{m^2}{\kappa^2} - 2m - 1 + \left(\frac{\kappa}{m}\right)^2 (m+1)(m+2) \right] \quad (1.20)$$

после чего, перейдя в соответствии с формулой (1.3) от безразмерной ошибки гировертикали  $\eta_1$  к ошибке  $\alpha$ , выраженной в угловой мере, получим

$$D(\alpha) = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \sigma_{\eta_1}^2 \quad (1.24)$$

Наконец, умножая ряд (1.9) на произведение  $\eta_1 \eta_2$  и интегрируя по  $\eta_1$  и  $\eta_2$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , находим значение корреляционного момента  $k_{\eta_1 \eta_2}$  между ошибками гировертикали  $\eta_1$  и ошибками физического маятника  $\eta_2$  (в безразмерном их выражении)

$$k_{\eta_1 \eta_2} = 2\sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{m^2/2\kappa^2} \left(\frac{\kappa}{m}\right)^{m+1} \left[ \frac{m^2}{\kappa^2} - 2m + \kappa^2 \frac{m+2}{m} \right] \quad (1.22)$$

При решении уравнения (1.4) и выводе последних формул производилось почленное дифференцирование и интегрирование ряда (1.9). Можно доказать, что эти операции допустимы, если решение бесконечной системы (1.14) существует. Строгое доказательство существования решения бесконечной системы вызывает определенные математические трудности, однако оно и не представляется в данном случае необходимым, поскольку числовые расчеты показывают, что при увеличении числа учитываемых членов ряда (1.9) значения получаемых при этом коэффициентов быстро стремятся к своим пределам.

2. Приведем результаты числовых расчетов и проверки точности приближенных формул. При численном определении коэффициентов  $a_m$  бесконечная система (1.14) заменялась конечной системой

$$\sum_{m=1}^n \alpha_{j,m} a_m^{(n)} = \delta_{j,0} \quad (j=0,1,\dots,n-1) \quad (2.1)$$

и соответственно в ряде (1.9) удерживалось  $n$  первых членов. Конечная система (2.1) решалась видоизмененным методом Гаусса, предложенным Молером и Форсайтом [3], на ЭЦВМ «Odra-1204».

Расчетами был охвачен диапазон изменения параметра  $\kappa$  от 0.4 до 1.3. Результаты вычислений сведены в таблицу и представлены графически на фиг. 1, 2.

Для контроля расчеты выполнялись при различных значениях  $n$  от 8 до 17. Условие нормировки плотности вероятности  $f_n(\eta_1)$ , построенной на основании конечного набора коэффициентов  $a_m^{(n)}$ , выполняется точно, поскольку оно совпадает с первым уравнением системы (2.1). Следовательно, точность соблюдения условия нормировки не может служить характеристикой близости допредельного (при конечном  $n$ ) решения к предельному (при  $n \rightarrow \infty$ ). В качестве такой характеристики удобно принять значение площади под кривой плотности вероятности от точки  $\eta_1 = 0$  до точки  $\eta_1^{(n)}$  первого пересечения кривой  $f_n(\eta_1)$  с осью абсцисс, т. е. величину

$$S_n = \int_0^{\eta_1^{(n)}} f_n(\eta_1) d\eta_1$$

Чем точнее при заданном  $n$  функция  $f_n(\eta_1)$  аппроксимирует плотность вероятности  $f(\eta_1)$ , тем больше  $\eta_1^{(n)}$  и тем ближе  $S_n$  к 0.5. Значения площади  $S_n$  приводятся в верхней части таблицы, в средней ее части даны значения ошибки гировертикали, в нижней части — значения корреля-

ционного момента между ошибками гировертикали и физического маятника. Первый столбец таблицы содержит расчетные значения  $n$ , а верхняя строка остальных столбцов — значения параметра  $\kappa$ . Все ошибки выражены в безразмерной форме.

$n$	$\kappa=0.4$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
8	1.07	0.72	0.91	0.78	0.60	0.62	0.59	0.54	0.53	0.53
11	1.11	0.81	1.14	0.79	0.67	0.64	0.57	0.53	0.52	0.50
17	1.10	0.80	0.94	0.76	0.64					
9	0.229	0.384	0.418	0.437	0.479	0.519	0.545	0.571	0.598	0.624
11	0.247	0.368	0.394	0.431	0.478	0.512	0.541	0.572	0.600	0.624
13	0.259	0.355	0.382	0.430	0.475					
15	0.265	0.345	0.378	0.431	0.472					
17	0.266	0.341	0.374	0.431	0.468					
9	0.263	0.324	0.372	0.415	0.458	0.496	0.529	0.560	0.589	0.615
11	0.265	0.323	0.370	0.415	0.458	0.494	0.528	0.560	0.589	0.615
13	0.266	0.322	0.369	0.416	0.457					
15	0.267	0.321	0.369	0.416	0.456					
17	0.267	0.321	0.370	0.416	0.456					

Из таблицы видно, что необходимое число уравнений  $n$ , обеспечивающее достаточную точность, уменьшается с ростом  $\kappa$ . При малых  $\kappa$  приходится решать системы уравнений (2.1) высоких порядков, что может привести к заметному увеличению вычислительных ошибок, так как система (2.1) при малых  $\kappa$  является весьма плохо обусловленной (ранг матрицы системы (2.1) при  $\kappa \rightarrow 0$  становится равным  $[1/2(n+1)]$ ). В случае порядка  $n=8 \div 17$ , при котором обусловленность системы (2.1) еще позволяет подсчитать коэффициенты  $a_m^{(n)}$  без привлечения специальных методов решения некорректно поставленных задач, точность вычисления плотности вероятности ошибок гировертикали является удовлетворительной при  $\kappa \geq 1$ .

Графики на фиг. 1 свидетельствуют, что закон распределения ошибок гировертикали является унимодальным, напоминая по своему виду центрированный нормальный закон распределения.

Дисперсия ошибок гировертикали, как это видно из таблицы, а также из графиков фиг. 1, увеличивается с ростом параметра  $\kappa$ . Этот результат, в частности, показывает, что значение постоянной  $c$  в уравнении (1.1), характеризующее интенсивность коррекции, следует выбирать с учетом быстроты затухания корреляционной функции ошибок маятника-корректора  $X(t)$ , характеризуемой величиной  $\mu$ .

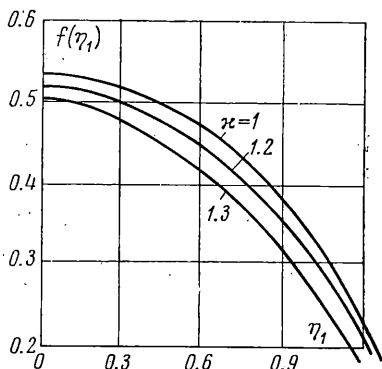
Из рассмотрения таблицы следует, что для вычисления с заданной погрешностью таких интегральных характеристик, как дисперсия и корреляционный момент, требуется решить систему меньшего порядка  $n$ , чем для вычисления плотности вероятности. Так, для вычисления моментов  $\sigma_{\eta_1}^2$  и  $k_{\eta_1 \eta_2}$  с двумя верными значащими цифрами, даже при малых  $\kappa$ , достаточно ограничиться решением системы не выше 17-го порядка.

Величина  $S_n$  несколько преувеличивает ошибку, допускаемую при замене бесконечной системы (1.14) конечной системой (2.1). Чтобы непосредственно оценить достигнутую точность вычисления моментов в области малых значений параметра  $\kappa$ , при которых погрешность в определении плотности вероятности  $f(\eta_1)$  еще заметна, для значений  $\kappa$  от  $\kappa=0.4$  до  $\kappa=1.0$  с шагом 0.1 было проведено конечно-разностное решение задачи при помощи сеточного метода [4]. Результаты вычисления дисперсии  $D(\eta_1)$  для указанных значений  $\kappa$  таковы: 0.258, 0.325, 0.373, 0.422, 0.461, 0.491, 0.516.

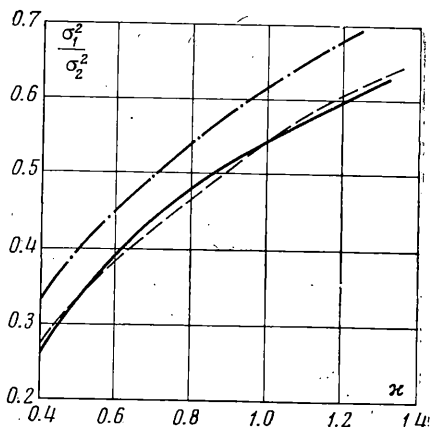
Эти значения в пределах точности, с которой они были вычислены, совпадают со значениями дисперсии, подсчитанными суммированием конечного отрезка ряда (1.20) уже при учете 15–17 первых членов ряда.

Полученные результаты позволяют оценить сравнительную эффективность различных приближенных методов исследования нелинейных систем, определяемых уравнениями (1.1).

В [5] был рассмотрен метод, основанный на разложении левой части интегро-дифференциального уравнения для характеристической функции



Фиг. 1



Фиг. 2

$E(z_1, z_2)$  в ряд по ее аргументам. Если в этом методе учитывать только квадратичные члены, то для дисперсии ошибок гировертикали и корреляционного момента между ошибками гировертикали и ошибками физического маятника после окончания переходного процесса получим

$$D[\alpha(t)] \approx \sigma_1^2 \approx k_{1,2} \approx \frac{1}{\pi} \sigma_2^2 \kappa^2 \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi}{\kappa^2}} - 1 \right) \quad (2.2)$$

В методе статистической линеаризации [6] нелинейность  $\text{sign}[X(t) - \alpha(t)]$  в правой части уравнения (1.1) заменяется линейным выражением  $k[X(t) - \alpha(t)]$ , где постоянная  $k$  выбирается таким образом, чтобы дисперсия правой части осталась неизменной, или так, чтобы дисперсия ошибки, вносимой при замене нелинейного выражения линейным, была бы наименьшей. В рассматриваемом случае в зависимости от того, какой способ линеаризации будет принят, для коэффициента  $k$  получим различные значения ( $k_1$  и  $k_2$  соответственно)

$$k_1 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2k_{1,2})^{-1/2}, \quad k_2 = \sqrt{2/\pi} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2k_{1,2})^{-1/2} \quad (2.3)$$

Заменяв таким образом нелинейное уравнение в (1.1) линейным уравнением

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} + c\alpha(t) = ckX(t) \quad (2.4)$$

для  $\sigma_1^2$  и  $k_{1,2}$  по окончании переходного процесса будем иметь

$$D[\alpha(t)] \approx \sigma_1^2 = k_{1,2} = \frac{ck\sigma_2^2}{\mu + ck} \quad (2.5)$$

После подстановки в (2.5) значения  $k$  из (2.3) получаем квадратное уравнение относительно  $\sigma_1^2$ , решая которое в случае первого варианта метода статистической линеаризации находим

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} \sigma_2^2 \kappa^2 \left( \sqrt{1 + \frac{4}{\kappa^2}} - 1 \right) \quad (2.6)$$

При использовании второго варианта метода статистической линеаризации формула для дисперсий примет вид

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{\pi} \sigma_2^2 \kappa^2 \left( \sqrt{1 + \frac{2\pi}{\kappa^2}} - 1 \right) \quad (2.7)$$

что совпадает с (2.2). Можно показать, что первое приближение метода [5] равносильно второму варианту метода статистической линеаризации И. Е. Казакова и в случае других видов нелинейности уравнения (1.1).

Для оценки точности приближенных выражений (2.6) и (2.7) на фиг. 2 представлен график зависимости отношения  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  от  $\kappa$ , полученный в результате числовых расчетов (сплошная линия), задаваемый равенством (2.2) или (2.7) (пунктир) и равенством (2.6) (штрихпунктир). Как показывают графики, во всем рассмотренном диапазоне первое приближение для дисперсии в методе [5] и эквивалентный результат, получаемый второй разновидностью метода статистической линеаризации, весьма близко совпадают с величиной дисперсии, найденной путем точного решения уравнения Колмогорова.

Авторы благодарят В. И. Станкевича, результаты которого по решению уравнения Колмогорова сеточным методом использованы в работе.

Поступила 30 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. А., Ривкин С. С. Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М., «Наука», 1974.
2. Тай М. Л. Условия сопряжения для плотности вероятности перехода многомерного марковского процесса. Изв. вузов. Радиофизика, 1965, т. 8, № 4.
3. Молер К., Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., «Мир», 1969.
4. Мерклингер К. Дж. Численный анализ нелинейных систем управления с помощью уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Тр. II Междунар. конгресса ИФАК. Оптимальные системы. Статистические методы. М., «Наука», 1965.
5. Свешников А. А. Применение теории непрерывных марковских процессов к решению нелинейных задач прикладной гироскопии. Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, т. 3. Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1970.
6. Казаков И. Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М., «Наука», 1975.