

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ  
КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

М. А. ЛЕВИН

(Минск)

При исследовании динамики систем с качением необходимо знать выражения для переменных во времени реакций связей катящегося деформируемого колеса. Эти выражения формулируются в работе [1], учитывающей три из шести составляющих реакций. При этом вводится гипотеза о кривизне линии качения, а все коэффициенты, входящие в выражения, предполагается находить из опыта.

Дальнейшее развитие теории [1] получила в работе [2]. Выражения для трех других, но постоянных во времени составляющих реакций связей с учетом проскальзывания в области контакта получены в работе [3], где рассматривается механизм взаимодействия колеса и поверхности качения. Простейший вариант выражений для двух составляющих реакций связей постулируется в работе [4].

Отметим также работу [5], где принята гипотеза о линейном распределении тангенциальных деформаций в области контакта, и в которой даются выражения для четырех составляющих реакций связи.

Здесь для конкретных моделей катящегося деформируемого колеса определяются все шесть переменных во времени составляющих реакций, действующих со стороны абсолютно твердой плоскости качения. При этом в отличие от [6-8] учитываются все шесть степеней свободы диска колеса в случае пренебрежимо малого проскальзывания в области контакта.

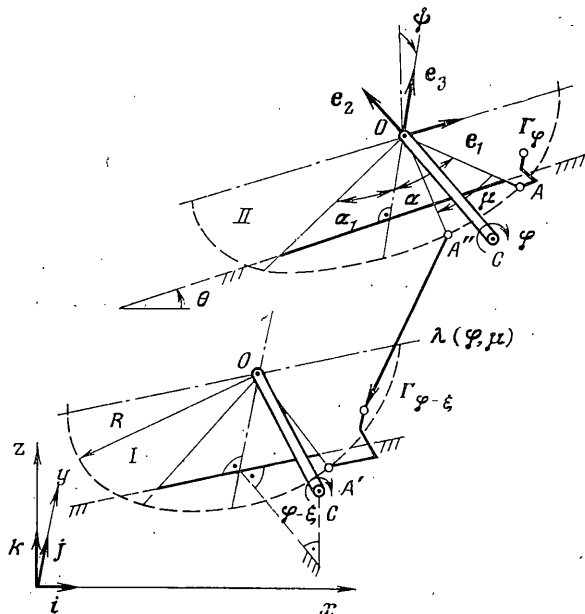
Выражения для составляющих реакций связей ниже находятся из рассмотренного механизма взаимодействия колеса с плоскостью качения без привлечения гипотез, характерных для [1, 4, 5]. При этом удастся показать справедливость этих гипотез и вычислить коэффициенты, входящие в выражения теории [1].

**1. Уравнения движения диска.** Рассмотрим колесо радиуса  $R$  (фиг. 1), имеющее в своем составе тонкий недеформируемый диск. Диск соединен жестко с осью  $OC$  длиной  $b$ , которая перпендикулярна его плоскости. Положение диска определяется заданием положения точки  $C$  ( $r_c$ ) в неподвижной системе координат  $xuz$ , заданием угла поворота  $\theta$  по отношению к оси  $x$  следа плоскости диска на плоскости качения  $xu$  (угол между ортом  $e_1$ , направленным параллельно следу, и осью  $x$ ), заданием малого угла поворота  $\psi$  плоскости диска по отношению к оси  $z$  (угол между осью  $z$  и ортом  $e_3$ , направленным параллельно линии наибольшего ската) и поворотом диска на угол  $\varphi$  при вращении вокруг оси  $OC$ , вдоль которой направлен орт  $e_2$ .

К моменту  $t$ , когда диск повернулся на угол  $\varphi$  (фиг. 1, положение II), имеем таблицу направляющих косинусов

	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$i$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	$\psi \sin \theta$
$j$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$-\psi \cos \theta$
$k$	$0$	$\psi$	$1$

(1.1)



Фиг. 1

Рассматривая в качестве параметра движения  $\varphi$ , получим

$$x_c = x_c(\varphi), \quad y_c = y_c(\varphi), \quad z_c = z_c(\varphi), \quad \theta = \theta(\varphi), \quad \psi = \psi(\varphi)$$

В процессе движения в области площадки контакта изменяется также передний угол  $\alpha$  и задний угол  $\alpha_1$ . Поэтому

$$\alpha = \alpha(\varphi) = \alpha_0 + \beta(\varphi), \quad \alpha_1 = \alpha_1(\varphi) = \alpha_0 + \beta_1(\varphi) \quad (1.2)$$

При этом  $2\alpha_0$  — угол контакта в некотором стационарном движении, а  $\beta(\varphi)$  и  $\beta_1(\varphi)$  — малые отклонения. В работе предполагается  $\alpha + \alpha_1 \ll 1$ .

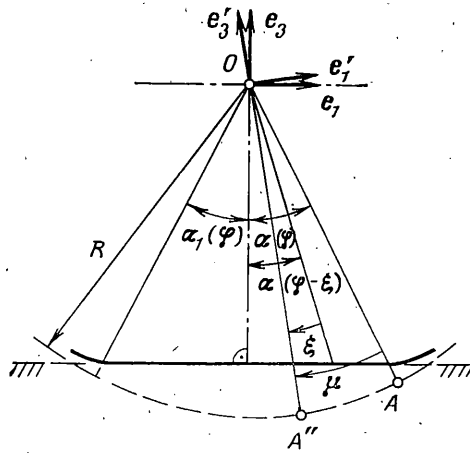
Введем также цилиндрическую систему координат (фиг. 2) с угловой координатой  $\mu$  ( $\mu = 0$  на передней границе контакта). Орт  $e_3'$  направлен по радиусу и система ортов  $e_1', e_2, e_3'$  получается из системы  $e_1, e_2, e_3$  поворотом последней по часовой стрелке на угол  $\alpha(\varphi) - \mu$  вокруг оси орта  $e_2$ .

**2. Уравнения, связывающие усилия и деформации периферии.** Деформируемая периферия представляется как набор радиально расположенных безмассовых стержней  $I$ , соединенных по концам безмассовой растяжимой нитью  $2$  (фиг. 3, а). Жесткость нити на растяжение, связывающая относительное удлинение и растягивающую силу, равна  $N_1$ .

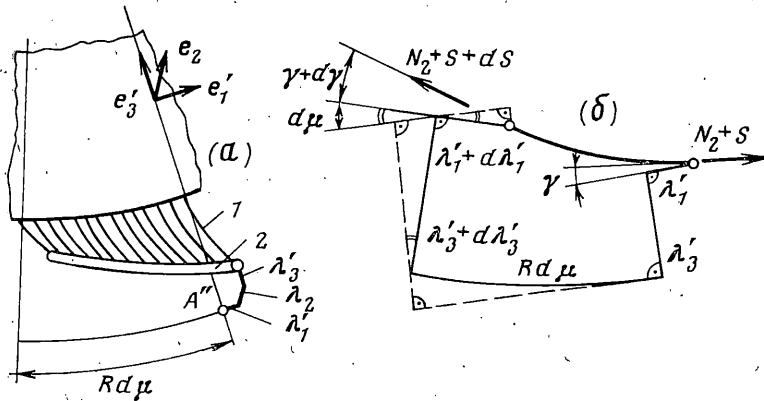
Нить предварительно натянута с силой  $N_2$ . Жесткости периферии на единицу ее длины  $2\pi R$  (жесткости набора стержней при отброшенной нити) равны соответственно: тангенциальная, вдоль  $e_1' - c_1$ ; нормальная, вдоль  $e_2 - c_2$ ; радиальная, вдоль  $e_3' - c_3$ .

Положение точки деформируемой периферии до деформации (фиг. 2) определяется углом  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq \alpha + \alpha_1$ ). Составляющие деформации точки периферии (составляющие перемещения конца стержня по отношению к диску) в системе ортов  $e_1, e_2, e_3$  обозначим  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , а в системе ортов  $e_1', e_2, e_3'$  —  $\lambda_1', \lambda_2, \lambda_3'$ .

Очевидно, что можно рассматривать движение, при котором в области контакта  $\lambda_2$  — малая величина в сравнении с  $R(\alpha + \alpha_1)$ . Что касается  $\lambda_1'$  и  $\lambda_3'$  и их производных, то они в этом смысле не могут считаться малыми, так как наряду с малыми отклонениями, как будет показано ниже, содержат свободные члены порядка не ниже  $\alpha$ . При этом  $|\lambda_3'| > |\lambda_1'| \gg |\lambda_2|$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Полагая, что  $|\alpha - \mu| \ll 1$ , найдем составляющие  $q_1', q_2, q_3'$  распределенного усилия на единицу длины периферии, которые соответствуют направлениям ортов  $e_1', e_2, e_3'$ . Заметим, что  $q_1, q_2, q_3$  соответствуют системе ортов  $e_1, e_2, e_3$ .

Из фиг. 3, б можно найти дополнительное относительное удлинение нити вследствие деформаций  $\lambda_1'$  и  $\lambda_3'$ . Если удерживать члены, содержащие произведения больших деформаций, для дополнительного усилия натяжения нити  $S$  получим

$$S = N_1 \left[ -\frac{1}{R} \left( \lambda_3' + \frac{d\lambda_1'}{d\mu} \right) + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{d\lambda_3'}{d\mu} - \lambda_1' \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

В результате деформаций касательная к оси нити в точке  $\mu$  образует с направлением, обратным орту  $e_1'$ , угол  $\gamma$  и угол  $\gamma^*$  с плоскостью ортов  $e_1'e_3'$ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{R} \left( \frac{d\lambda_3'}{d\mu} - \lambda_1' \right) \left[ 1 + \frac{1}{R} \left( \lambda_3' + \frac{d\lambda_1'}{d\mu} \right) \right] \\ \gamma^* &= \frac{1}{R} \frac{d\lambda_2}{d\mu} \left[ 1 + \frac{1}{R} \left( \lambda_3' + \frac{d\lambda_1'}{d\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из условия равновесия элемента нити длиной  $Rd\mu$  получаем выражения для распределенных усилий  $q_1', q_2, q_3'$ , приходящихся на единицу

первоначальной длины элемента  $Rd\mu$ :

$$\begin{aligned} q_1' &= c_1 \lambda_1' + \frac{dS}{d\mu} \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \gamma^2\right) - \frac{N_2 + S}{R} \left(\gamma + \gamma \frac{d\gamma}{d\mu}\right), \\ q_2 &= c_2 \lambda_2 - \frac{1}{R} \frac{d}{d\mu} [(N_2 + S) \gamma^*], \\ q_3' &= c_3 \lambda_3' + \frac{N_2}{R} - \frac{N_2 + S}{R} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \left(1 + \frac{d\gamma}{d\mu}\right) - \frac{1}{R} \frac{dS}{d\mu} \nu \end{aligned} \quad (2.3)$$

Между составляющими распределенного усилия и деформациями в системах ортов  $e_1', e_3'$  и  $e_1, e_3$  существует следующая связь:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1' \cos(\alpha - \mu) - q_3' \sin(\alpha - \mu), & q_3 &= q_1' \sin(\alpha - \mu) + q_3' \cos(\alpha - \mu) \quad (2.4) \\ \lambda_1' &= \lambda_1 \cos(\alpha - \mu) + \lambda_3 \sin(\alpha - \mu), & \lambda_3' &= -\lambda_1 \sin(\alpha - \mu) + \lambda_3 \cos(\alpha - \mu) \quad (2.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим положения, характеризующие точность последующих результатов.

1. Предполагается, что  $\alpha + \alpha_1 \ll 1$ .
2. В выражениях, описывающих деформации и силы в области контакта, учитываются малые отклонения в первой степени с коэффициентами, содержащими  $\alpha_0$  и  $\mu$  в степени не выше первой, и свободные члены, содержащие  $\alpha_0$  и  $\mu$  в степени не выше второй.
3. Точность, вытекающая из положения (2), будет обеспечена, если удерживать лишь члены вида  $\alpha^2, \alpha \lambda_1, \alpha d\lambda_1/d\mu, \alpha \lambda_2, \alpha d\lambda_2/d\mu$  и аналогичные члены с более низкой степенью  $\alpha$ .
4. В выражениях, описывающих деформации за пределами области контакта, все деформации рассматриваются как малые отклонения, которые быстро убывают за область контакта.

Как будет показано ниже

$$\lambda_3(\varphi, \mu) = R[\cos(\alpha - \mu) - \cos \alpha] + \lambda_3(\varphi, 0) \quad (2.6)$$

При этом  $\lambda_3(\varphi, 0)$  имеет порядок  $\alpha$ . В силу соотношений (2.5), (2.6) и положения (3) находим

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_1 + (\alpha - \mu) \lambda_3, & \frac{d\lambda_1'}{d\mu} &= \frac{d\lambda_1}{d\mu} + (\alpha - \mu) \lambda_1 + R(\alpha - \mu)^2 - \lambda_3 \\ \lambda_3' &= -(\alpha - \mu) \lambda_1 + \lambda_3, & \frac{d\lambda_3'}{d\mu} &= -(\alpha - \mu) \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \lambda_1 + R(\alpha - \mu) + (\alpha - \mu) \lambda_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя соотношения (2.7) в (2.1) и (2.2) в соответствии с положением (3), в области контакта получим

$$S = -\frac{N_1}{R} \frac{d\lambda_1}{d\mu} - \frac{N_1}{2} (\alpha - \mu)^2, \quad \gamma = \alpha - \mu \quad (2.8)$$

Как вытекает из последующего изложения, в выражение для  $d\lambda_1/d\mu$  входит свободный член  $R-r$ , имеющий порядок  $\alpha$ . Учитывая это и то обстоятельство, что выражения для  $q_1, q_2, q_3$  в дальнейшем только интегрируются, в силу положения (3) и формул (2.3), (2.4), (2.8) в области контакта будем иметь

$$\begin{aligned} q_1 &= c_1 \lambda_1 - \frac{N_1}{R^2} \frac{d^2 \lambda_1}{d\mu^2} + \left[ (c_1 - c_3) \lambda_3 + \frac{N_1 - N_2}{R} \right] (\alpha - \mu) \\ q_2 &= c_2 \lambda_2 - \frac{1}{R^2} \left[ N_2 + (N_2 - N_1) \left(1 - \frac{r}{R}\right) \right] \frac{d^2 \lambda_2}{d\mu^2} \\ q_3 &= (c_1 - c_3) (\alpha - \mu) \lambda_1 + c_3 \lambda_3 + \frac{N_2}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\alpha - \mu)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пренебрегая произведениями малых отклонений за пределами области контакта, из выражений (2.1)–(2.3) с учетом положения (4) находим

$$\left(c_1 + \frac{N_2}{R^2}\right) \lambda_1' - \frac{N_1}{R^2} \frac{d^2 \lambda_1'}{d\mu^2} - \frac{N_1 + N_2}{R^2} \frac{d\lambda_3'}{d\mu} = 0 \quad (2.10)$$

$$c_2 \lambda_2 - \frac{N_2}{R^2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\mu^2} = 0, \quad \left(c_3 + \frac{N_1}{R^2}\right) \lambda_3' - \frac{N_2}{R^2} \frac{d^2 \lambda_3'}{d\mu^2} + \frac{N_1 + N_2}{R^2} \frac{d\lambda_1'}{d\mu} = 0$$

**3. Деформации периферии.** Рассмотрим деформации в области контакта. В положении I (фиг. 1), когда угол поворота диска равен  $\varphi - \xi$ , первая точка деформируемой периферии  $\Gamma_{\varphi - \xi}$ , которой на диске соответствует точка  $A'$ , вступает в контакт с плоскостью качения  $xu$ . При быстром уменьшении  $\alpha$  возможен отрыв точки от плоскости  $xu$  сразу вслед за вступлением в контакт.

Рассматривая движение, при котором в передней зоне контакта точка, вступившая в контакт с плоскостью  $xu$ , от нее не отрывается, потребуем, чтобы  $d\varphi + d\alpha(\varphi) \geq 0$ . Аналогично в задней зоне контакта при быстром увеличении  $\alpha_1$  вслед за отрывом точки периферии от плоскости  $xu$  при повороте диска на угол  $d\varphi$  возможен ее возврат на плоскость  $xu$ . Поэтому здесь потребуем, чтобы  $d\varphi - d\alpha_1(\varphi) \geq 0$ .

Таким образом, при выполнении условий

$$1 + \frac{d\alpha(\varphi)}{d\varphi} \geq 0, \quad 1 - \frac{d\alpha_1(\varphi)}{d\varphi} \geq 0 \quad (3.1)$$

и при отсутствии проскальзывания точка  $\Gamma_{\varphi - \xi}$ , вступившая в контакт, остается неподвижной на плоскости  $xu$  до тех пор, пока диск не повернется на угол порядка  $2\alpha_0$ . Следовательно,  $\Gamma_{\varphi - \xi}$  является также и точкой непрерывной линии качения.

В положении II, когда угол поворота диска равен  $\varphi$ , точка диска  $A'$  занимает положение  $A''$ , описав дугу  $\xi$  в плоскости диска. Радиус  $OA''$ , вдоль которого направлен орт  $e_3(\varphi)$ , образует с ортом  $e_3(\varphi)$  угол  $\alpha(\varphi - \xi) - \xi$  и угол  $\mu$  с радиусом  $OA$ .

Таким образом, положение точки  $A''$  на диске в момент, когда диск повернулся на угол  $\varphi$ , характеризуется углом  $\mu$  или  $\xi$ . Причем угол  $\mu$  отсчитывается от радиуса  $OA$ , проходящего через точку  $A$ , которой соответствует точка деформируемой периферии  $\Gamma_\varphi$ , впервые вступившая в контакт при угле поворота диска, равном  $\varphi$ . Отметим, что величины  $x_c, y_c, z_c, \theta, \psi, e_1, e_2, e_3, \alpha, \alpha_1$  в положении II являются функциями  $\varphi$ , а в положении I — функциями  $\varphi - \xi$ . При этом в точке  $\mu = 0$ , соответствующей точке  $A$  на диске, деформации равны  $\lambda_1(\varphi, 0), \lambda_2(\varphi, 0), \lambda_3(\varphi, 0)$ , а в точке, соответствующей  $A'$ , имеем  $\lambda_1(\varphi - \xi, 0), \lambda_2(\varphi - \xi, 0), \lambda_3(\varphi - \xi, 0)$ .

Из фиг. 2 и выражений (1.2) следует

$$\mu = \alpha(\varphi) - \alpha(\varphi - \xi) + \xi \quad (3.2)$$

$$\mu = \beta(\varphi) - \beta(\varphi - \xi) + \xi, \quad 0 \leq \mu \leq \alpha(\varphi) + \alpha_1(\varphi)$$

Из фиг. 1 для деформаций в области контакта найдем

$$\lambda(\varphi, \mu) = \lambda(\varphi, \xi) = r_\Gamma(\varphi - \xi) - r_{A''}(\varphi, \xi) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} r_\Gamma(\varphi) = r_c(\varphi) + [R \sin \alpha(\varphi) + \lambda_1(\varphi, 0)] e_1(\varphi) + [b + \lambda_2(\varphi, 0)] e_2(\varphi) + \\ + [\lambda_3(\varphi, 0) - R \cos \alpha(\varphi)] e_3(\varphi) \\ r_\Gamma(\varphi) = x_\Gamma(\varphi) i + y_\Gamma(\varphi) j \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} r_{A''}(\varphi, \xi) = r_c(\varphi) + R \sin[\alpha(\varphi - \xi) - \xi] e_1(\varphi) + \\ + b e_2(\varphi) - R \cos[\alpha(\varphi - \xi) - \xi] e_3(\varphi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя выражения (3.5) и (3.4) в (3.3), с использованием таблицы (1.1) найдем составляющие деформаций в области контакта

$$\begin{aligned}\lambda_1(\varphi, \xi) &= [x_T(\varphi - \xi) - x_C(\varphi)] \cos \theta(\varphi) + \\ &+ [y_T(\varphi - \xi) - y_C(\varphi)] \sin \theta(\varphi) - R \sin[\alpha(\varphi - \xi) - \xi] \\ \lambda_2(\varphi, \xi) &= -[x_T(\varphi - \xi) - x_C(\varphi)] \sin \theta(\varphi) + \\ &+ [y_T(\varphi - \xi) - y_C(\varphi)] \cos \theta(\varphi) - z_C(\varphi) \psi(\varphi) - b \\ \lambda_3(\varphi, \xi) &= [x_T(\varphi - \xi) - x_C(\varphi)] \psi(\varphi) \sin \theta(\varphi) - \\ &- [y_T(\varphi - \xi) - y_C(\varphi)] \psi(\varphi) \cos \theta(\varphi) - z_C(\varphi) + R \cos[\alpha(\varphi - \xi) - \xi]\end{aligned}\quad (3.6)$$

Рассмотрим деформации за пределами области контакта. Из второго уравнения (2.10) в области  $\mu < 0$  получим, что

$$\lambda_2(\varphi, \mu) = \lambda_2(\varphi, 0) \exp(\tau_2 R \mu) \quad \text{при} \quad \tau_2 = \sqrt{c_2/N_2}$$

Так как в силу положения (4) точка  $\mu = -\pi/2$  рассматривается как бесконечность, то коэффициент перед  $\exp(-\tau_2 R \mu)$  должен быть равен нулю. Следовательно, при  $\mu = 0$  справа

$$\left. \frac{d\lambda_2(\varphi, \mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \frac{d\lambda_2}{d\mu}(\varphi, 0) = \tau_2 R \lambda_2(\varphi, 0), \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{c_2}{N_2}} \quad (3.7)$$

Первому и третьему уравнению (2.10) соответствует биквадратное характеристическое уравнение, корни которого равны

$$\rho = \pm \left\{ \frac{1}{2} [-g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 - 4g_{00}}] \right\}^{1/2} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 + R^2 \left( \frac{c_1 c_3 R^2}{N_1 N_2} + \frac{c_1}{N_2} + \frac{c_3}{N_1} \right), \quad g_{01} = 2 - R^2 \left( \frac{c_1}{N_1} + \frac{c_3}{N_2} \right) \\ g_1 &= \frac{c_1 R^2}{N_1} + \frac{N_2}{N_1}, \quad g_2 = 1 + \frac{N_2}{N_1}, \quad g_3 = \frac{c_3 R^2}{N_2} + \frac{N_1}{N_2}, \quad g_4 = 1 + \frac{N_1}{N_2}\end{aligned}$$

Отметим, что  $g_{01} < 2$ . Так как в случае  $0 \leq g_{01} < 2$  дискриминант меньше нуля, то чисто мнимых корней нет. В соответствии с положением (4) необходимо рассматривать решения, соответствующие двум корням с положительными действительными частями. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — такие корни. Известная процедура приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\lambda_1'(\varphi, \mu) &= D_1 e^{\rho_1 \mu} + D_2 e^{\rho_2 \mu}, \quad \lambda_3'(\varphi, \mu) = D_1 G_1 e^{\rho_1 \mu} + D_2 G_2 e^{\rho_2 \mu} \\ G_1 &= (g_1 - \rho_1^2) / (g_2 \rho_1), \quad G_2 = (g_1 - \rho_2^2) / (g_2 \rho_2)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Выражая  $D_1$  и  $D_2$  через  $\lambda_1'(\varphi, 0)$  и  $\lambda_3'(\varphi, 0)$ , далее при  $\mu = 0$  находим

$$\frac{d\lambda_1'}{d\mu}(\varphi, 0) = \Pi_{11} \lambda_1'(\varphi, 0) + \Pi_{13} \lambda_3'(\varphi, 0), \quad \frac{d\lambda_3'}{d\mu}(\varphi, 0) = \Pi_{31} \lambda_1'(\varphi, 0) + \Pi_{33} \lambda_3'(\varphi, 0) \quad (3.10)$$

$$\Pi_{11} = \frac{\rho_2 G_1 - \rho_1 G_2}{G_1 - G_2}, \quad \Pi_{13} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{G_1 - G_2}, \quad \Pi_{31} = -\Pi_{13} G_1 G_2, \quad \Pi_{33} = \frac{\rho_1 G_1 - \rho_2 G_2}{G_1 - G_2} \quad (3.11)$$

Если  $\rho_1 = \rho_2$ , то в выражениях (3.11) необходим предельный переход.

Воспользовавшись формулами (2.5), из (3.10) с учетом положения (3) при  $\mu = -0$  будем иметь

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu}(\varphi, 0) = L_{11}\lambda_1(\varphi, 0) + L_{13}\lambda_3(\varphi, 0), \quad \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, 0) = L_{31}\lambda_1(\varphi, 0) + L_{33}\lambda_3(\varphi, 0) \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= \Pi_{13} + \Pi_{31}, & \Pi^* &= \Pi_{11} - \Pi_{33} \\ L_{11} &= L_{110} + L_{11\beta}\beta(\varphi) = \Pi_{11} - \Pi^0\alpha_0 - \Pi^*\alpha_0^2 - (\Pi^0 + \Pi^*2\alpha_0)\beta(\varphi) \\ L_{13} &= L_{130} + L_{13\beta}\beta(\varphi) = 1 + \Pi_{13} + \Pi^*\alpha_0 - \Pi^0\alpha_0^2 + (\Pi^* - \Pi^02\alpha_0)\beta(\varphi) \\ L_{31} &= L_{310} + L_{31\beta}\beta(\varphi) = \Pi_{31} - 1 + \Pi^*\alpha_0 - \Pi^0\alpha_0^2 + (\Pi^* - \Pi^02\alpha_0)\beta(\varphi) \\ L_{33} &= L_{330} + L_{33\beta}\beta(\varphi) = \Pi_{33} + \Pi^0\alpha_0 + \Pi^*\alpha_0^2 + (\Pi^0 + \Pi^*2\alpha_0)\beta(\varphi) \end{aligned}$$

Из равенств (3.12) следует

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varphi, 0) &= B_{11} \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\varphi, 0) + B_{13} \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, 0) \\ \lambda_3(\varphi, 0) &= B_{31} \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\varphi, 0) + B_{33} \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, 0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{110} + B_{11\beta}\beta(\varphi) = L_{33}/\Delta, & B_{13} &= B_{130} + B_{13\beta}\beta(\varphi) = -L_{13}/\Delta \\ B_{31} &= B_{310} + B_{31\beta}\beta(\varphi) = -L_{31}/\Delta, & B_{33} &= B_{330} + B_{33\beta}\beta(\varphi) = L_{11}/\Delta \\ \Delta &= 1 + \Pi_{11}\Pi_{33} - \Pi_{31}\Pi_{13} + \Pi_{13} - \Pi_{31} \end{aligned}$$

В точке слева при  $\mu = \alpha + \alpha_1 + 0$  аналогично получим

$$\frac{d\lambda_2}{d\mu}(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) = -\tau_2 R \lambda_2(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) \quad (3.14)$$

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu}(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) = L_{11}'\lambda_1(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) + L_{13}'\lambda_3(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) \quad (3.15)$$

$$\frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) = L_{31}'\lambda_1(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1) + L_{33}'\lambda_3(\varphi, 2\alpha_0 + \beta + \beta_1)$$

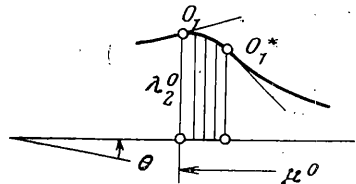
$$\begin{aligned} L_{11}' &= -L_{110} - L_{11\beta}\beta_1(\varphi), & L_{13}' &= L_{130} + L_{13\beta}\beta_1(\varphi) \\ L_{31}' &= L_{310} + L_{31\beta}\beta_1(\varphi), & L_{33}' &= -L_{330} - L_{33\beta}\beta_1(\varphi) \end{aligned}$$

Отметим, что участок периферии (нити)  $\Gamma_{\varphi-d\xi}\Gamma_{\varphi}$ , совпадающий с линией качения, был прижат к плоскости  $xy$  в результате наката диска на угол  $d\varphi = d\xi$  из положения, в котором при угле поворота  $\varphi - d\varphi$  этот участок периферии составлял часть ее, свободную от внешней нагрузки.

В результате наката деформации, непрерывные вплоть до первых производных, которые были в нем до наката, будут зафиксированы на плоскости качения, так как проскальзывание отсутствует и выполняются условия (3.1). Это означает, что в точке  $\mu = 0$  непрерывны первые производные всех трех составляющих деформаций. Условие отсутствия сосредоточенной силы в направлении орта  $e_3$  приводит в точке  $\mu = \alpha + \alpha_1$  к требованию о непрерывности  $d\lambda_3/d\mu$  в этой точке.

Следовательно, в процессе качения при пренебрежении проскальзыванием выполняются четыре условия

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\varphi, -0) &= \frac{d\lambda_1}{d\mu}(\varphi, +0), & \frac{d\lambda_2}{d\mu}(\varphi, -0) &= \frac{d\lambda_2}{d\mu}(\varphi, +0) \\ \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, -0) &= \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, +0) \\ \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, \alpha + \alpha_1 - 0) &= \frac{d\lambda_3}{d\mu}(\varphi, \alpha + \alpha_1 + 0) \end{aligned} \quad (3.16)$$



Фиг. 4

Непрерывность, например,  $d\lambda_2/d\mu$  при  $\mu = \mu_0 = \alpha + \alpha_1$  может быть обеспечена лишь за счет области проскальзывания  $O_1^*O_1$  (фиг. 4). Пренебрежение здесь проскальзыванием означает, что границы области проскальзывания  $O_1^*$  и  $O_1$  ( $O_1$  является одно-

временно и задней границей области контакта, на которой боковая деформация равна  $\lambda_2^\circ$ ) не различаются. Это приводит к скачку в направлении касательной к нити и, следовательно, нарушению непрерывности  $d\lambda_2/d\mu$  (аналогично и  $d\lambda_1/d\mu$ ) при  $\mu = \alpha + \alpha_1$ . Последнее приводит также к появлению сосредоточенной равнодействующей сил трения  $F_t$ . И если  $F_t \ll \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ , то допущение о малом проскальзывании справедливо.

Условия (3.16) позволяют найти функции  $\beta(\varphi)$ ,  $\beta_1(\varphi)$ ,  $x_T(\varphi)$ ,  $y_T(\varphi)$  и связанные с ними начальные деформации  $\lambda_1(\varphi, 0)$ ,  $\lambda_2(\varphi, 0)$ ,  $\lambda_3(\varphi, 0)$ .

**4. Реакции связей.** Для силовых и моментных составляющих реакции  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  в направлении ортов  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , приведенных к центру  $C$ , получим

$$p_1(\varphi) = R \int_0^{\alpha^*} q_1(\varphi, \mu) d\mu, \quad p_2(\varphi) = R \int_0^{\alpha^*} q_2(\varphi, \mu) d\mu, \quad p_3(\varphi) = R \int_0^{\alpha^*} q_3(\varphi, \mu) d\mu$$

$$m_1(\varphi) = R \int_0^{\alpha^*} \{q_3(\varphi, \mu) [b + \lambda_2(\varphi, \mu)] + q_2(\varphi, \mu) [-\lambda_3(\varphi, \mu) + R \cos(\alpha(\varphi) - \mu)]\} d\mu \quad (4.1)$$

$$m_2(\varphi) = R \int_0^{\alpha^*} \{-q_3(\varphi, \mu) [R \sin(\alpha(\varphi) - \mu) + \lambda_1(\varphi, \mu)] + q_1(\varphi, \mu) [\lambda_3(\varphi, \mu) - R \cos(\alpha(\varphi) - \mu)]\} d\mu$$

$$m_3(\varphi) = R \int_0^{\alpha^*} \{q_2(\varphi, \mu) [R \sin(\alpha(\varphi) - \mu) + \lambda_1(\varphi, \mu)] - q_1(\varphi, \mu) [b + \lambda_2(\varphi, \mu)]\} d\mu \quad (\alpha^* = 2\alpha_0 + \beta + \beta_1)$$

В случае колеса, представляемого двумя тонкими дисками, удаленными от центра  $C$  на расстояния  $b$  и  $-b$ , имеем

$$P_1 = p_1(\varphi, b) + p_1(\varphi, -b), \quad P_2 = p_2(\varphi, b) + p_2(\varphi, -b)$$

$$P_3 = p_3(\varphi, b) + p_3(\varphi, -b) \quad (4.2)$$

$$M_1 = m_1(\varphi, b) + m_1(\varphi, -b), \quad M_2 = m_2(\varphi, b) + m_2(\varphi, -b)$$

$$M_3 = m_3(\varphi, b) + m_3(\varphi, -b)$$

Колесо можно представить также в виде системы тонких дисков, каждому из которых соответствует радиус и свойства периферии, изменяющиеся по ширине в зависимости от  $b_0$ . Тогда

$$P(\varphi) = \int_{-b}^b p(\varphi, b_0) db_0, \quad M(\varphi) = \int_{-b}^b m(\varphi, b_0) db_0 \quad (4.3)$$

**5. Деформации периферии колеса при малых отклонениях движения его центра от прямолинейного.** Рассмотрим движение колеса, мало отклоняющееся от стационарного, характеризующегося следующими параметрами:

$$x_{c0}(\varphi) = r\varphi, \quad y_{c0} = 0, \quad z_{c0} = \text{const}, \quad \theta_0 = \psi_0 = 0, \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta_1 = \beta = 0 \quad (5.1)$$

Величина  $r$  определяется из условия  $p_1 = 0$  в стационарном движении.

В качестве малых отклонений наряду с  $\beta(\varphi)$ ,  $\beta_1(\varphi)$ ,  $\theta(\varphi)$  и  $\psi(\varphi)$  введем следующие функции:

$$u_1(\varphi) = x_C(\varphi) - r\varphi, \quad u_2(\varphi) = y_C(\varphi) + z_{c0}\psi(\varphi), \quad u_3(\varphi) = z_C(\varphi) - z_{c0} \quad (5.2)$$



Приравнивая выражения (3.4) для  $r_{\Gamma}$  и удерживая малые отклонения только в первой степени, с учетом малости угла  $\theta$  найдем

$$x_{\Gamma}(\varphi) = x_c(\varphi) - b\theta(\varphi) + R \cos \alpha_0 \beta(\varphi) + \lambda_1(\varphi, 0) + R \sin \alpha_0 \quad (5.3)$$

$$y_{\Gamma}(\varphi) = y_c(\varphi) + R \sin \alpha_0 \theta(\varphi) + \lambda_2(\varphi, 0) - \lambda_3(\varphi, 0) \psi(\varphi) + R \cos \alpha_0 \psi(\varphi) + \lambda_1(\varphi, 0) \theta(\varphi) + b \quad (5.4)$$

$$z_c(\varphi) = -b\psi(\varphi) - R \sin \alpha_0 \beta(\varphi) - \lambda_3(\varphi, 0) + R \cos \alpha_0 \quad (5.5)$$

Обозначим значения  $\lambda_1(\varphi, 0)$  и  $\lambda_3(\varphi, 0)$  в стационарном движении через  $\lambda_{10}$  и  $\lambda_{30}$  ( $\lambda_{20} = 0$ ). Введем малые отклонения  $w_1(\varphi)$  и  $w_2(\varphi)$  так, чтобы

$$x_{\Gamma}(\varphi) = w_1(\varphi) + r\varphi + r\beta(\varphi) + R \sin \alpha_0 + \lambda_{10}, \quad y_{\Gamma}(\varphi) = w_2(\varphi) + b \quad (5.6)$$

В стационарном движении  $\xi = \mu$  и из выражений (3.6) и (5.6) в этом случае будем иметь

$$\lambda_1(\mu) = R[\sin \alpha_0 - \sin(\alpha_0 - \mu)] - r\mu + \lambda_{10}$$

Последнее соотношение из условия  $\lambda_1(\mu) = -\lambda_1(2\alpha_0 - \mu)$ , вытекающего вследствие того, что  $p_1 = 0$ , в стационарном движении дает

$$\lambda_{10} = \alpha_0 r - R \sin \alpha_0 \quad (5.7)$$

Из выражения (5.5) в стационарном движении также следует

$$\lambda_{30} = R \cos \alpha_0 - z_{c0} \quad (5.8)$$

Подставляя выражения (5.2) и (5.6) в (3.6), с учетом (5.7) и (5.8) после перехода от переменной  $\xi$  к  $\mu$  получим

$$\lambda_1(\varphi, \mu) = w_1(\varphi - \mu) - u_1(\varphi) + b\theta(\varphi) + [r - R \cos(\alpha_0 - \mu)]\beta(\varphi) + (\alpha_0 - \mu)r - R \sin(\alpha_0 - \mu) \quad (5.9)$$

$$\lambda_2(\varphi, \mu) = w_2(\varphi - \mu) - u_2(\varphi) - r(\alpha_0 - \mu)\theta(\varphi) \quad (5.10)$$

$$\lambda_3(\varphi, \mu) = -b\psi(\varphi) - u_3(\varphi) - R \sin(\alpha_0 - \mu)\beta(\varphi) + R[\cos(\alpha_0 - \mu) - \cos \alpha_0] + \lambda_{30} \quad (5.11)$$

В соответствии с (3.16) (в точке  $\mu = 0$ ) подставим соотношения (5.9) и (5.11) в первое уравнение (3.13). Откуда следует

$$r = R\{1 - [-\sin \alpha_0 B_{130} + B_{110}(1 - \cos \alpha_0) + \alpha_0 - \sin \alpha_0] / (B_{110} + \alpha_0)\} \quad (5.12)$$

$$w_1(\varphi) + l_1 \frac{dw_1(\varphi)}{d\varphi} = u_1(\varphi) - b\theta(\varphi) - l_2 \beta(\varphi) \quad (5.13)$$

$$l_1 = B_{110}, \quad l_2 = -R[\cos \alpha_0(1 + B_{11\beta} + B_{130}) + \sin \alpha_0(B_{13\beta} - B_{110}) - r(1 + B_{11\beta}) / R]$$

В соответствии с (3.16) (в точке  $\mu = 0$ ) после подстановки (5.10) в выражение (3.7) найдем

$$w_2(\varphi) + l_3 \frac{dw_2(\varphi)}{d\varphi} = u_2(\varphi) + l_4 \theta(\varphi), \quad l_3 = \frac{1}{\tau_2 R}, \quad l_4 = r(\alpha_0 + l_3) \quad (5.14)$$

После подстановки выражений (5.9) и (5.11) во второе из выражений (3.12) в связи с непрерывностью  $d\lambda_3/d\mu$  в точке  $\mu = 0$  получим

$$\beta(\varphi) = -l_5 [b\psi(\varphi) + u_3(\varphi)] + l_6 [w_1(\varphi) - u_1(\varphi) + b\theta(\varphi)] \quad (5.15)$$

$$\lambda_{30} = [R \sin \alpha_0(1 + L_{310}) - r\alpha_0 L_{310}] / L_{330} = B_{310}(R \cos \alpha_0 - r) + B_{330} R \sin \alpha_0 \quad (5.16)$$

$$l_5 = L_{330} / d_1, \quad l_6 = L_{310} / d_1$$

$$d_1 = R[\cos \alpha_0(1 + L_{310}) + \sin \alpha_0(L_{31\beta} + L_{330}) - (rL_{310} + rL_{31\beta}\alpha_0 + L_{33\beta}\lambda_{30}) / R]$$

В соответствии со свойством (3.16) в точке  $\mu=2\alpha_0+\beta(\varphi)+\beta_1(\varphi)$  непрерывна  $d\lambda_3/d\mu$ . В результате, подставляя выражения (5.9) и (5.14) во второе уравнение (3.15), будем иметь

$$\beta_1(\varphi) = -l_5[b\psi(\varphi) + u_3(\varphi)] - l_6[w_1(\varphi - 2\alpha_0) - u_1(\varphi) + b\theta(\varphi)] \quad (5.17)$$

С использованием выражения (5.15) уравнение (5.13) принимает вид

$$w_1(\varphi) + \frac{l_4}{1+l_2l_6} \frac{dw_1(\varphi)}{d\varphi} = u_1(\varphi) - b\theta(\varphi) + \frac{l_2l_5}{1+l_2l_6} [b\psi(\varphi) + u_3(\varphi)] \quad (5.18)$$

**6. Реакции связей колеса при малых отклонениях движения его центра от прямолинейного.** Подставляя зависимости (5.9)–(5.11) в выражения (2.9), а затем в (4.1), находим реакции связей. При интегрировании производные деформаций на границах области контакта находятся по выражениям (3.7), (3.12), (3.14), (3.15).

Далее рассматривается колесо, состоящее из двух дисков, удаленных от центра  $C$  на расстояния  $b$  и  $-b$ . При этом вводим функции

$$W_1(\varphi) = 1/2[w_1(\varphi, b) + w_1(\varphi, -b)]$$

$$W_2(\varphi) = 1/2[w_2(\varphi, b) + w_2(\varphi, -b)], \quad W_0(\varphi) = 1/2[-w_1(\varphi, b) + w_1(\varphi, -b)]$$

Воспользовавшись соотношениями (4.2), в соответствии с положением (2) находим

$$\begin{aligned} P_1(\varphi) &= k_1 \int_0^{2\alpha_0} W_1(\varphi - \mu) d\mu + k_2 [W_1(\varphi - 2\alpha_0) + W_1(\varphi)] - k_3 u_1(\varphi) \\ P_2(\varphi) &= k_4 \int_0^{2\alpha_0} W_2(\varphi - \mu) d\mu + k_5 [W_2(\varphi - 2\alpha_0) + W_2(\varphi)] - k_6 u_2(\varphi) \quad (6.1) \\ P_3(\varphi) &= k_7 - k_8 u_3(\varphi) + k_9 [W_1(\varphi) - W_1(\varphi - 2\alpha_0)] \\ M_1(\varphi) &= P_2(\varphi) z_{c0} + k_9 b [W_0(\varphi - 2\alpha_0) - W_0(\varphi)] - k_8 b^2 \psi(\varphi) + \end{aligned}$$

$$+ k_{10} \int_0^{2\alpha_0} W_2(\varphi - \mu) d\mu - k_{11} u_2(\varphi)$$

$$M_2(\varphi) = -P_1(\varphi) z_{c0} - k_{12} \int_0^{2\alpha_0} W_1(\varphi - \mu) d\mu - k_{13} [W_1(\varphi - 2\alpha_0) + W_1(\varphi)] + k_{14} u_1(\varphi) \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} M_3(\varphi) &= k_1 b \int_0^{2\alpha_0} W_0(\varphi - \mu) d\mu + k_2 b [W_0(\varphi - 2\alpha_0) + W_0(\varphi)] - k_3 b^2 \theta(\varphi) + \\ &+ k_{15} [W_2(\varphi) - W_2(\varphi - 2\alpha_0)] - k_{16} \theta(\varphi) \\ W_1(\varphi) + k_{17} \frac{dW_1(\varphi)}{d\varphi} &= u_1(\varphi) + k_{18} u_3(\varphi) \\ W_2(\varphi) + k_{19} \frac{dW_2(\varphi)}{d\varphi} &= u_2(\varphi) + k_{20} \theta(\varphi) \quad (6.3) \\ W_0(\varphi) + k_{17} \frac{dW_0(\varphi)}{d\varphi} &= b\theta(\varphi) - k_{18} b\psi(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 2Rc_1, & k_2 &= (d_2 + d_3), & k_3 &= 2(k_1\alpha_0 + k_2), & k_4 &= 2Rc_2, & k_5 &= 2N_2^* \tau_2 \\
 k_6 &= 2(k_4\alpha_0 + k_5), & k_7 &= 2\alpha_0 k_{10}, & k_8 &= 2(2\alpha_0 c_3 R + L_5 k_{10}), & k_9 &= l_6 k_{10} \\
 k_{10} &= 2(N_2 + c_3 \lambda_{30} R); & k_{11} &= k_7, & k_{12} &= k_{10}, & k_{13} &= \alpha_0 r k_9, & k_{14} &= 2(k_{12}\alpha_0 + k_{13}) \\
 k_{15} &= 2[rN_2^*(1 + \alpha_0 \tau_2 R) - N_1 L_{130} \lambda_{30}] / R, & k_{16} &= 4N_2^* r^2 \alpha_0 / R, & k_{17} &= l_1 / (1 + l_2 l_6) \\
 k_{18} &= k_{17} l_2 l_5 / l_1, & k_{19} &= 1 / (\tau_2 R), & k_{20} &= r(\alpha_0 + k_{19}), & N_2^* &= N_2 + (N_2 - N_1)(1 - r/R) \\
 d_2 &= N_1 \{ L_{110} + L_{310} [L_{110}(r - R \cos \alpha_0) + L_{130} \lambda_{30} - L_{130} R \sin \alpha_0] / d_1 \} / R, & d_3 &= \alpha_0 (N_1 - N_2) L_{310} / d_1
 \end{aligned}$$

Выражения для  $d_1, l_1, \dots, l_6$  приведены выше.

Заметим, что для более точного учета диссипации энергии необходимо в выражение для  $M_2$  ввести постоянное слагаемое  $M_1^0$ , представляющее собою момент трения качения в режиме движения, когда  $P_1 = 0$ .

**7. Упрощенные выражения для реакций связей.** В качестве приближения к системе (6.1) – (6.3) рассмотрим следующую:

$$P_1 = -f_1 \sigma_1, \quad P_2 = -f_2 \sigma_2, \quad P_3 = f_3 - f_4 u_3 + f_5 \vartheta_1 \quad (7.1)$$

$$M_1 = P_2 z_{c0} - f_6 \sigma_2 - f_7 \psi - f_8 \vartheta_0, \quad M_2 = -P_1 z_{c0} + f_9 \sigma_1, \quad M_3 = -f_{10} \sigma_0 + f_{11} \vartheta_2 \quad (7.2)$$

$$\frac{d(u_1 - \sigma_1)}{d\varphi} = r\vartheta_1, \quad \frac{d\vartheta_1}{d\varphi} = r(s_1 \sigma_1 - s_2 \vartheta_1 + s_3 u_3) \quad (7.3)$$

$$\frac{d(u_2 - \sigma_2)}{d\varphi} = r(\vartheta_2 + \theta), \quad \frac{d(\vartheta_2 + \theta)}{d\varphi} = r(s_4 \sigma_2 - s_5 \vartheta_2) \quad (7.4)$$

$$\frac{d(b\theta - \sigma_0)}{d\varphi} = r\vartheta_0, \quad \frac{d\vartheta_0}{d\varphi} = r(s_6 \sigma_0 - s_7 \vartheta_0 - s_8 b\psi) \quad (7.5)$$

Здесь  $\sigma_1 = -\lambda_1, \vartheta_1 = -d\lambda_1 / rd\mu, \sigma_2 = -\lambda_2, \vartheta_2 = -d\lambda_2 / rd\mu$  в центре области контакта, а  $\sigma_0$  и  $\vartheta_0$  имеют тот же смысл, что и  $\sigma_1, \vartheta_1$ , но для точек, удаленных по оси от центра диска на расстояние  $b$ , и вследствие только поворота на углы  $\theta$  и  $\psi$ .

При записи последних соотношений исходили из [1], учитывая систему отсчета, изображенную на фиг. 1. Заметим, что теорию [1] можно обобщить на случай движения колеса в своей срединной плоскости при отсутствии боковых сил, в результате чего выражения для  $P_1, M_2$  и (7.3) записываются в форме, аналогичной для  $P_2, M_1, M_3$  и (7.4).

Оценим степень близости выражений (6.1) – (6.3) и (7.1) – (7.5), сравнивая изображения по Лапласу для реакций связей. При этом потребуем, чтобы изображения совпадали при  $|p| \rightarrow \infty$  ( $p$  – параметр изображения), а в случае  $|p| \rightarrow 0$  совпадали с учетом членов  $p^2$  для изображений  $P_1, P_2, P_3, M_3$  и с учетом  $p$  для изображений  $M_1$  и  $M_2$ .

Это позволяет найти также и значения коэффициентов  $f_1, \dots, f_{11}, s_1, \dots, s_8$ :

$$f_1 = k_3, \quad f_2 = k_6, \quad f_3 = k_7, \quad f_4 = k_8, \quad f_5 = 2k_{13},$$

$$f_6 = k_{11}, \quad f_7 = b^2 f_4, \quad f_8 = b f_5, \quad f_9 = k_{14},$$

$$f_{10} = b f_1, \quad f_{11} = k_{16}$$

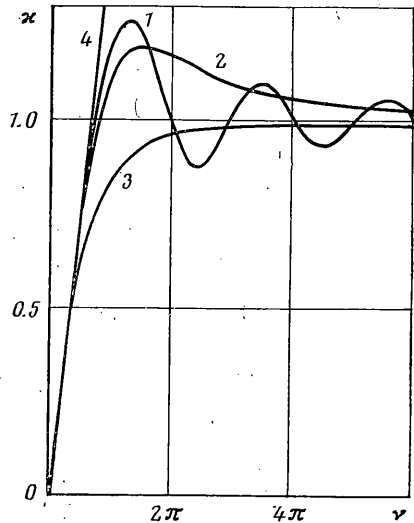
$$s_1 = s_6 = \left[ r^2 \left( \alpha_0 k_{17} + \frac{2k_4 \alpha_0^3}{3k_3} \right) \right]^{-1}$$

$$s_2 = s_7 = s_1 r (\alpha_0 + k_{17}), \quad s_3 = s_8 = k_{18} s_1$$

$$s_4 = \left[ r^2 \left( \alpha_0 k_{19} + \frac{2k_4 \alpha_0^3}{3k_6} \right) \right]^{-1}$$

$$s_5 = s_4 r (\alpha_0 + k_{19})$$

Проанализируем полученные результаты на примере составляющей  $P_2$ . На фиг. 5 представлены безразмерные амплитудно-частотные характеристики  $\kappa = |P_2(iv) / u_2(iv)| / k_6$ , соответствующие различным вариантам выражений для  $P_2$  при некоторых значениях параметров деформируемой периферии



Фиг. 5

( $p = iv / (2\alpha_0)$ ); кривая 1 соответствует выражениям (6.1), (6.3); кривая 2 — (7.1), (7.4) [1]; 3 соответствует случаю больших кинематических параметров [2]; 4 — случаю больших кинематических параметров и больших скоростей [2, 4]). При этом следует учесть, что коэффициенты в теории [1] здесь получены аналитически. Теория [4] дает хорошие результаты только при малых  $p$ .

Таким образом, полученные зависимости (6.1) — (6.3) позволяют оценить известные теории и получить серию приближенных выражений с учетом всех шести составляющих реакций связи и шести степеней свободы диска колеса. В отличие от известных подходов, касающихся движения, мало отклоняющегося от равномерного качения, здесь это последнее ограничение снято.

Заметим, что система (7.1) — (7.5) допускает дальнейшие упрощения по методу, развитому в [2].

Автор благодарит Д. М. Климова, Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева за внимание и ценные замечания.

Поступила 8 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Тр. ЦАГИ, 1945, № 564.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
3. Ишлинский А. Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения. Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 6.
4. Carter F. W. On the stability of running of locomotives. Proc. Roy. Soc. A, 1928, vol. 124, No. 788.
5. Гоздек В. С. Устойчивость качения заблокированных ориентирующихся колес шасси самолета. Тр. ЦАГИ, 1970, № 1196.
6. Левин М. А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. Докл. АН БССР, 1971, т. 15, № 5.
7. Левин М. А. О реакциях связей упругого колеса при качении. Докл. АН БССР, 1972, т. 16, № 5.
8. Левин М. А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. В кн.: XXV науч.-техн. конф. Материалы секции теорет. и прикл. механ. Минск, Белорусск. политехн. ин-т, 1969.