

## ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

В. В. БЕЛЕЦКИЙ, П. С. ЧУДИНОВ

(Москва)

В работах [1-3] рассматривались невозмущенные периодические режимы ходьбы двуногих шагающих аппаратов. При наличии возмущений возникает задача стабилизации ходьбы. Задачи стабилизации могут быть поставлены по-разному. Во всех случаях необходимо требование: аппарат не должен падать. Этому требованию можно удовлетворить, не привязываясь к фиксированному номинальному движению (или к набору номинальных движений).

В отличие от «жесткой» стабилизации, отслеживающей заданный номинальный режим, в данной работе предлагается использовать «свободную» стабилизацию, обеспечивающую устойчивое движение в произвольном режиме из заданного класса.

Здесь рассмотрена одна линейная задача стабилизации плоского движения в рамках ранее предложенной модели [4] двуногого шагающего аппарата, состоящего из весомого корпуса и пары невесомых двухзвенных ног, подвешенных в одной точке корпуса (фиг. 1).

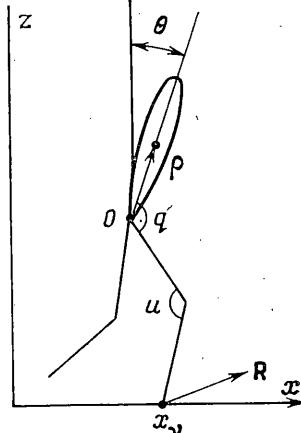
1. В линейной постановке одноопорное движение такого аппарата и управления в опорной ноге описываются следующими уравнениями [4]:

$$[I_0 + M\rho(z - z_v)]\theta'' - M\rho(g + z'')\theta = -M\rho x'' + M(g + z'')(x - x_v) - Mx''(z - z_v) \quad (1.1)$$

$$R_x = M(x'' + \rho\theta''), \quad R_z = M(z'' + g) \quad (1.2)$$

$$q_1 = R_x(z - z_v) - R_z(x - x_v), \quad q_2 = R_x(z_h - z_v) - R_z(x_h - x_v)$$

Введены следующие обозначения:  $\theta$  — угол отклонения корпуса, отсчитываемый от вертикали по направлению движения;  $x, z$  — декартовы координаты точки подвеса ноги  $O$ ;  $q_1, q_2$  — моменты сил управления соответственно в бедренном и коленном шарнирах опорной ноги;  $M$  — масса корпуса;  $I_0$  — момент инерции корпуса относительно точки  $O$ ;  $\rho$  — расстояние от  $O$  до центра масс корпуса;  $R_x, R_z$  — составляющие реакции в точке опоры;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $x_v, z_v$  ( $v=0, 1, 2, \dots$ ) — координаты точек следовой траектории;  $x_h, z_h$  — координаты колена опорной ноги. Управлениями можно считать величины  $R_x, R_z$ .



Фиг. 1

Поставим следующую задачу стабилизации: из некоторого возмущенного состояния в шестимерном фазовом пространстве  $(x, x', z, z', \theta, \theta')$  перейти к движению, для которого  $z = h$ ,  $x = Vt + x^0$ , где  $h$  и  $V$  — произвольные постоянные значения из области допустимости  $\Omega$  ( $z_{min} \leq h \leq z_{max}$ ,  $V_{min} \leq V \leq V_{max}$ ), а  $\theta(t)$  является периодической функцией времени. Это означает, что ищется не конкретное движение с заданными скоростью и высотой точки подвеса ног, а любое решение из области  $\Omega$ . Для решения этой задачи применим специальный прием, пользуясь спецификой уравнения (1.1).

Пусть аппарат получил начальную скорость  $x' = V$ , где  $V \in \Omega$ . Будем искать такое управление, которое сохраняет это значение горизонтальной

скорости  $\dot{x}$ . Тогда  $\ddot{x}=0$ . Из (1.2) следует, что этого всегда можно добиться, выбирая управление  $R_x=M\rho\theta^*$ , где  $\theta^*$  будет определено ниже непосредственно через координаты. Воспользовавшись также очевидным преобразованием

$$I_0+M\rho(z-z_v)=I_0+M\rho h+M\rho(z-z_v-h)$$

перепишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (I_0+M\rho h) \left[ 1 + \frac{M\rho}{I_0+M\rho h}(z-z_v-h) \right] \theta^* - \\ & - g\rho M \left( 1 + \frac{z^*}{g} \right) \theta = Mg \left( 1 + \frac{z^*}{g} \right) (x-x_v) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $h$  — некоторая произвольная постоянная величина, смысл которой выяснится ниже.

Синтез стабилизации вертикальной координаты  $z$  осуществим следующим образом. Потребуем, чтобы управление  $R_z$  строилось по формуле

$$R_z=M(g-\alpha z^*), \quad \alpha^2=gM\rho/(I_0+M\rho h)$$

Тогда из (1.2) следует

$$z^*=-\alpha z^*. \quad (1.4)$$

Подставим это выражение  $z^*$  в уравнение (1.3). Из структуры уравнения (1.3) тогда следует, что задачи стабилизации по  $z$  и по  $\theta$  разделяются. Условием разделения является требование

$$z^*=-\alpha z^*+\alpha(z_v+h) \quad (1.5)$$

которое не противоречит (1.4) ввиду произвольности постоянной  $h$ . Для  $\theta$  из (1.3) с учетом (1.4), (1.5) получим уравнение

$$\theta^*-\alpha^2\theta=n_0(x-x_v), \quad n_0=\alpha^2/\rho \quad (1.6)$$

В дальнейшем положим  $z_v=0$ , т. е. будем рассматривать ходьбу по горизонтальной поверхности. Тогда решение уравнения (1.5) имеет вид

$$z=h+c \exp(-\alpha t)=z_0+z_0(1-e^{-\alpha t})/\alpha$$

Координата  $z$  асимптотически стремится к величине  $h$ , которая так зависит от начальных условий  $z_0$ ,  $z_0$ :

$$h=z_0+\frac{z_0^{*2}}{2g}\pm\left[\frac{z_0^{*4}}{4g^2}+\frac{z_0^{*2}}{g}\left(z_0+\frac{I_0}{M\rho}\right)\right]^{1/2}$$

Большее значение  $h$  отвечает положительному значению  $z_0^*$ , меньшее — отрицательному значению  $z_0^*$ .

Следовательно, задача стабилизации движения сведена к задаче стабилизации угла  $\theta$ , изменение которого описывается уравнением (1.6). Как будет показано в п. 2, последняя задача решается выбором длины шага (или, что то же самое, выбором координаты  $x_v$  постановки ноги на каждом шаге).

Из всего описанного выше следует, что синтез управлений, решающий задачу стабилизации, осуществляется таким образом:

$$\begin{aligned} R_x &= M\rho[\alpha^2\theta+n_0(x-x_v)], \quad R_z=M(g-\alpha z^*) \\ q_1 &= M\rho[\alpha^2\theta+n_0(x-x_v)]z-M(g-\alpha z^*)(x-x_v) \\ q_2 &= (z-l \cos \gamma)R_x-(x+l \sin \gamma-x_v)R_z \end{aligned} \quad (1.7)$$

В этих формулах  $l$  — длина бедра, а также голени; угол  $\gamma$  между бедром и вертикалью вычисляется по формуле

$$\gamma = \arctg \frac{x_v-x}{z} + \arctg \left[ \frac{4l^2}{z^2+(x-x_v)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

Управления, описываемые формулами (1.7), осуществляют следующие задачи: выдерживание исходной постоянной скорости поступательного движения; устойчивую стабилизацию вертикальной координаты относительно некоторого, заранее не заданного, значения; разделение задач стабилизации по отдельным координатам и сведение к задаче угловой стабилизации.

Как легко видеть, предложенный алгоритм принципиально не привязан к фиксированному номинальному поступательному движению.

2. Стабилизация по углу  $\theta$  осуществляется следующим образом. Ищем решение уравнения (1.6) в виде

$$\theta(t) = \theta_H(t) + \vartheta(t) \quad (2.1)$$

где  $\theta_H(t)$  — номинальное движение, отвечающее реализующимся значениям  $V$  и  $h$ ;  $\vartheta(t)$  — возмущенное движение. Согласно (2.1) координату  $x_v$  также представим в виде суммы  $x_v = x_v^H + \Delta^\circ$ , где  $x_v^H$  отвечает номинальному движению  $\theta_H(t)$ , а  $\Delta^\circ$  отвечает возмущенному движению  $\vartheta(t)$ . Периодическое (с периодом  $T_0$ ) по углу и угловой скорости номинальное движение имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \theta_H(t) &= c_1 \exp[\alpha(t-t_N)] + c_2 \exp[-\alpha(t-t_N)] - [V(t-t_N) + S]/\rho \\ c_1 &= L_H/2\rho[\exp(\alpha T_0) - 1], \quad c_2 = -c_1 \exp(\alpha T_0) \\ L_H &= VT_0, \quad S = x_v^0 - x_v^0, \quad \theta_H(t_N + T_0) = \theta_H(t_N) = -(1/2L_H + S)/\rho \\ \theta_H'(t_N + T_0) &= \theta_H'(t_N) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\alpha L_H}{2} \left( \frac{\exp(\alpha T_0) + 1}{\exp(\alpha T_0) - 1} \right) - V \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

В формулах (2.2)  $t_N$  — моменты постановки ног ( $t_N = NT_0$ ,  $N=0, 1, 2\dots$ );  $L_H$  — длина шага аппарата;  $S$  — опорный отрезок (расстояние между точкой опоры и проекцией точки подвеса ног на горизонтальную плоскость в момент начала шага).

Уравнение возмущенного движения имеет вид

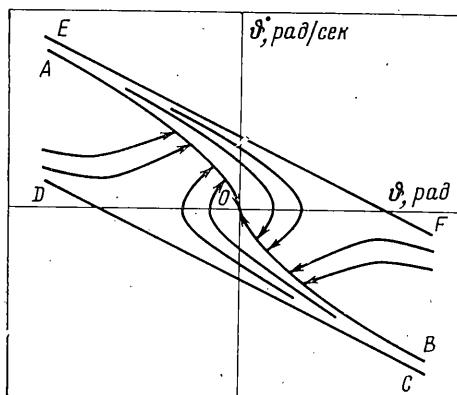
$$\dot{\vartheta}'' - \alpha^2 \dot{\vartheta} = -n_0 \Delta^\circ \quad (2.3)$$

Требуется за счет управления  $\Delta^\circ$  выйти на номинал, т. е. из некоторого возмущенного состояния ( $\dot{\vartheta}_0^\circ$ ,  $\vartheta_0^\circ$ ) попасть в начало координат фазовой плоскости ( $\vartheta$ ,  $\dot{\vartheta}$ ). Управление  $\Delta^\circ$  представляет собой возможное увеличение или уменьшение длины шага относительно длины номинального шага  $L_H$  и подчинено условиям  $-\Delta_1 \leq \Delta^\circ \leq \Delta_2$ , где  $\Delta_1, \Delta_2$  — положительные константы, определяемые длиной ног аппарата, а также параметрами  $h, V, T_0, S$ . В дальнейшем, не нарушая общности, положим  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ .

Если решить задачу быстродействия для уравнения (2.3) при помощи принципа максимума Понtryгина, то получим хорошо известную [4] картину синтеза оптимальных управлений (фиг. 2). Синтез осуществляется только в полосе  $CDEF$ , ограниченной прямыми  $CD$  и  $EF$ :

$$\dot{\vartheta}_{CD} = -\alpha(\Delta/\rho + \dot{\vartheta}), \quad \dot{\vartheta}_{EF} = \alpha(\Delta/\rho + \dot{\vartheta})$$

а синтезирующая функция является кусочно-постоянной функцией, принимающей значение  $+\Delta$  выше линии  $AOB$  и на дуге  $AO$ , и значение  $-\Delta$  ниже линии  $AOB$  и на дуге  $BO$ .



Фиг. 2

Фактически дело обстоит сложнее, поскольку принципиальной особенностью шагающего аппарата является возможность изменения управления только в моменты постановки ног, т. е. в моменты времени  $t_N=NT_0$  ( $N=1, 2, 3, \dots$ ). Следовательно, фазовая точка, двигаясь по фазовой траектории, может пересечь линию переключения  $AOB$ , и тогда процесс стабилизации будет иметь иной вид.

Опишем процесс стабилизации для случая, когда изменение управления возможно только в дискретные моменты времени и, следовательно, фазовая точка должна попасть в начало координат за время  $T=nT_0$ , где  $N$  — целое число. Введем обозначения:  $LOM$  — прямая, проходящая через начало координат параллельно прямым  $CD$  и  $EF$ , на которой управление равно нулю;  $\Sigma_1$  — область, заключенная между лучом  $OM$  и дугой  $BO$ ;  $\Sigma_2$  — область, заключенная между лучом  $OL$  и дугой  $AO$ ;  $\Delta/\rho=u$ ,  $\Delta/\rho=u^\circ$ ,  $|u| \leq u^\circ$ .

Области  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  образованы дугами гипербол, проходящих через начало координат

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{\vartheta' = -\alpha \sqrt{(\vartheta+u)^2 - u^2}; \quad 0 \leq u \leq u^\circ; \quad \vartheta_0 \geq 0\} \\ \Sigma_2 &= \{\vartheta' = \alpha \sqrt{(\vartheta-u)^2 - u^2}; \quad 0 \leq u \leq u^\circ; \quad \vartheta_0 \leq 0\}\end{aligned}$$

Рассмотрим область  $\Sigma_1$ . Из любой точки  $(\vartheta_0, \vartheta_0')$  этой области (кроме точек, лежащих на луче  $OM$ ) можно попасть в начало координат за  $m$  шагов, т. е. за время  $T=mT_0$  ( $m$  — целое), с управлением  $u=u_2<0$ , при чем управление и время движения удовлетворяют соотношениям

$$u_2 = \frac{1}{2\alpha^2\vartheta_0} (\alpha^2\vartheta_0^2 - \vartheta_0'^2), \quad mT_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\vartheta_0' + \alpha\vartheta_0}{\vartheta_0' - \alpha\vartheta_0} \quad (2.4)$$

Поставим следующую задачу 1: из некоторой начальной точки  $(\vartheta_0, \vartheta_0')$  за  $n$  шагов с управлением  $u=u_1>0$  попасть в область  $\Sigma_1$  (или оставаться в  $\Sigma_1$ , если точка  $(\vartheta_0, \vartheta_0')$  уже лежала в этой области), а затем за  $m$  шагов, двигаясь в соответствии с формулами (2.4) под воздействием управления  $u=u_2=u_2<0$ , попасть в начало координат ( $n, m$  — заданные целые числа). Этую задачу решают управления

$$\begin{aligned}u_1 &= U_1, \quad u_2 = -U_2 \\ U_1 &= \frac{\eta + a^2 b \xi}{(a-1)(ab-1)} = \text{const}, \quad U_2 = \frac{b(\eta + a\xi)}{(b-1)(ab-1)} = \text{const} \\ \xi &= \vartheta_0 + \vartheta_0'/\alpha, \quad \eta = \vartheta_0 - \vartheta_0'/\alpha, \quad a = \exp(\alpha n T_0), \quad b = \exp(\alpha m T_0)\end{aligned} \quad (2.5)$$

Из второй формулы (2.4) следует, что для точек области  $\Sigma_1$  период движения аппарата  $T_0$  не является произвольным, а зависит от числа шагов  $m$  и начальной точки  $(\vartheta_0, \vartheta_0')$ . Для того, чтобы сделать  $T_0$  независимым при любой начальной точке в области  $\Sigma_1$  и любом числе шагов, поставим задачу 2: найти управления  $u_1$  и  $u_2$ , такие, что сделав из точки  $(\vartheta_0, \vartheta_0')$   $n$  шагов с управлением  $u=u_1<0$  и  $m$  шагов с управлением  $u=u_2<0$ , попадем в начало координат. Управления, решающие эту задачу, также имеют вид (2.5).

Аналогично задаче 1 формулируется задача 3: из некоторой начальной точки  $(\vartheta_0, \vartheta_0')$  за  $n$  шагов с управлением  $u=u_1<0$  попасть в область  $\Sigma_2$ , а затем за  $m$  шагов с управлением  $u=u_2>0$  достичь начала координат. Аналогично задаче 2 ставится задача 4 для области  $\Sigma_2$ . Решения задач 3 и 4 по-прежнему имеют вид (2.5).

Задав параметры  $T_0, n, m$ , найдем области достижимости, отвечающие значению  $T=T_0(n+m)$  в задачах 1—4. Соответствующие результаты

приведены ниже. В первой графе записано управление при  $0 \leq t \leq nT_0$ ; во второй — управление при  $nT_0 \leq t \leq T_0(n+m)$ , в третьей — область достижимости задачи.

$$\begin{aligned} & 0 < U_1 \leq u^\circ \quad -u^\circ \leq -U_2 < 0 \quad \Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \dot{\vartheta}_0 + B_1 \vartheta_0 \leq A_1 \\ 0 < \dot{\vartheta}_0 + D_1 \vartheta_0 \leq C_1 \end{array} \right\} \\ & -u^\circ \leq U_1 < 0 \quad -u^\circ \leq -U_2 < 0 \quad \Gamma_2 = \left\{ \begin{array}{l} -A_1 \leq \dot{\vartheta}_0 + B_1 \vartheta_0 < 0 \\ 0 < \dot{\vartheta}_0 + D_1 \vartheta_0 \leq C_1 \end{array} \right\} \\ & -u^\circ \leq U_1 < 0 \quad 0 < -U_2 \leq u^\circ \quad \Gamma_3 = \left\{ \begin{array}{l} -A_1 \leq \dot{\vartheta}_0 + B_1 \vartheta_0 < 0 \\ -C_1 \leq \dot{\vartheta}_0 + D_1 \vartheta_0 < 0 \end{array} \right\} \\ & 0 < U_1 \leq u^\circ \quad 0 < -U_2 \leq u^\circ \quad \Gamma_4 = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \dot{\vartheta}_0 + B_1 \vartheta_0 \leq A_1 \\ -C_1 \leq \dot{\vartheta}_0 + D_1 \vartheta_0 < 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Постоянные положительные величины  $A_1, B_1, C_1, D_1$  таковы:

$$A_1 = \frac{\alpha u^\circ (a-1)(ab-1)}{a^2 b - 1}, \quad B_1 = \frac{\alpha(a^2 b + 1)}{a^2 b - 1}$$

$$C_1 = \frac{\alpha u^\circ (b-1)(ab-1)}{b(a-1)}, \quad D_1 = \frac{\alpha(a+1)}{a-1}$$

Таким образом, область достижимости, соответствующая значению  $T=T_0(n+m)$ , представляет собой параллелограмм  $P_1 P_2 P_3 P_4$  (фиг. 3), ограниченный четырьмя прямыми

$$\dot{\vartheta}_0 + B_1 \vartheta_0 = A_1, \quad \dot{\vartheta}_0 + B_1 \vartheta_0 = -A_1, \quad \dot{\vartheta}_0 + D_1 \vartheta_0 = C_1, \quad \dot{\vartheta}_0 + D_1 \vartheta_0 = -C_1$$

При  $T \rightarrow \infty$ , т. е. при  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ , параллелограмм  $P_1 P_2 P_3 P_4$  сливается с полосой  $CDEF$ , которая представляет собой область управляемости в данной задаче.

Запишем при помощи (2.5) время стабилизации  $T$  как функцию начальной точки  $(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0)$  и управлений  $u_1, u_2$ :

$$T = T(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0; u_1, u_2) = \frac{1}{\alpha} \ln(ab) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{(\pm \eta - u_1)(1 + \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\delta})}{u_2(\delta + \sqrt{\delta^2 + 2\delta}) - u_1} \right] \quad (2.6)$$

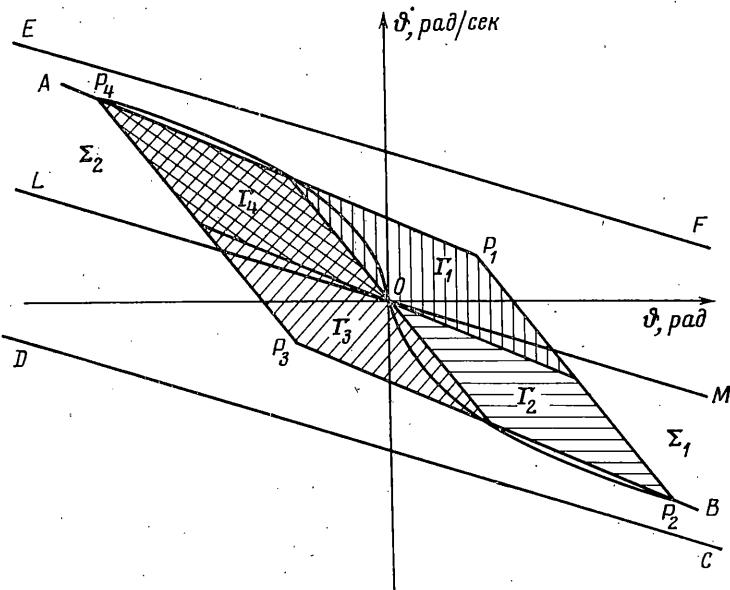
$$a = \frac{\pm \eta - u_1}{u_2(b-1) - u_1}, \quad b = 1 + \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\delta}, \quad \delta = \frac{\pm u_1(\xi + \eta) - \xi \eta}{2u_2(u_1 + u_2)} \quad (2.7)$$

Знак плюс отвечает начальным точкам, лежащим в полосе  $CDEF$  выше кривой  $A'OB'$  и на дуге  $A'O$ , знак минус — начальным точкам, лежащим в полосе  $CDEF$  ниже кривой  $A'OB'$  и на дуге  $B'O$ . Кривая линия  $A'OB'$  состоит из ветвей гипербол  $A'O$  и  $B'O$ :

$$\dot{\vartheta}_0 = \alpha \sqrt{(\vartheta_0 - u_1)^2 - u_1^2} \text{ при } \vartheta_0 \leq 0; \quad \dot{\vartheta}_0 = -\alpha \sqrt{(\vartheta_0 + u_1)^2 - u_1^2} \text{ при } \vartheta_0 \geq 0$$

Будем считать управления в (2.6) параметрами. Тогда при фиксированных значениях параметров формула (2.6) определяет в трехмерном пространстве  $(t, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0)$  поверхность  $T = T(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0, u_1 = \text{const}, u_2 = \text{const})$ , расположенную в полуправостранстве  $t \geq 0$  и симметричную относительно оси  $t$ . Пусть  $S, R$  — индексы управлений. Тогда при  $u_1^S > u_1^R, u_2^S > u_2^R$  поверхности  $T_R = T(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0, u_1^R = \text{const}, u_2^R = \text{const})$  содержатся внутри поверхностей  $T_S = T(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0, u_1^S = \text{const}, u_2^S = \text{const})$ .

На фиг. 4 показано сечение поверхностей  $T_s$  плоскостью  $\dot{\vartheta}_0 = 0$ . Кривые  $T_s$  получены при следующих значениях параметров:  $T_1 = T(\vartheta_0, 0, 0.5, 0.5)$ ,  $T_2 = T(\vartheta_0, 0, 0.5, 0.4)$ ,  $T_3 = T(\vartheta_0, 0, 0.4, 0.3)$ .



Фиг. 3

Движению с целым числом шагов отвечают значения  $T^{(N)} = T_0 N = T_0(n+m) = \text{const}$  (на фиг. 4  $N=2, 4, 6$ ).

Поскольку в формулах (2.5) управлению являются функциями числа шагов  $n$  и  $m$ , ясно, что для одной и той же начальной точки  $(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0)$  существует сколь угодно много управлений  $u_1, u_2$ , осуществляющих стабилизацию, причем  $u_1 \rightarrow \xi, u_2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ .

Ниже, в зависимости от числа шагов  $n$  и  $m$ , приведены значения управлений  $u_1, u_2$ , осуществляющих стабилизацию из одной и той же начальной точки  $(\vartheta_0 = -0.0001, \dot{\vartheta}_0 = 0.2)$  при  $T_0 = 0.1$  сек,  $\alpha = 2.48$  сек<sup>-1</sup>.

$n$	$m$	$u_1$	$u_2$
1	1	0.491	-0.159
2	1	0.279	-0.242
3	2	0.186	-0.092
10	10	0.088	-0.007
20	20	0.081	-0.0006

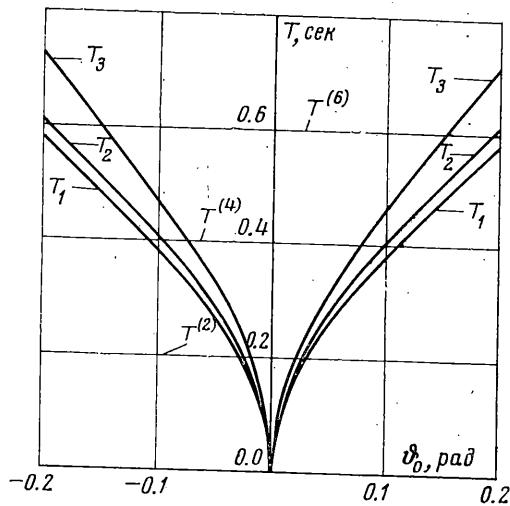
Фазовые кривые  $\dot{\vartheta}(\vartheta)$  для  $n+m=1+1, 2+1, 3+2$  построены на фиг. 5 (номера кривых 1, 2, 3 соответствуют значению  $n$ ).

Найдем для заданной начальной точки  $(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0)$  минимальное число шагов, требуемых для стабилизации. Положив в (2.7)  $u_1 = u_2 = u^*$ , получим значения  $a_{\min}, b_{\min}$ , отвечающие согласно принципу максимума минимальному времени стабилизации, после чего определим в общем случае минимальное целое число шагов  $N_{\min}$ , необходимых для стабилизации:

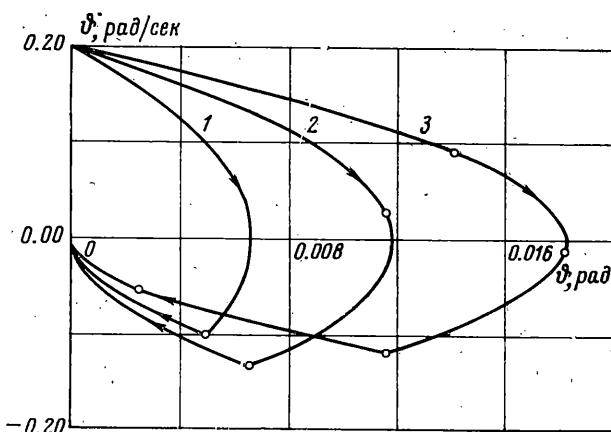
$$N_{\min} = n_{\min} + m_{\min}, \quad n_{\min} = [n'] + 1, \quad m_{\min} = [m'] + 1, \quad n' = \frac{1}{\alpha T_0} \ln a_{\min}, \quad (2.8)$$

$$m' = \frac{1}{\alpha T_0} \ln b_{\min}$$

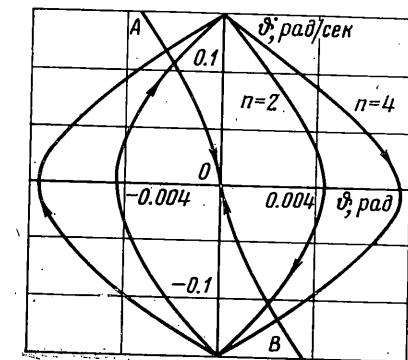
где  $[n'], [m']$  – целые части чисел  $n', m'$ . Точка  $(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0)$  заведомо будет находиться в области достижимости, определяемой числами  $n_{\min}, m_{\min}$ .



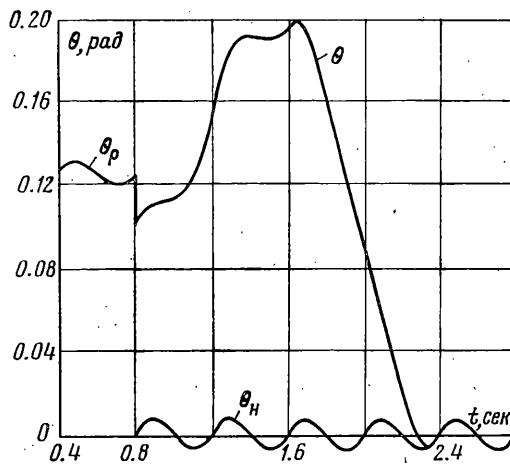
Фиг. 4



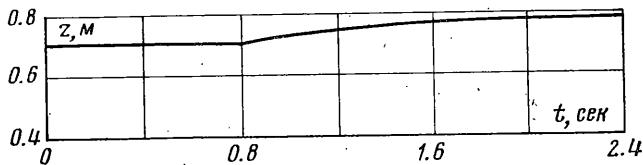
Фиг. 5



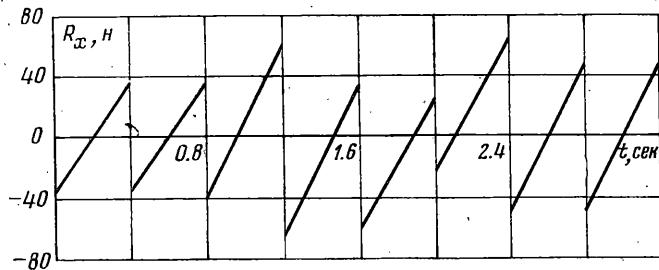
Фиг. 6



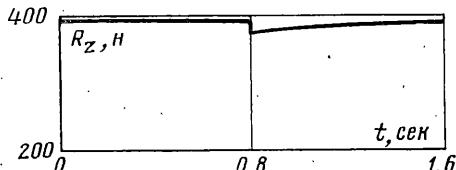
Фиг. 7



Фиг. 8



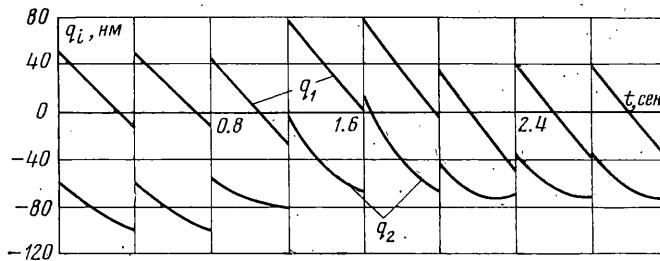
Фиг. 9



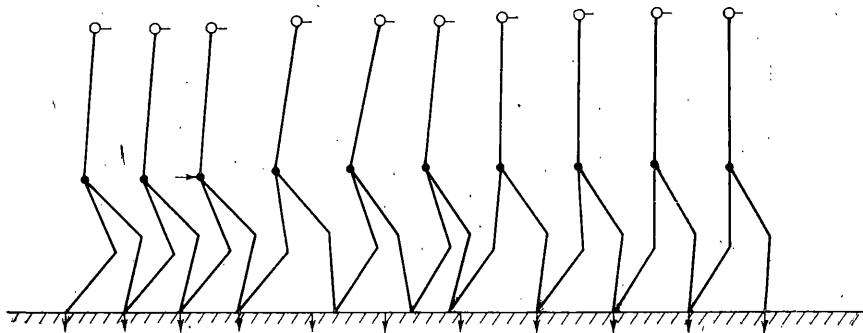
Фиг. 10

Формулы (2.5), в которых  $n$  и  $m$  найдены при помощи (2.7), (2.8), определяют ближайшие к оптимальным управления, обеспечивающие стабилизацию за целое число шагов.

Если начальная точка располагается на оси  $0\theta^\circ$ , то за конечное число шагов можно привести фазовую точку не в начало координат, а в ту же самую начальную точку («циклическая стабилизация»).



Фиг. 11



Фиг. 12

Для этого управление выбирается следующим образом:

$$u^{(n)} = \frac{\vartheta_0 [\exp(-1/2n\alpha T_0) + 1]}{\alpha [\exp(-1/2n\alpha T_0) - 1]} \quad u = u^{(n)} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1/2nT_0 \\ u = -u^{(n)} \quad \text{при } 1/2nT_0 \leq t \leq nT_0 \quad |u^{(n)}| \leq u^* \quad (n=2, 4)$$

При  $n=2$  имеем двухшаговую циклическую стабилизацию, при  $n=4$  — четырехшаговую циклическую стабилизацию (фиг. 6). При определенных условиях можно осуществить также трехшаговую циклическую стабилизацию.

С механической точки зрения описанные выше процессы стабилизации угла  $\vartheta$  сводятся к сдвигу следовой траектории на величины  $\Delta_1 = u_{10}$ ,  $\Delta_2 = u_{20}$  вперед или назад относительно номинальной следовой траектории. Стабилизация вертикальной координаты  $z$  осуществляется за счет управлений в шарнирах аппарата.

**3. Пример.** В расчетах использованы следующие значения параметров аппарата:  $M=40 \text{ кг}$ ,  $\rho=0.4 \text{ м}$ ,  $I_0=12.8 \text{ кгм}^2$ ,  $S=-0.2 \text{ м}$ ,  $T_0=0.4 \text{ сек}$ ,  $l=0.425 \text{ м}$ .

Аппарат совершает невозмущенное периодическое движение со скоростью  $V_p=0.75 \text{ м/сек}$ , высотой точки подвеса ног  $z_p=0.7 \text{ м}$  и шагом  $L_p=0.3 \text{ м}$ . На интервале времени  $0 \leq t \leq t_b$ , где  $t_b$  — момент воздействия возмущений, угловое движение корпуса аппарата описывается уравнением (2.2):

$$\theta_p(t) = c_1^{(1)} \exp[\alpha_1(t-t_N)] + c_2^{(1)} \exp[-\alpha_1(t-t_N)] - (x-x_N)/\rho$$

где  $c_1^{(1)}$ ,  $c_2^{(1)}$ ,  $\alpha_1$  зависят от  $L_p$ ,  $z_p$ . В момент времени  $t_b=2T_0$  (в начале третьего шага) на аппарат действуют возмущения: скорость поступательного движения возрастает до  $1 \text{ м/сек}$ ; точка подвеса приобретает вертикальную скорость  $z_0=0.2 \text{ м/сек}$ .

корпус получает возмущения  $\theta_b$ ,  $\dot{\theta}_b$  по углу и угловой скорости. На отрезке времени  $t_b \leq t \leq 3T_0$  угловое движение корпуса описывается формулами

$$\theta(t) = \theta_H(t) + \vartheta(t), \quad \theta_H(t) = c_1^{(2)} \exp[\alpha_2(t-t_N)] + c_2^{(2)} \exp[-\alpha_2(t-t_N)] - (x-x_N)/\rho \quad (3.1)$$

и уравнением

$$\ddot{\theta} - \alpha_2^2 \theta = 0 \quad (3.2)$$

Здесь  $\theta_H(t)$  — номинальное движение, отвечающее значениям  $V_H=1$  м/сек,  $h=h(z_0)=0.7$ ,  $z_0=0.2=0.78027$  м. В качестве начальных значений  $\dot{\theta}(t_b)=\dot{\theta}_{00}$ ,  $\ddot{\theta}(t_b)=\ddot{\theta}_{00}$  уравнения (3.2), принимаем значения

$$\dot{\theta}_{00} = [\theta_p(t_b) - \theta_H(t_b)] + \dot{\theta}_b = 0.1, \quad \ddot{\theta}_{00} = [\theta_p(t_b) - \theta_H(t_b)] + \ddot{\theta}_b = 0$$

Используя (3.2), вычисляем значения  $\dot{\theta}(3T_0)=\dot{\theta}_0$ ,  $\ddot{\theta}(3T_0)=\ddot{\theta}_0$  и полагаем их начальными для уравнения (2.3), которым описывается возмущенное движение корпуса в процессе стабилизации. Зная  $(\dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0)$ , находим управления  $u_1 > 0$ ,  $u_2 < 0$ , а также значения  $n_{min}$ ,  $m_{min}$ ; задаем величины  $n=2 \geq n_{min}$ ,  $m=1 \geq m_{min}$  и в момент времени  $t=3T_0$  включаем управление  $u_1$ , т. е. увеличив новый номинальный шаг  $L_H=0.4$  м на величину  $\Delta_1^\circ = u_1 \rho = 0.1322$  м, сдвигаем следовую дорожку вперед относительно номинальной на величину  $\Delta_1^\circ$ . Следующий (четвертый) шаг аппарата имеет длину  $L=L_H$ , пятый шаг —  $L=L_H-\Delta_1^\circ-\Delta_2^\circ$ , в результате чего следовая дорожка сдвигается назад относительно номинальной на расстояние  $\Delta_2^\circ=0.068$  м. После шестого шага длиной  $L=L_H+\Delta_2^\circ$  аппарат попадает на номинальную следовую траекторию; процесс стабилизации угла  $\theta$  к концу этого шага заканчивается. Далее движение происходит по номинальной следовой траектории.

Изменение величины опорного отрезка в процессе стабилизации зависит от изменения длины шага, которое является управлением, обеспечивающим стабилизацию угла  $\theta$ . На фиг. 7—11 построены зависимости  $\theta(t)$ ,  $z(t)$ ,  $R_x(t)$ ,  $R_z(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  в процессе стабилизации. На фиг. 12 изображена кинограмма движений аппарата.

Поступила 10 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы, ч. 1—2. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3—4.
2. Белецкий В. В., Кирсанова Т. С. Плоские линейные модели двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
3. Белецкий В. В., Чудинов П. С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
4. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.