

**МЕХАНИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
№ 6 · 1977**

УДК 531.8

**О НЕПРЕРЫВНОМ И ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ  
ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ  
ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА**

**В. Б. ЛАРИН**

(Киев)

Задача синтеза системы управления горизонтальным движением шагающего аппарата в предположении, что инерционностью ног можно пренебречь, формулируется как задача периодической оптимизации, решение которой (алгоритм управления) находится в явном виде. Обсуждается вариант двухуровневой (иерархической) структуры системы управления горизонтальным движением аппарата. Полученные результаты иллюстрируются на примере синтеза системы управления простейшим двуногим шагающим аппаратом, который идеализируется как снабженный стопой перевернутый математический маятник.

В [1] показано, что можно синтезировать удовлетворительную систему управления простейшим двуногим шагающим аппаратом, разбив общую задачу управления на две<sup>1</sup>. Вертикальную стабилизацию аппарата можно осуществить изменением усилия в ноге, а задача управления горизонтальным движением аппарата может быть решена подходящим выбором координат точки опоры ноги на каждом шаге. Дальнейшее усложнение схемы шагающего аппарата связано с добавлением в систему управления горизонтальным движением новых элементов (стопы, компенсирующей массы и т. п.). В связи с этим стабилизация горизонтального движения таких систем может осуществляться как путем непрерывного управления (управления движением компенсирующей массы, изменением положения «точки нулевого момента» в стопе [2]), так и путем импульсного управления, т. е. управления в дискретные моменты времени (выбор на каждом шаге координат точки опоры ноги [3]). Поэтому при усложнении динамической схемы шагающего аппарата возникает задача наиболее эффективно объединить оба способа стабилизации, т. е. синтезировать оптимальный регулятор, осуществляющий как непрерывное, так и импульсное управление.

1. Рассмотрим, не пренебрегая инерцией ног, задачу синтеза такого регулятора в случае одноопорной регулярной походки (аппарат может опираться только на одну ногу, смена опорных ног происходит через равные промежутки времени  $\tau$ ).

Предположим, что горизонтальное движение аппарата относительно точки опоры ноги можно с достаточной точностью описать системой обыкновенных дифференциальных уравнений<sup>2</sup>

$$\dot{x} = Fx + \left( I + M \sum_k \delta(t - k\tau) \right) u \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  —  $n$ -мерный вектор фазовых координат,  $u$  —  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий,  $F$ ,  $I$ ,  $M$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Кроме того, пусть заданы желаемое направление и скорость перемещения аппарата. Это условие (программа движения) может быть formalизовано следующим образом: координаты точки опоры ноги, значения ко-

<sup>1</sup> См. также Ларин В. Б.: Управление шагающим аппаратом. Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1975, препринт № 11.

<sup>2</sup> Присутствие  $\delta$ -функций Дирака в уравнении (1.1) отражает механизм импульсного управления и связано с тем, что в моменты  $t = k\tau$  происходит скачкообразное изменение координат точки опоры ноги (смена опорной ноги), поэтому соответствующие фазовые координаты испытывают разрыв.

горых на  $k$ -м шаге (время этого шага  $(k-1)\tau < t < k\tau$ ) обозначим  $\mathbf{x}_0(k)$ ,  $y_0(k)$ , должны получить приращения  $\Delta \mathbf{x}_0(k)$ ,  $\Delta y_0(k)$  на  $(k+1)$ -м шаге

$$\mathbf{x}_0(k+1) = \mathbf{x}_0(k) + \Delta \mathbf{x}_0(k), \quad y_0(k+1) = y_0(k) + \Delta y_0(k) \quad (1.2)$$

Такой режим движения может быть реализован подходящим выбором в моменты  $t=k\tau$  программного управляющего воздействия — вектора  $\mathbf{r}(k)$ . Действительно, при соответствующем выборе  $\mathbf{r}(k)$  вектор  $M\mathbf{r}(k)$  обеспечит в моменты  $t=k\tau$  изменение в уравнении (1.1) вектора фазовых координат, отвечающее изменению координат точки опоры ноги на величины  $\Delta \mathbf{x}_0(k)$ ,  $\Delta y_0(k)$ .

Рассмотрение общей задачи синтеза алгоритма управления горизонтальным движением начнем с задачи оптимизации равномерной походки, когда  $\Delta \mathbf{x}_0(k)$ ,  $\Delta y_0(k)$  и  $\mathbf{r}(k)=\mathbf{r}$  не зависят от  $k$ . Периодичность рассматриваемого режима движения и требование минимальности управляющих воздействий, стабилизирующих заданный режим движения, позволяют выбрать следующий критерий оптимальности:

$$G = \frac{1}{2}(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{r}') C (\mathbf{u}(0) - \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_0^\tau u' B u dt$$

или эквивалентный ему (отличающийся на константу)

$$G = \int_0^\tau \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u}' (B + C \delta(t)) \mathbf{u} - \mathbf{r}' C \mathbf{u} \delta(t) \right] dt \quad (1.3)$$

Выбором входящих в это выражение положительно-определенных симметричных матриц  $B$  и  $C$  можно регулировать соотношение нагрузки импульсного и непрерывного механизмов стабилизации.

В случае равномерной походки фазовый портрет системы повторяется с периодом  $\tau$ :

$$\mathbf{x}(k\tau-0) = \mathbf{x}((k+1)\tau-0)$$

и поэтому сформулированная задача управления регулярным горизонтальным движением аппарата является задачей периодической оптимизации, и для ее решения могут быть использованы результаты [4]. Согласно [4] (следствие 1) оптимальное управление может быть осуществлено по принципу обратной связи, и в принятых обозначениях уравнение оптимального регулятора имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = - \left[ B + C \sum_k \delta(t-k\tau) \right]^{-1} & \left\{ \left[ I' + M' \sum_k \delta(t-k\tau) \right] \times \right. \\ & \left. \times [S\mathbf{x} - \Psi] - \sum_k \delta(t-k\tau) C \mathbf{r} \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

или

$$\mathbf{u} = -B^{-1}I'(S\mathbf{x} - \Psi) \quad \text{при } t \neq k\tau \quad (1.5)$$

$$\mathbf{u} = -C^{-1}M'(S\mathbf{x} - \Psi) + \mathbf{r} \quad \text{при } t = k\tau$$

В этих выражениях матрица  $S$  — периодическое (с периодом  $\tau$ ) решение уравнения Риккати

$$\begin{aligned} -S^* = SF + F'S - S & \left[ I + M \sum_k \delta(t-k\tau) \right] \times \\ & \times \left[ B + C \sum_k \delta(t-k\tau) \right]^{-1} \left[ I' + M' \sum_k \delta(t-k\tau) \right] S \end{aligned} \quad (1.6)$$

а вектор  $\psi$  — периодическим (с периодом  $\tau$ ) решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & S \left[ I + M \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \left[ B + C \sum_k \delta(t - k\tau) \right]^{-1} C r \sum_k \delta(t - k\tau) - \\ & - \left\{ F' - S \left[ I + M \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \left[ B + C \sum_k \delta(t - k\tau) \right]^{-1} \left[ I' + M' \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \right\} \psi \end{aligned} \quad (1.7)$$

Покажем, что в рассматриваемой вариационной задаче специфика оптимизируемого функционала (критерия качества) позволяет при сравнительно слабых ограничениях, накладываемых на матрицу  $F$ , найти искомые периодические решения уравнений (1.6) и (1.7).

Начнем с построения периодического решения уравнения (1.6). Предположим, что собственные числа матрицы  $F$  не лежат на мнимой оси, т. е. матрица  $F$  линейным преобразованием, связанным с заменой переменных  $x = Tq$ , может быть приведена к блочно-диагональному виду

$$T^{-1}FT = \begin{vmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{vmatrix}$$

причем собственные числа матриц  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_-$  лежат в правой или в левой полуплоскости соответственно. Это обстоятельство (отрицательность действительных частей собственных чисел матрицы  $\Lambda_-$ ) говорит о том, что регулятор, оптимизирующий критерий (1.3), должен зависеть только от тех компонент вектора  $q$ , которые преобразуются матрицей  $\Lambda_+$ . Поэтому матрицу  $S$  будем искать в виде

$$S = (T')^{-1} \begin{vmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} T^{-1} \quad (1.8)$$

Умножив левую и правую части уравнения (1.7) слева на  $T'$ , а справа на  $T$ , получим

$$\begin{aligned} T'S'T = & T'STT^{-1}FT + T'F'(T')^{-1}T'ST - T'STT^{-1} \left[ I + M \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \times \\ & \times \left[ B + C \sum_k \delta(t - k\tau) \right]^{-1} \left[ I' + M' \sum_k \delta(t - k\tau) \right] (T')^{-1} T'ST \end{aligned}$$

Следовательно, матрица  $R$  является периодическим решением уравнения Риккати меньшей размерности

$$-R' = R\Lambda_+ + \Lambda_+' R - R\theta_{11}R \quad (1.9)$$

Входящая в это уравнение матрица  $\theta_{11}$  имеет следующую структуру:

$$\theta_{11} = N_{11} + N_{11} \sum_k \delta(t - k\tau)$$

и определяется разбиением на блоки  $\theta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) соответствующего размера матрицы

$$\begin{aligned} & T^{-1} \left[ I + M \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \left[ B + C \sum_k \delta(t - k\tau) \right]^{-1} \times \\ & \times \left[ I' + M' \sum_k \delta(t - k\tau) \right] (T')^{-1} = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.9) перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}(R^{-1}) = \Lambda_+ R^{-1} + R^{-1} \Lambda'_+ - N_{11} - N_{11}^\delta \sum_k \delta(t - k\tau)$$

и посторим на отрезке времени  $[0, \tau]$  периодическое решение.

В моменты  $t=k\tau$  матрица  $R^{-1}$  скачкообразно изменяется, и величина этого скачка равна  $-N_{11}^\delta$ . Так, для  $t=0$  имеем

$$R^{-1}(+0) - R^{-1}(-0) = -N_{11}^\delta \quad (1.11)$$

В промежутке между скачками ( $t \neq k\tau$ ) матрица  $R^{-1}$  непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}(R^{-1}) = \Lambda_+ R^{-1} + R^{-1} \Lambda'_+ - N_{11}$$

решение которого имеет вид

$$R^{-1}(t) = \Pi + e^{\Lambda_+ t} (R^{-1}(+0) - \Pi) e^{\Lambda'_+ t} \quad (1.12)$$

где матрица  $\Pi$  определяется уравнением Ляпунова

$$\Lambda_+ \Pi + \Pi \Lambda'_+ = N_{11} \quad (1.13)$$

Соотношения (1.11) и (1.12) позволяют построить периодическое решение уравнения (1.9). Условие периодичности имеет вид  $R(-0) = R(\tau - 0)$  и, принимая во внимание (1.11), (1.12), может быть преобразовано в уравнение Ляпунова, определяющее  $R(-0)$ :

$$R^{-1}(-0) - e^{-\Lambda_+ \tau} R^{-1}(-0) e^{-\Lambda'_+ \tau} = N_{11}^\delta + \Pi - e^{-\Lambda_+ \tau} \Pi e^{-\Lambda'_+ \tau} \quad (1.14)$$

Таким образом, периодическое решение уравнения (1.9) на разных участках периода имеет вид

$$R(k\tau - 0) = R(-0) \text{ определяется уравнением (1.14)}$$

$$R(k\tau + 0) = R(+0) = [R^{-1}(-0) - N_{11}^\delta]^{-1} \quad (1.15)$$

$$R(t) = [\Pi + \exp \Lambda_+(t - k\tau) (R^{-1}(-0) - N_{11}^\delta - \Pi) \exp \Lambda'_+(t - k\tau)]^{-1} \\ \text{при } k\tau < t < (k+1)\tau \quad (1.16)$$

Искомое периодическое решение уравнения (1.6) определяется выражениями (1.14) – (1.16) и соотношением (1.8).

Приступим к построению периодического решения уравнения (1.7). Специфика этой задачи состоит в том, что в моменты времени  $t=k\tau$  элементы матрицы  $S$  испытывают разрыв. Поэтому периодическое решение этого уравнения будем искать в виде  $\Psi = S\eta$ , где элементы вектора  $\eta$ , подлежащие определению, – периодические функции с периодом  $\tau$ . Принимая во внимание, что  $S$  удовлетворяет уравнению (1.6), можно привести уравнение (1.7) к виду

$$S\dot{\eta} = S \left[ F\eta + Mr \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \quad (1.17)$$

и поэтому для определения вектора  $\Psi$  достаточно определить  $\eta$  как периодическое решение уравнения

$$\dot{\eta} = F\eta + Mr \sum_k \delta(t - k\tau) \quad (1.18)$$

Соответствующий искомому периодическому решению вектор начальных условий  $\eta(+0)$  определяется условием периодичности и соотношением на скачке в момент  $t=\tau$ :

$$\eta(\tau - 0) = \exp F\tau \eta(+0) = \eta(-0) = \eta(+0) - Mr$$

Так как, по предположению, матрица  $F$  не имеет собственных чисел на мнимой оси, то

$$\eta(+0) = [E - \exp F\tau]^{-1} M r \quad (1.19)$$

Следовательно, при  $0 < t < \tau$  периодическое решение уравнения (1.18) имеет вид

$$\eta = \exp F t [E - \exp F\tau]^{-1} M r \quad (1.20)$$

Таким образом, уравнения регулятора (1.4) и (1.5) можно переписать так:

$$\begin{aligned} u = & - \left[ B + C \sum_k \delta(t - k\tau) \right]^{-1} \left\{ \left[ I' + M' \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \times \right. \\ & \left. \times [S(x - \eta)] - Cr \sum_k \delta(t - k\tau) \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

или в виде

$$u = -C^{-1}M'S(x - \eta) + r \text{ при } t = k\tau; \quad u = -B^{-1}I'S(x - \eta) \text{ при } t \neq k\tau \quad (1.22)$$

Отметим, что в моменты  $t = k\tau$  скачкообразно изменяются элементы матрицы  $S$  и компоненты векторов  $\eta$  и  $x$ , поэтому приведенная выше форма записи уравнения регулятора нуждается в дополнительной интерпретации. Покажем, что в моменты  $t = k\tau$  изменение  $S$ ,  $x$ ,  $\eta$  происходит таким образом, что вектор  $S(x - \eta)$  непрерывен, поэтому, для определенности, можно полагать, например, что компоненты вектора  $S(x - \eta)$  в первом соотношении (1.22) вычислены при значении  $t = k\tau - 0$ . Для доказательства непрерывности вектора  $S(x - \eta)$  достаточно показать непрерывность вектора  $Sx - \psi$ . Продифференцировав этот вектор и воспользовавшись соотношениями (1.1), (1.4), (1.6), (1.7), получим

$$\frac{d}{dt}(Sx - \psi) = -F'(Sx - \psi)$$

Исследуем структуру уравнений оптимального регулятора. То, что в соотношениях (1.21), (1.22) управляющее воздействие зависит только от разности векторов  $x$  и  $\eta$ , позволяет рассматривать  $\eta$  как программное движение аппарата. В пользу такой интерпретации говорит и то, что вектор  $x$  с течением времени будет стремиться к  $\eta$ , т. е. ( $\varepsilon = x - \eta$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0 \quad \text{при } \varepsilon(0) \neq 0$$

Покажем это. Из (1.1), (1.18), (1.21) следует

$$\dot{\varepsilon} = F\varepsilon - \left[ I + M \sum_k \delta(t - k\tau) \right] \left[ B + C \sum_k \delta(t - k\tau) \right]^{-1} \left[ I' + M' \sum_k \delta(t - k\tau) \right] S\varepsilon \quad (1.23)$$

Произведем замену переменных  $\varepsilon = T\gamma$  (матрица этого преобразования совпадает с матрицей, связывающей векторы  $x$  и  $q$ ).

Принимая во внимание соотношения (1.8)–(1.10) и представив вектор  $\gamma$  в виде двух компонент  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , систему (1.23) перепишем в виде

$$\dot{\gamma}_+ = (\Lambda_+ + \theta_{11}R)\gamma_+, \quad \dot{\gamma}_- = -\theta_{21}R\gamma_+ + \Lambda_-\gamma_- \quad (1.24)$$

Найдем соотношения, описывающие изменение вектора  $\gamma_+$ , через интервал времени  $\tau$  (элементы матрицы коэффициентов соответствующего уравнения (1.24) являются периодическими функциями с периодом  $\tau$ ). Согласно (1.10) и (1.24)

$$\frac{d}{dt}(R\gamma_+) = -\Lambda_+' R\gamma_+ \quad (1.25)$$

и таким образом

$$R((k+1)\tau-0)\gamma_+((k+1)\tau-0) = (\exp -\Lambda_+' \tau) R(k\tau+0)\gamma_+(k\tau+0)$$

Учитывая непрерывность вектора  $R\gamma_+$  и периодичность матрицы  $R$ , можно записать

$$\gamma_+((k+1)\tau+0) = R^{-1}(+0)(\exp -\Lambda_+' \tau) R(+0)\gamma_+(k\tau+0) \quad (1.26)$$

Из второго уравнения (1.24) найдем

$$\begin{aligned} \gamma_-(-0) &= \exp \Lambda_- \tau \gamma_- (+0) - (\exp \Lambda_- \tau) \times \\ &\times \int_0^\tau (\exp -\Lambda_- \xi) N_{21} (\exp -\Lambda_+' \xi) d\xi R(+0)\gamma_+(+0) \end{aligned}$$

Так как

$$\gamma_- (+0) = \gamma_- (-0) - N_{21} \delta R(+0)\gamma_+(+0) \quad \left( \theta_{21} = N_{21} + N_{21} \sum_k \delta(t-k\tau) \right)$$

получим

$$\begin{aligned} \gamma_-((k+1)\tau+0) &= -[(\exp \Lambda_- \tau) Y(\tau) + N_{21} \delta \exp -\Lambda_+' \tau] R(+0)\gamma_+(k\tau+0) + \\ &+ \exp \Lambda_- \tau \gamma_- (k\tau+0), \quad Y(\tau) = \int_0^\tau (\exp -\Lambda_- \xi) N_{21} \exp -\Lambda_+' \xi d\xi \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \varepsilon((k+1)\tau+0) &= A_\varepsilon \varepsilon(k\tau+0) = \\ &= T \begin{vmatrix} R^{-1}(+0) e^{-\Lambda_+' \tau} R(+0) & 0 \\ -[e^{\Lambda_- \tau} Y(\tau) + N_{21} \delta e^{-\Lambda_+' \tau}] R(+0) & e^{\Lambda_- \tau} \end{vmatrix} T^{-1} \varepsilon(k\tau+0) \quad (1.27) \end{aligned}$$

Так как собственные числа матриц  $-\Lambda_+' \tau$  и  $\Lambda_- \tau$  лежат в левой полуплоскости, то собственные числа матрицы  $R^{-1}(+0) e^{-\Lambda_+' \tau} R(+0)$ , совпадающие с собственными числами матрицы  $\exp -\Lambda_+' \tau$ , и матрицы  $\exp \Lambda_- \tau$  лежат внутри единичного круга. Поэтому  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varepsilon(k\tau+0) = 0$  при  $\varepsilon(0) \neq 0$ , что

доказывает асимптотическую устойчивость системы (1.23). Заметим, что этот вывод позволяет в ряде случаев существенно упростить задачу анализа конфигурации шагающего аппарата, так как позволяет заменить ее более простой задачей анализа вектора  $\eta$ , который согласно (1.20) не зависит ни от матрицы  $I$ , характеризующей эффективность механизмов непрерывного управления (моменты, действующие в стопе, и т. п.), ни от матриц  $B$ ,  $C$ , регулирующих соотношение нагрузки импульсного и непрерывного механизмов стабилизации.

Заканчивая рассмотрение вопросов стабилизации равномерного горизонтального движения двуногого шагающего аппарата, отметим, что аналогичный подход (принцип периодической оптимизации) может быть использован и при решении задачи управления четырехногим шагающим аппаратом<sup>1</sup>.

2. Рассмотрим задачу маневрирования двуногого шагающего аппарата. Для реализации заданного движения нужно, вообще говоря, вычислить такие зависимости от времени элементов вектора управления  $u(t)$ , которые обеспечивают выполнение заданного маневра. Однако при многоуровневой (иерархической) системе управления шагающим аппаратом, когда

<sup>1</sup> Ларин В. Б. Управление четырехногим шагающим аппаратом. Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1976, препринт № 13.

разработка программы (прокладка трассы движения) осуществляется стоящим выше уровнем системы или человеком, такой способ управления довольно сложен (вектор  $u(t)$  может иметь много компонент). Поэтому, ориентируясь на иерархическую структуру системы управления, рассмотрим другой способ управления нестационарным движением аппарата. Будем рассматривать компоненты вектора  $r$  как управляющие воздействия в системе, движения которой описываются уравнениями (1.1) и (1.22).

Пусть вектор  $r$  является кусочно-постоянной функцией времени

$$r(t) = \sum_k r_k(t), \quad r_k(t) = \begin{cases} r(k) & \text{при } (k-1)\tau < t \leq k\tau \\ 0 & \text{при } t \notin ((k-1)\tau, k\tau] \end{cases}$$

Найдем уравнения, которые описывают шагающий аппарат как объект управления вектором  $r(t)$ . Это проще всего сделать, если воспользоваться соотношением (1.27). Подставив в (1.27) выражение  $\varepsilon$  через  $x$  и  $\eta$  и принимая во внимание (1.20), получим следующее конечно-разностное уравнение:

$$x(k+1) = A_e x(k) + (E - A_e)(E - e^{F\tau}) M r(k), \quad x((k-1)\tau + 0) = x(k-1)\tau + 0 \quad (2.1)$$

Это рекуррентное соотношение, как и система дифференциальных уравнений (1.1), описывает движение аппарата относительно точки опоры ноги. Для получения более полной картины движения систему (2.1) следует дополнить уравнениями, определяющими последовательность точек опоры ноги (следовую дорожку). Управление, происходящее в моменты  $t = k\tau$  (импульсное управление), обусловлено изменением координат точки опоры ноги, поэтому существует (в общем случае) прямоугольная матрица  $\Phi$ , которая преобразует вектор управляющих воздействий в приращения координат точки опоры ноги

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0(k) \\ \Delta y_0(k) \end{bmatrix} = \Phi M u(k\tau) \quad (2.2)$$

Выразив  $u(k\tau)$  через  $x(k)$  и  $r(k)$ , перепишем соотношения (1.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ y_0(k+1) \end{bmatrix} = & -\Phi M C^{-1} M' S (+0) A_e x(k) + \begin{bmatrix} x_0(k) \\ y_0(k) \end{bmatrix} + \\ & + \Phi M [C^{-1} M' S (+0) A_e (E - e^{F\tau}) M + E] r(k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Хотя размерность вектора  $r(k)$  равна размерности вектора  $u$ , в общем случае достаточно, чтобы вектор  $r(k)$  имел не более двух компонент, отличных от нуля. Отметим в связи с последним замечанием, что, используя соотношения (2.3), эти две компоненты можно выразить через  $x_0(k+1)$  и  $y_0(k+1)$ . Определив таким образом вектор  $r(k)$  можно, в принципе, обеспечить движение аппарата точно по заданной следовой дорожке, «переложив» решение задачи стабилизации на механизм непрерывного управления.

Таким образом, систему управления горизонтальным движением двуногого шагающего аппарата можно строить по принципу двух уровней. На первом уровне (внутренняя система управления) управление осуществляется вектором  $u$  и реализуется петлей обратной связи в соответствии с уравнениями (1.22). На следующем уровне (внешнее управление) управление осуществляется вектором  $r(k)$ , и для этого уровня шагающий аппарат как объект управления описывается уравнениями (1.28), (2.3).

**3. Пример.** Рассмотрим задачу синтеза системы управления горизонтальным движением простейшего варианта двуногого шагающего аппарата, который состоит из точечной массы  $m$ , обозначенной на фигуре цифрой 1, двух невесомых ног (на фигу-

ре показана одна из них и обозначена цифрой 2), на которые он поочередно (через интервал времени  $\tau$ ) опирается. В отличие от аппарата, рассмотренного в [1], в этом примере предположим, что каждая нога имеет на конце стопу (которая обозначена на фигуре цифрой 3) — устройство, которое позволяет прикладывать к ноге управляющий момент  $\mu$  в точке соединения ноги и стопы (точке  $O$ ).<sup>1</sup>

Найдем уравнения движения такого аппарата. Поместим начало координат в точку  $O$  и обозначим:  $\rho_m = \{x, y, z\}$  — радиус-вектор массы  $m$ ,  $\mu = \{\mu_x, \mu_y, \mu_z\}$  — вектор управляющего момента, приложенного к ноге в точке  $O$ . При отсутствии момента в точке  $O$  вектор усилия в ноге будет пропорционален  $\rho_m$ , поэтому в общем случае ( $\mu \neq 0$ ) выражение для  $P_m$  — силы, приложенной к массе  $m$ , можно записать так:

$$P_m = \varphi \rho_m - \frac{\rho_m \times \mu}{|\rho_m|^2} = \varphi \left( \rho_m - \frac{\rho_m \times \mu}{\varphi |\rho_m|^2} \right) \quad (3.1)$$

Предположим, что изменением коэффициента пропорциональности  $\varphi$  решается задача вертикальной стабилизации аппарата. Кроме того, будем считать, что масса  $m$  движется горизонтально на высоте  $h (z=h)$  и, с приемлемой точностью, далее, при рассмотрении задачи управления горизонтальным движением можно принять  $\varphi/m = g/h = \text{const}$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести. Второе слагаемое в (3.1), описывающее результат действия приложенного в стопе управляющего момента, можно интерпретировать как дополнительное усилие в ноге, обусловленное некоторым фиктивным смещением точки контакта ноги и стопы на вектор  $\Delta \rho_m = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} = -\rho_m \times \mu / \varphi |\rho_m|^2$ .

Учитывая ортогональность векторов  $\rho_m$  и  $\mu$  (у аппарата отсутствует момент инерции относительно любой оси, проходящей через массу  $m$ ), можно записать следующие соотношения, связывающие компоненты векторов  $\rho_m$ ,  $\mu$ ,  $\Delta \rho_m$ :

$$\mu_x = -\frac{\varphi}{z} [\Delta x xy - (z^2 + y^2) \Delta y], \quad \mu_y = \frac{\varphi}{z} [(z^2 + x^2) \Delta x - xy \Delta y], \quad 0 = x \mu_x + y \mu_y + z \mu_z \quad (3.2)$$

Далее, в уравнениях движения будем рассматривать  $\Delta x$  и  $\Delta y$  как управляющие воздействия, а компоненты вектора  $\mu$  — определять по (3.2). Запишем, пренебрегая силами вязкого сопротивления, уравнения горизонтального движения массы  $m$  в системе координат, начало которой совпадает с точкой соединения ноги и стопы. При  $(k-1)\tau < t < k\tau$  эти уравнения имеют вид

$$x'' = gh^{-1}(x + \Delta x), \quad y'' = gh^{-1}(y + \Delta y) \quad (3.3)$$

В соответствии с (1.2) координаты точки  $O$  ( $x_0(k)$  и  $y_0(k)$ ) в некоторой фиксированной на плоскости системе координат в моменты смены опорной ноги ( $t=k\tau$ ) изменяются на величины  $\Delta x_0(k)$  и  $\Delta y_0(k)$ . Дополним систему (3.3) соотношениями, описывающими скачки координат в моменты смены опорной ноги, обозначив  $x=x_1$ ,  $y=y_3$ ; уравнения движения рассматриваемого шагающего аппарата можно записать в виде

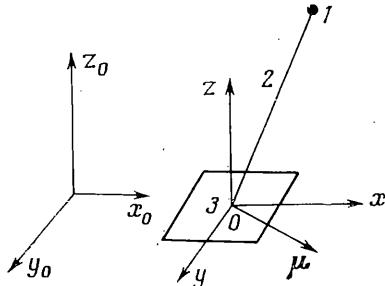
$$x_1' = x_2 - \sum_k \delta(t-k\tau) \Delta x_0(k), \quad x_2' = \frac{g}{h} (x_1 + \Delta x) \quad (3.4)$$

$$x_3' = x_4 - \sum_k \delta(t-k\tau) \Delta y_0(k), \quad x_4' = \frac{g}{h} (x_3 + \Delta y)$$

Для того чтобы формы записи этих уравнений и (1.1) совпадали, введем два новых управления

$$u_1 = \begin{cases} \Delta x & \text{при } t \neq k\tau \\ \Delta x_0(k) & \text{при } t = k\tau \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} \Delta y & \text{при } t \neq k\tau \\ \Delta y_0(k) & \text{при } t = k\tau \end{cases} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup> Задача стабилизации положения равновесия такого аппарата по одной координате (пример 2.1) рассматривалась в предыдущих публикациях (см. подстрочное примечание к стр. 54).



Переписав систему (3.4) в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - \sum_h \delta(t-k\tau) u_1, & x_2 &= \frac{g}{h} (x_1 + u_1) \\ x_3 &= x_4 - \sum_h \delta(t-k\tau) u_2, & x_4 &= \frac{g}{h} (x_3 + u_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

получим, что исходным данным рассматриваемого примера отвечают следующие матрицы, входящие в (1.1):

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & f^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ f^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f^2 \end{vmatrix}, \quad M = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad f = \sqrt{\frac{g}{h}} > 0$$

К этому добавим предположение, что матрицы критерия качества (1.3)  $B$  и  $C$  диагональны

$$B = \text{diag}\{b_x, b_y\}, \quad C = \text{diag}\{c_x, c_y\}$$

Приступим к построению уравнений регулятора. В этом примере матрица  $T$  преобразования, диагонализирующую матрицу  $F$ , может быть выбрана так:

$$T = \frac{1}{2f} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ f & 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & f & 0 & f \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

Отвечающие этому преобразованию матрицы  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_-$  имеют вид

$$\Lambda_+ = \text{diag}\{f, f\}, \quad \Lambda_- = \text{diag}\{-f, -f\}.$$

Компоненты  $N_{11}$ ,  $N_{11}^\delta$ ,  $N_{21}$ ,  $N_{21}^\delta$  матриц  $\theta_{11}$  и  $\theta_{21}$  (которые определяются разбиением (1.10) имеют диагональную структуру

$$N_{11} = N_{21} = \text{diag}\left\{\frac{f^4}{b_x}, \frac{f^4}{b_y}\right\}, \quad N_{11}^\delta = -N_{21}^\delta = \left\{\frac{f^2}{c_x}, \frac{f^2}{c_y}\right\}$$

Согласно (1.13)

$$\Pi = \frac{1}{2} \text{diag}\left\{\frac{f^3}{b_x}, \frac{f^3}{b_y}\right\}$$

Из соотношений (1.14)–(1.16) найдем периодическое решение уравнения (1.9)

$$\begin{aligned} R(t) &= \text{diag}\{\rho_x(t), \rho_y(t)\} \\ \rho_x(t) &= \left[ \frac{f^3}{2b_x} + \frac{e^{2f(t-k\tau)} - 1}{e^{2f\tau} - 1} \frac{f^2}{c_x} \right]^{-1} \quad \text{при } k\tau < t < (k+1)\tau \\ \rho_x(k\tau-0) &= \frac{c_x}{f^2} (1 - e^{-2f\tau}) \left[ 1 + \frac{fc_x}{2b_x} (1 - e^{-2f\tau}) \right]^{-1} \\ \rho_x(k\tau+0) &= \left[ \frac{f^3}{2b_x} + \frac{1}{e^{2f\tau} - 1} \frac{f^2}{c_x} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_y(t) &= \left[ \frac{f^3}{2b_y} + \frac{e^{2f(t-k\tau)} - 1}{e^{2f\tau} - 1} \frac{f^2}{c_y} \right]^{-1} \quad \text{при } k\tau < t < (k+1)\tau \\ \rho_y(k\tau-0) &= \frac{c_y}{f^2} (1 - e^{-2f\tau}) \left[ 1 + \frac{fc_y}{2b_y} (1 - e^{-2f\tau}) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\rho_y(k\tau+0) = \left[ \frac{f^3}{2b_y} + \frac{1}{e^{2f\tau} - 1} \frac{f^2}{c_y} \right]^{-1}$$

Определив периодическое решение уравнения Риккати, перейдем к построению периодического решения уравнения (1.18). Обозначив компоненты вектора  $\mathbf{r}$ ,  $r_x$  и  $r_y$  ( $\mathbf{r} = \{r_x, r_y\}$ ), согласно (1.19)

$$\eta(k\tau + 0) = \begin{vmatrix} -r_x/2 \\ r_x^f \operatorname{cth} f\tau/2 \\ -r_y/2 \\ r_y^f \operatorname{cth} f\tau/2 \end{vmatrix}$$

Следовательно, периодическое решение уравнения (1.18) при  $k\tau < t < (k+1)\tau$  имеет вид

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \exp(F(t-k\tau)) \eta(k\tau + 0) = \\ &= \begin{vmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{vmatrix} \eta(k\tau + 0), \quad \Theta = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} f(t-k\tau) & f^{-1} \operatorname{sh} f(t-k\tau) \\ f \operatorname{sh} f(t-k\tau) & \operatorname{ch} f(t-k\tau) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Согласно (1.22), учитывая (1.2), (3.5) и то, что  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x^*$ ,  $x_3 = y$ ,  $x_4 = y^*$ , получим следующий алгоритм управления. Координаты точки контакта опорной ноги и стопы (точки  $O$ ) на  $(k+1)$ -м шаге ( $k\tau < t < (k+1)\tau$ ) следует выбрать так:

$$x_0(k+1) = x_0(k) + [1 - e^{-2f\tau}] [1 + 1/2fc_x b_x^{-1} e^{-2f\tau}]^{-1} [x(k\tau - 0) + f^{-1}x^*(k\tau - 0) + (1/2 - \operatorname{cth} 1/2f\tau)r_x] + r_x \quad (3.40)$$

$$y_0(k+1) = y_0(k) + [1 - e^{-2f\tau}] [1 + 1/2fc_y b_y^{-1} e^{-2f\tau}]^{-1} [y(k\tau - 0) - f^{-1}y^*(k\tau - 0) + (1/2 - \operatorname{cth} 1/2f\tau)r_y] + r_y \quad (3.41)$$

Перемещение координат точки нулевого момента вдоль стопы в течение  $(k+1)$ -го шага определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{2f(t-k\tau)} b_x}{e^{2f\tau} - 1 fc_x} \right]^{-1} \left\{ x(t) + \frac{x^*(t)}{f} + \right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{sh} f(t-k\tau) + \operatorname{ch} f(t-k\tau)] \left( \frac{1}{2} - \operatorname{cth} \frac{f\tau}{2} \right) r_x \right\}, \quad k\tau < t < (k+1)\tau \quad (3.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{2f(t-k\tau)} b_y}{e^{2f\tau} - 1 fc_y} \right]^{-1} \left\{ y(t) + \frac{y^*(t)}{f} + \right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{sh} f(t-k\tau) + \operatorname{ch} f(t-k\tau)] \left( \frac{1}{2} - \operatorname{cth} \frac{f\tau}{2} \right) r_y \right\}, \quad k\tau < t < (k+1)\tau \quad (3.43) \end{aligned}$$

Компоненты прикладываемого к ноге управляющего момента (вектора  $\mu$ ) вычисляются по соотношениям (3.3) после определения  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$  согласно (3.12), (3.13).

Отметим, что в рассматриваемой задаче  $u_1(k\tau) = \Delta x_0(k)$ ,  $u_2(k\tau) = \Delta y_0(k)$ , поэтому согласно (2.2)  $\Phi M = E$  и, следовательно

$$\Phi = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Если аппарат маневрирует (внешний управляющий контур изменяет на каждом шаге компоненты вектора  $\mathbf{r}$ ), то входящие в (3.10)–(3.13) компоненты  $r_x$  и  $r_y$  зависят от  $k$  ( $r_x(k)$ ,  $r_y(k)$ ). В этом случае уравнения (3.10) и (3.11) соответствуют системе (2.3) и, как нетрудно видеть, устанавливают однозначную связь между  $x_0(k+1)$ ,  $y_0(k+1)$ ,  $r_x(k)$ ,  $r_y(k)$ .

Выразим матрицу  $A_\varepsilon$ , входящую в уравнение (2.1) через исходные данные приведенного примера  $A_\varepsilon = T\Gamma T^{-1}$ .

Элементы  $\gamma_{ij}$  квадратной матрицы  $\Gamma$  четвертого порядка таковы:

$$\gamma_{ii} = e^{-tf} \quad (i=1,2,3,4), \quad \gamma_{31} = -f^2 e^{-fr} \left( \frac{f^2 \tau}{b_x} - \frac{1}{c_x} \right) \rho_x(+0), \quad \gamma_{42} = -f^2 e^{-fr} \left( \frac{f^2 \tau}{b_y} - \frac{1}{c_y} \right) \rho_y(+0)$$

остальные элементы равны нулю. Величины  $\rho_x(+0)$  и  $\rho_y(+0)$  определяются последними соотношениями в (3.8) и (3.9).

Поступила 12 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ларин В. Б. Стабилизация двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
2. Букобратович М., Стокич Д. Управление динамикой неустойчивых локомоционных роботов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1975, № 5.
3. Ларин В. Б. Передвижение двуногих систем. В кн.: Теория, принципы устройства и применение роботов и манипуляторов. Тр. У Всеес. симпозиума. Изд-во Ленингр. политехн. ин-та, 1974.
4. Bittanti S., Locatelli A., Maffezzoni C. Second-variation methods in periodic optimization. J. Optimizat. Theory and Appl., 1974, vol. 14, No. 1, p. 31–49. (Рус. перев.: Техническая кибернетика, № 42. Экспресс-информ. М., ВИНИТИ, 1974).