

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1977**

УДК 531.8

**О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО:
В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ**

Э. М. БОЛЫЧЕВЦЕВ, Э. К. ЛАВРОВСКИЙ

(Москва)

Рассматривается вопрос выбора оптимальных значений параметров амортизирующей подвески транспортного аппарата. Предполагается, что взаимодействие аппарата с поверхностьюносит периодический, ударный характер. Оптимальность понимается в многокритериальном смысле, причем оптимизируемыми функционалами являются амплитуды деформации системы амортизации, перегрузки самого аппарата и наибольший размах его угловых колебаний. Естественным поэтому является подход с точки зрения построения множества Парето.

В работе рассмотрен линейный случай. Обсуждается метод построения множества Парето и получен вид этих множеств в ряде случаев.

В ряде задач управления с векторным показателем качества, в которых ставится вопрос о нахождении оптимальных управляющих параметров (или управляющих функций), эффективно используется понятие множества Парето. В данной работе с точки зрения отыскания такого множества рассмотрен вопрос о построении оптимальной системы амортизации транспортного аппарата. При движении такого аппарата, колесного или шагающего типа, человек и чувствительные приборы, находящиеся на его борту, подвержены воздействиям вынужденного или ударного характера. Конструкции амортизирующих подвесок современного колесного транспорта, предназначенные для снижения уровня этих воздействий, довольно разнообразны [1, 2]. Что же касается подвесок шагающих аппаратов, то вопрос о них в литературе пока не ставился.

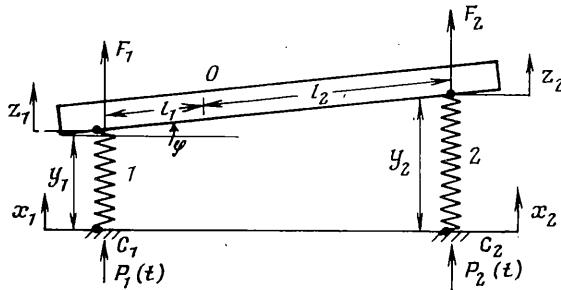
В связи со сложностью проектирования шагающих аппаратов внимание исследователей привлечено в первую очередь к вопросам алгоритики управления, устойчивости походки, к различным техническим аспектам проблемы получения и переработки информации [3–6]. Правда, требование комфортальности [3, 5], предъявляемое к походке, по существу, содержит и определенное условие амортизации его корпуса. Только закон такой амортизации имеет программный характер и осуществляется за счет изменения управляющих воздействий в звеньях ног. Можно, однако, высказать ряд соображений, указывающих на недостаточность одного лишь такого способа амортизации корпуса. Например, при импульсных управлениях [7], естественных в режиме быстрой ходьбы или бега, воздействия на корпус реального аппарата со стороны ног так или иначе будут носить ударный характер¹. Уровень вибраций на корпусе при этом (без дополнительной амортизирующей подвески) может оказаться недопустимо высоким, по крайней мере для аппаратов с человеком на борту. Интенсивные колебания корпуса могут неблагоприятно сказаться и на работе ряда бортовых приборов, в частности устройств типа «зрения» и т. д.

1. Рассмотрим следующую упрощенную модель системы амортизации транспортного аппарата (фиг. 1). Объект (корпус аппарата), рассматриваемый как абсолютно жесткий стержень, крепится к подвижным основаниям C_1 и C_2 при помощи изолирующих опор 1 и 2. Точка O — центр тяжести объекта. Через x_1 и x_2 обозначены координаты движения оснований, а y_1 и y_2 — деформации опор. Абсолютные перемещения точек крепления амортизирующих опор 1 и 2 к объекту выражаются тогда соответственно как

¹ См. также Васенин В. А., Велерштейн Р. А., Формальский А. М. Передвижение антропоморфных механизмов при импульсных воздействиях. Тезисы докл. III Всесоюзной Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Иркутск, 1977.

$z_1 = x_1 + y_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$. Законы изменения ускорений оснований, взятые с обратным знаком, обозначены через $p_1(t)$ и $p_2(t)$, т. е. $p_1(t) = -x_1''(t)$, $p_2(t) = -x_2''(t)$. Смысл l_1 , l_2 и φ ясен из фигуры.

Такая модель может быть принята для приближенного изучения колебаний кузова автомобиля на рессорах в поперечной или в продольной плоскости [1]. Ее можно рассматривать как один из возможных вариантов схемы амортизации в вертикальной плоскости корпуса двуногого шагающего аппарата с занесенными точками



Фиг. 1

подвеса ног. Воздействия на корпус со стороны ног поступают не непосредственно, а через изолирующие «прокладки» 1 и 2.

Реакции опор будем считать линейно-зависящими от их деформаций и скоростей деформаций

$$F_1 = a_1 y_1 + b_1 y_1, \quad F_2 = a_2 y_2 + b_2 y_2 \quad (1.1)$$

Коэффициенты a_i и b_i ($i=1, 2$) являются параметрами, подлежащими оптимизации.

Возмущающие воздействия со стороны оснований считаются известными периодическими функциями. Для шагающих аппаратов такая ситуация вполне типична: движение по относительно ровной поверхности с постоянной скоростью. Если рассматривать колебания автомобиля, то более общим является предположение о случайному характере движения оснований, притом стационарном, если скорость автомобиля постоянна [8]. Однако определенный интерес представляет и изучение случая периодических возмущений, например, гармонического вида или импульсных. Оно позволяет учесть наиболее неблагоприятные условия, которые могут возникнуть при движении (например, по дорогам с покрытием из бетонных плит), и оценить также влияние возмущений другого вида [1].

Качество функционирования данной изолирующей подвески охарактеризуем величиной M , большей из амплитуд деформаций опор, величинами максимального абсолютного ускорения U некоторой точки корпуса Q и наибольшего размаха угловых колебаний Φ в установившемся режиме.

2. Ограничимся рассмотрением случая

$$l_1 = l_2 = \frac{1}{2}l, \quad a_1 = a_2 = a, \quad b_1 = b_2 = b \quad (2.1)$$

Угловые колебания корпуса считаем малыми, так что $\varphi \approx (z_2 - z_1)l^{-1}$. В качестве обобщенных координат выберем величины деформаций опор y_1 и y_2 . Пусть m и I означают соответственно массу корпуса и его момент инерции, а z — абсолютное перемещение центра тяжести.

Уравнения движения имеют вид

$$mz'' + F_1 + F_2 = 0, \quad I\varphi'' + \frac{1}{2}(F_2 - F_1)l = 0 \quad (2.2)$$

Сила веса в этих уравнениях не фигурирует, так как ее действие предполагается учтенным в статической деформации опор.

Выражая z и φ в (2.2) через z_1 и z_2 и разрешая относительно последних, получим

$$z_1'' + \left(\frac{1}{m} + \frac{l^2}{4I} \right) F_1 + \left(\frac{1}{m} - \frac{l^2}{4I} \right) F_2 = 0$$

$$z_2'' + \left(\frac{1}{m} - \frac{l^2}{4I} \right) F_1 + \left(\frac{1}{m} + \frac{l^2}{4I} \right) F_2 = 0$$

Подставляя сюда $z_i = x_i + y_i$ ($i=1, 2$), выражения для F_1 и F_2 и учитывая (2.1), запишем уравнения относительных перемещений корпуса в матричном виде

$$Y'' + AY' + BY = P(t) \quad (2.3)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -x_1''(t) \\ -x_2''(t) \end{bmatrix}, \quad A = aD, \quad B = bD$$

Квадратная матрица второго порядка D имеет элементы

$$d_{11} = d_{22} = 1/m + l^2/4I, \quad d_{21} = d_{12} = 1/m - l^2/4I \quad (2.4)$$

Законы изменения ускорений оснований $p_1(t) = -x_1''(t)$, $p_2(t) = -x_2''(t)$ предположим заданными в виде периодических серий импульсных функций, смешанных одна относительно другой на половину периода приложения импульсов. Уровень всех импульсов одинаков и равен σ , а период без ограничения общности принят равным единице

$$p_1(t) = p_2\left(t - \frac{1}{2}\right) = \sigma \sum_{k=0}^{[t]} \delta(t-k) \quad (2.5)$$

Вертикальные опорные реакции при перемещении шагающего аппарата, по-видимому, будут близки по характеру к принятому идеальному закону (2.5).

В силу симметрии исследуемой модели и возмущающих воздействий (2.5) амплитуды координат y_1 и y_2 в установившемся режиме будут одинаковы, а угловые колебания симметричны относительно горизонтальной оси. Поэтому введенные ранее показатели качества могут быть записаны в виде следующих функционалов:

$$\begin{aligned} M(a, b) &= \sup_t |y_{c1}(t)|, \quad U(a, b) = \frac{1}{m} \sup_t |F_1(y_{c1}, y_{c1}'), F_2(y_{c2}, y_{c2}')| \\ \Phi(a, b) &= 2 \sup |\varphi_c(t)| \end{aligned} \quad (2.6)$$

Индекс c в этих и последующих формулах указывает на установившийся режим колебаний соответствующей переменной. В выражении для U учтено первое из равенств (2.2). Для нахождения $\varphi_c(t)$ будем использовать формулу

$$\varphi_c(t) = (z_{c2} - z_{c1})l^{-1} = [(y_{c2} - y_{c1}) + (x_{c2} - x_{c1})]l^{-1} \quad (2.7)$$

$$x_{c1} - x_{c2} = \int_0^t ds \int_0^s (p_2(\tau) - p_1(\tau)) d\tau + k_1 t + k_0$$

а постоянные k_0 и k_1 выбраны (см. ниже) из условия периодичности разности $x_{c1} - x_{c2}$ и симметрии ее поведения относительно нуля.

В формулах (2.6) подчеркнут факт зависимости исследуемых показателей от параметров a и b . Пусть в области G допустимых значений этих

параметров выполнены условия устойчивости и колебательности решений однородного уравнения¹, соответствующего (2.3). Найдем корни характеристического уравнения и выпишем явный вид этих условий. Имеем

$$\Delta(\lambda) = |E\lambda^2 + A\lambda + B| = |E\lambda^2 + (a\lambda + b)D| = 0$$

(E – единичная матрица) или

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + d_{11}(a\lambda + b) & d_{12}(a\lambda + b) \\ d_{21}(a\lambda + b) & \lambda^2 + d_{22}(a\lambda + b) \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда, принимая во внимание (2.4), получаем

$$\lambda_{1,2} = -\frac{al^2}{4I} \pm \left[\frac{a^2l^4}{16I^2} - \frac{bl^2}{2I} \right]^{1/2}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{a}{m} \pm \left[\frac{a^2}{m^2} - \frac{2b}{m} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

Как видим, упомянутые выше условия устойчивости и колебательности решений однородного уравнения, соответствующего (2.3), выполнены при $a \geq 0$ и отрицательности подкоренных выражений в (2.8). Если точки крепления амортизирующих опор к корпусу разнесены настолько, что $I < \frac{1}{4}ml^2$ (что и будем предполагать выполненным), то оба подкоренных выражения будут отрицательными, если $8bI - a^2l^2 > 0$.

Область G определим теперь неравенствами²

$$a \geq 0, \quad 8bI - a^2l^2 \geq 0, \quad U \leq U^\circ \quad (2.9)$$

Последнее из неравенств (2.9) представляет собой одно из возможных ограничений на множество допустимых значений функционалов и введено здесь также с целью ограничения размеров области G . Значение U° конкретизируется ниже при числовых расчетах.

Поставим следующую задачу оптимизации по параметрам: для векторной целевой функции $f(a, b) = \{M(a, b), U(a, b), \Phi(a, b)\}$ компоненты которой заданы в области G (2.9) как функционалы (2.6), построить оптимальное по Парето [9] множество параметров $\pi = \pi(f, G)$. Множество $\pi \in G$ точек (a°, b°) называется оптимальным по Парето, если для любой $(a^\circ, b^\circ) \in \pi$ не существует такой $(a, b) \in G$, чтобы выполнялось неравенство $f(a, b) \leq f(a^\circ, b^\circ)$. Это неравенство понимается как покомпонентное, причем хотя бы по одной из компонент оно строгое.

3. Зная корни характеристического уравнения (2.8), нетрудно построить фундаментальную матрицу решений и с ее помощью найти стационарное решение (2.3). Возможен, однако, и другой путь отыскания такого решения, быстрее приводящий к цели. Он состоит в приведении (2.3) к диагональному виду.

Положим в (2.3)

$$Y = LV = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Тогда преобразованное матричное уравнение движения рассматриваемой системы распадается на два независимых скалярных уравнения относительно компонент v_1 и v_2 вектора V :

$$v_1'' + \frac{al^2}{2I}v_1' + \frac{bl^2}{2I}v_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) \quad (3.2)$$

¹ Для простоты рассматриваемый ниже метод построения множества оптимальности поясняется лишь на примере данной области. Следует иметь в виду, однако, что полное решение задачи требует исследования и области апериодических решений, т. е. исследования всего множества $a \geq 0, b \geq 0$.

² Знак равенства для $a \geq 0$ следует рассматривать в предельном смысле, так как переходный процесс при отсутствии демпфирования длится неограниченно долго.

$$\ddot{v_2} + \frac{2a}{m} \dot{v_2} + \frac{2b}{m} v_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

Используя результаты, например, работы [10], стационарное решение (3.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_{ci} &= (2\omega_i r_i)^{-1} \sigma \{ e^{-\varepsilon_i s} \sin(\omega_i s + \alpha_i) + (-1)^i e^{-\varepsilon_i p} \sin(\omega_i p + a_i) \} \quad (i=1, 2) \\ r_i &= (e^{2\varepsilon_i} - 2e^{\varepsilon_i} \cos \omega_i + 1)^{1/2} \\ \sin \alpha_i &= r_i^{-1} \sin \omega_i e^{\varepsilon_i}, \quad \cos \alpha_i = r_i^{-1} \{ \cos \omega_i e^{\varepsilon_i} - 1 \}, \quad \varepsilon_1 = 1/4 I^{-1} a l^2, \quad \varepsilon_2 = a m^{-1} \quad (3.3) \\ \omega_1^2 &= 1/2 I^{-1} b l^2 - 1/16 I^{-2} a^2 l^2, \quad \omega_2^2 = 2 b m^{-1} - a^2 m^{-2} \\ s &= s(t) - [t] - 1, \quad p = p(t) = s(t - 1/2) = s - 1/2 - [s + 1/2] \end{aligned}$$

Квадратные скобки означают целую часть заключенной в них величины.

Компоненты y_{ci} ($i=1, 2$) стационарного решения (2.3) выражаются через v_{ci} согласно (3.1) следующим образом:

$$y_{c1} = v_{c1} + v_{c2}, \quad y_{c2} = -v_{c1} + v_{c2} \quad (3.4)$$

Запишем теперь в явном виде выражение для разности $x_{c2} - x_{c1}$. Из рассмотрения интегрального члена в правой части (2.7) следует, что функции $\Psi = x_{c2}(t) - x_{c1}(t)$ может быть сделана периодичной и симметричного вида относительно оси Ot , если положить в (2.7) $k_0 = -1/8\sigma$, $k_1 = -1/2\sigma$. График такой функции $\Psi(t)$ изображен на фиг. 2.

Аналитический вид ее следующий:

$$\Psi = -1/2\sigma |t - [t + 1/2]| - 1/8\sigma \quad (3.5)$$

Выражения для функционалов (2.6) через новые переменные v_{c1} , v_{c2} и функцию Ψ принимают в силу (4.1), (2.1), (2.7) и (3.4) вид

$$\begin{aligned} M(a, b) &= \sup_{s \in [-1, 0]} |v_{c1} + v_{c2}| \\ U(a, b) &= \frac{2}{m} \sup_{s \in [-1, 0]} |av_{c2} + bv_{c1}| \\ \Phi(a, b) &= \frac{2}{l} \sup_{s \in [-1, 0]} |-2v_{c1} + \Psi| \end{aligned} \quad (3.6)$$

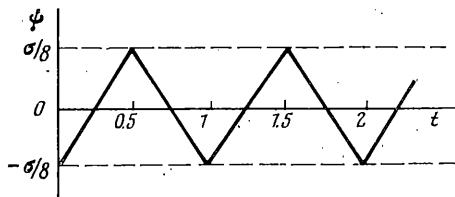
Здесь v_{ci} ($i=1, 2$) и Ψ определяются формулами (3.3) и (3.5), а v_{c2} может вычисляться по v_{c1} формально, как если бы переменная s была независимой и $p = s + \text{const}$.

4. Для построения множества Парето используем наглядные геометрические построения, даваемые линиями уровней функционалов (3.6) в области G .

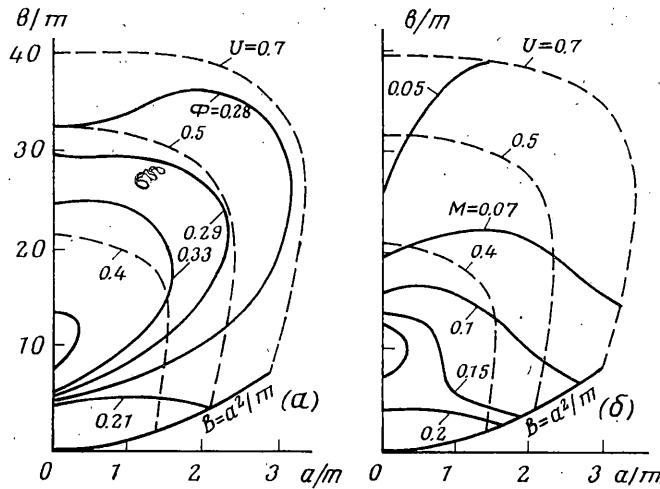
Рассмотрим случай $I = 1/8 m l^2$, $l = 1$, $U^0 = 0.7$ и $\sigma = 1$. Последнее условие в силу линейного характера вхождения σ в (3.3) и (3.5) не ограничивает общности рассмотрений¹.

На фиг. 3, а, б показана область G вместе с нанесенными на ней линиями уровней функционалов (3.6). Сплошными линиями изображены линии уровней функционалов Φ на фиг. 3, а и M на фиг. 3, б; пунктиром — линии уровней функционала U . Линия $U = 0.7$ является одним из

¹ Здесь и ниже по соображениям удобства построения графиков под U (см. формулу (3.6)) и соответственно U^0 понимаются пропорциональные величины: $1/4 U$ и $1/4 U^0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

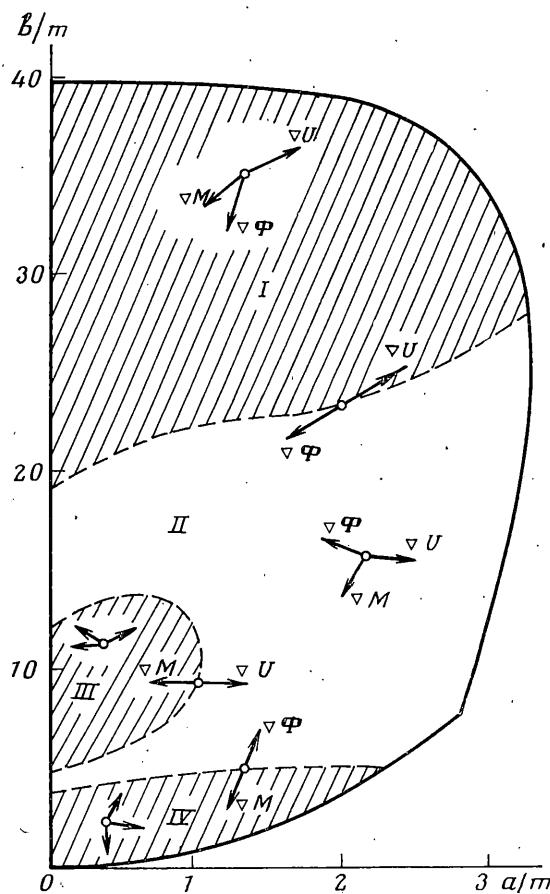
участков границы области G . Цифрами помечены значения функционалов.

Как видно из графиков, характер взаимного поведения исследуемых функционалов в области G довольно сложен. Тем не менее множество π может быть без особого труда построено при помощи предлагаемого ниже метода «отсечения». Существо этого метода состоит в последовательном отделении от области G ее неоптимальных кусков. Процесс отделения может быть разбит на два этапа.

На первом этапе из области G исключаются те подмножества точек, в которых не выполнены необходимые условия оптимальности. Это делается следующим образом. В области G строится множество точек, в которых происходит касание линий уровня хотя бы двух из исследуемых функционалов, и при этом направления векторов градиентов этих функционалов противоположны. Построенное множество состоит, вообще говоря, из линий, которые разбивают область G на ряд подобластей (I—IV, фиг. 4). Внутренние точки каждой из подобластей обладают следующим общим свойством: в них необходимые условия оптимальности одновременно либо выполнены, либо нет. Это обстоятельство позволяет просто выявить заранее неоптимальную часть области G и, тем самым, исключить ее из дальнейшего рассмотрения.

В данном случае, как видно из фиг. 4, неоптимальными являются внутренние точки областей I, III и IV. Границные их точки, являющиеся внутренними для областей G , очевидно, не исключаются из дальнейшего исследования на оптимальность.

Аналогичные построения и исключения производятся затем в отношении границы G . Каждый из ее гладких кусков разбивается на отдельные участки точками, в которых проекция хотя бы одного из векторов-градиен-



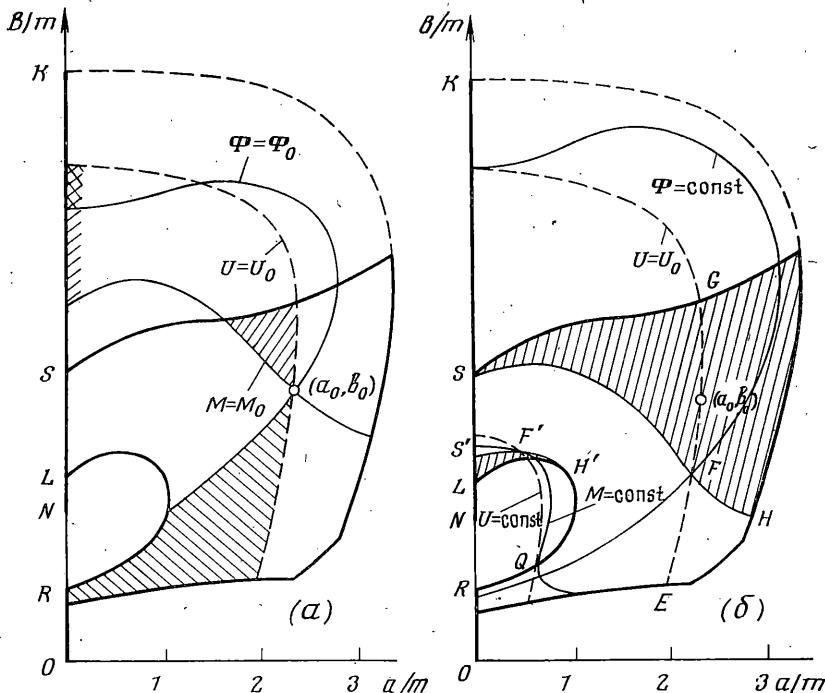
Фиг. 4

тов на касательную к границе в этой точке равна нулю (или терпит разрыв). Внутренние точки каждого из полученных гладких участков удовлетворяют или не удовлетворяют необходимым условиям оптимальности одновременно. Отбрасыванием тех участков (с учетом их концов), в точках которых не выполнены необходимые условия оптимальности, и завершается первый этап выделения π из G .

Обозначим оставшееся после указанных исключений «подозрительное» на оптимальность множество через π_H (множество точек области G , удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности по Парето). В рассматриваемом случае оно состоит из точек области π (внутренних и граничных) и отрезков KS , LN и OR оси Ob . На фиг. 5, а, б это множество выделено жирными линиями.

Заметим, что точка $N(0, \pi^2)$ является резонансной для функции v_{c1} , а значит, и функционалов M и Φ . Поэтому ее вместе с некоторой окрестностью следовало бы исключить из дальнейшего рассмотрения. Отложим это до окончания следующего этапа построения π , так как такое исключение может быть автоматически произведено на нем (что фактически и имеет место в данном случае).

Второй этап построения множества π заключается в удалении из множества π_H всех его неоптимальных подмножеств, но уже на основании



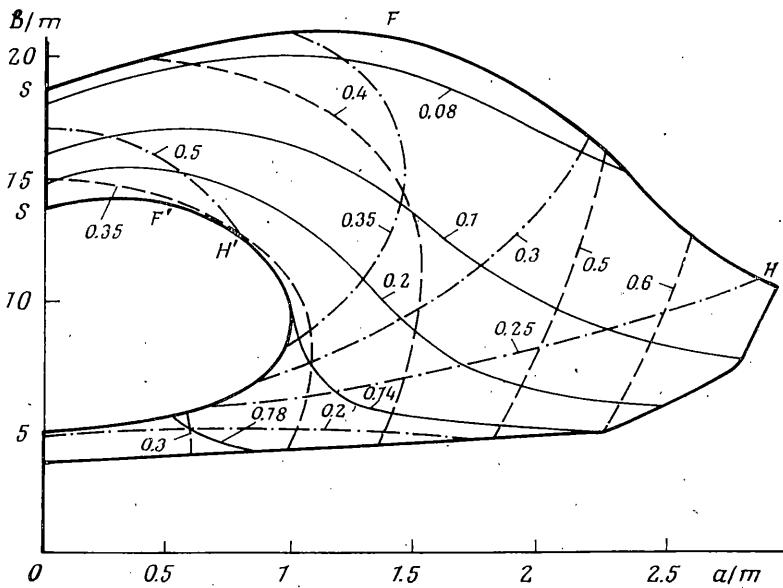
Фиг. 5

сравнения значений исследуемых функционалов на нем между собой. Рассуждения проводятся ниже применительно к данному конкретному случаю, но они, очевидно, сохраняют силу и в общем случае произвольного числа и вида функционалов и двумерной области изменения варьируемых параметров.

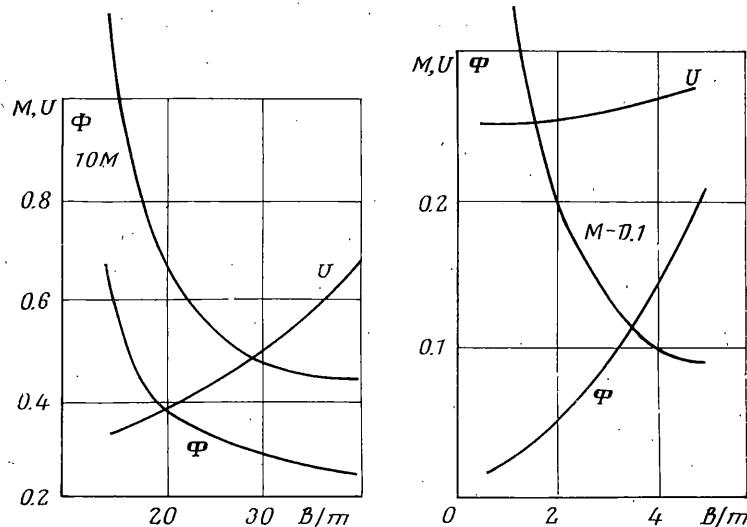
Выберем семейство линий уровня одного из функционалов в качестве «образующего» для семейства π_n . Это понимается в том смысле, что все π_n можно рассматривать как бы состоящие из кусков кривых этого семейства. Пусть это будут линии $U(a, b) = U_0$ ($0.25 \leq U_0 \leq 0.7$). (Можно показать, что число 0.25 является нижней границей значений функционала U в области G .)

Рассмотрим одну из образующих $U = U^o$, исходящую из отрезка KS оси Ob , и некоторую точку $(a_0, b_0) \in \pi_n$ на ней, не принадлежащую KS (фиг. 5, а). Обозначим $M(a_0, b_0) = M_0$ и $\Phi(a_0, b_0) = \Phi_0$. Линии уровней $M(a, b) = M_0$ и $\Phi(a, b) = \Phi_0$ совместно с линией $U(a, b) = U_0$ вырезают в π_n два подмножества Ω_M и Ω_Φ , определяемые соответственно следующими параметрами неравенств: $M \leq M_0$, $U \leq U_0$ и $\Phi \leq \Phi_0$, $U \leq U_0$. Точка (a_0, b_0) , очевидно, является оптимальной, если множества Ω_M и Ω_Φ не имеют других общих точек, кроме самой (a_0, b_0) , и неоптимальной — в противном случае. Оба множества заштрихованы на фиг. 5, а линиями разного направления. Как видим, выбранная точка (a_0, b_0) не является оптимальной, так как множества имеют общее пересечение — отрезок оси Ob , помеченный двойной штриховкой.

Принимая во внимание характер поведения линий уровня функционала M (фиг. 3, б), заключаем, что неоптимальными вместе с точкой (a_0, b_0) будут и все точки дуги GF линии $U = U_0$ (фиг. 5, б). Точка F определяется как точка пересечения образующей $U = U_0$ с той из линий уровня функционала Φ , которая исходит из одной и той же точки отрезка KS , что и сама



Фиг. 6



Фиг. 7

линия $U=U_0$. Наоборот, все остальные точки линии $U=U_0$, принадлежащие π_H , т. е. точки дуги FE , исключая точку F , и точка, лежащая на оси Ob , по тем же соображениям являются оптимальными.

Сказанное справедливо по отношению к любой образующей, исходящей из точки отрезка KS . Это дает простое правило построения линий SFH , отсекающей от π_H один из ее неоптимальных кусков (фиг. 5, б — большая из заштрихованных площадок). Еще один неоптимальный кусок удается вырезать из π_H при рассмотрении оставшейся части образующих (начинаяющихся на оси Ob ниже точки S). Это меньшая из заштрихованных площадок на фиг. 5, б вместе со своими границами и отрезком LN . Линия «отреза» $S'F'H'$ определяется как совокупность точек пересечения обра-

зующих с теми из линий уровня $M=\text{const}$, которые имеют с образующими еще по одной общей точке Q , являющейся точкой касания (фиг. 5, б). В точке H' происходит одновременно и пересечение, и касание линий уровня U и M .

Оставшаяся после исключения этого этапа область представляет собой искомое оптимальное множество Парето π . В него входят отрезки KS и OR оси Ob и область, изображенная на фиг. 6, вместе с нанесенными на нее линиями уровней функционалов M (сплошные линии), U (пунктирные линии) и Φ (штрихпунктирные линии). Эти границы области SFH и $S'F'H'$ не входят в множество π . Законы поведения функционалов в оптимальных точках оси Ob представлены отдельно в виде графиков на фиг. 7, а, б.

На основании вида множества π и значений функционалов качества на нем (фиг. 6, 7) можно сделать выводы относительно более разумного выбора числовых значений параметров a и b в тех или иных конкретных ситуациях.

Поступила 18 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ротенберг Р. В. Подвеска автомобиля. М., «Машиностроение», 1972.
2. Певзнер Я. М., Горелик А. М. Пневматические и гидропневматические подвески. М., Машигиз, 1963.
3. Охочумский Д. Е., Платонов А. К., Боровин Г. К., Карпов И. И. Моделирование на ЦВМ движения шагающего аппарата. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 3.
4. Охочумский Д. Е., Платонов А. К. Алгоритмы управления шагающим аппаратом, способным преодолевать препятствия. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 5.
5. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы I, II. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3–4.
6. Васенин В. А., Девягин Е. А., Жихарев Д. Н. и др. Макет шагающего аппарата и его система управления. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1974, № 6.
7. Васенин В. А., Девягин Е. А. Об импульсном управлении движением инерционной ноги в фазе переноса. В кн.: Биомеханика. Изд-во Рижского н.-и. ин-та травматол. и ортопед., 1975.
8. Певзнер Я. М., Тихонов А. А. Исследование статических свойств микропрофиля основных типов автомобильных дорог. Автомобильная промышленность, 1974, № 1.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании, экономике. М., «Мир», 1964.
10. Болычевцев Э. М., Жиянов Н. И., Лавровский Э. К. Оптимизация параметров колебательной системы при импульсных возмущениях. Вест. МГУ. Сер. матем., механ., 1975, № 6.