УДК 539.214; 539.374

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

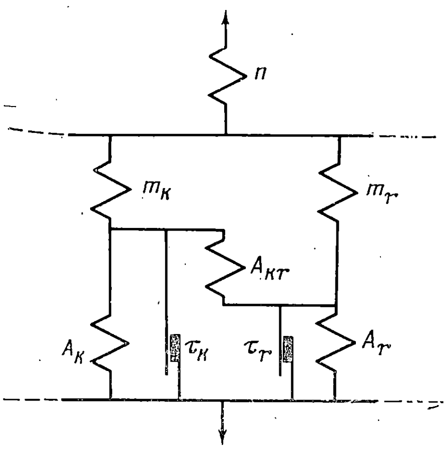
В. А. ПАЛЬМОВ

(Ленинград)

Представлена реологическая модель для полученных в [1] уравнений деформирования изотропного упругопластического материала, и дан термодинамический анализ этих уравнений.

1. Рассмотрим реологическую модель для девиаторов, представленную на фигуре. Модель состоит из двух последовательно соединенных частей: упругого элемента жесткости n и системы параллельно работающих и взаимодействующих плеч. На фигуре показаны два таких плеча и упругий элемент $A_{kr}=A_{rk}$, изображающий их взаимодействие.

Каждое плечо соответствует реологической модели Прандтля, дополненной упругим элементом A_k, определяющим линейное деформационное упрочнение. Модель, содержащая одно такое плечо, рассматривалась в [2]. Условиям $A_k=A_{kr}=0$ соответствует модель А. Ю. Ишлинского, которая рассматривалась, в частности, в [3].



Введем обозначения, наиболее близкие к [1]. Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ — значение девиатора напряжений, соответствующее усилию в элементе n, $\boldsymbol{\sigma}_k$ — в элементе m_k, $\boldsymbol{\tau}_k$ — в идеально пластическом элементе с пределом текучести τ_k. Разность между двумя последними тензорами назовем $\mathbf{s}_k$.

Имеем

$$\boldsymbol{\sigma}_k=\boldsymbol{\tau}_k+\mathbf{s}_k \tag{1.1}$$

Очевидно, что $\mathbf{s}_k$ объединяет усилия в упругом элементе A_k и в элементах взаимодействия A_{kr}, соответствующих действию всех плеч на плечо k.

Девиатор полной деформации назовем $\mathbf{e}$, девиатор деформации, соответствующий системе параллельно работающих плеч,— $\boldsymbol{\varepsilon}$, а девиатор деформации k-го пластического элемента — $\boldsymbol{\varepsilon}_k$.

Составим систему реологических уравнений. Уравнения деформирования упругих элементов n и m_k имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma}=n(\mathbf{e}-\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\sigma}_k=m_k(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_k) \tag{1.2}$$

Записывая аналогичные уравнения для упругих элементов A_k и A_{kr}, получим соотношения

$$\mathbf{s}_k=A_k\boldsymbol{\varepsilon}_k+\sum_{r=1}^{N}A_{kr}(\boldsymbol{\varepsilon}_k-\boldsymbol{\varepsilon}_r) \tag{1.3}$$

Уравнение деформирования идеально пластического элемента $\boldsymbol{\tau}_k$ таково:

$$\boldsymbol{\tau}_k=\tau_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\bullet}\Big/\sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\bullet}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\bullet}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\bullet}=0 \tag{1.4}$$

Первое уравнение должно использоваться для развивающейся пластической деформации, а второе — когда условие текучести в элементе k:

$$\boldsymbol{\tau}_k\cdot\cdot\,\boldsymbol{\tau}_k/2=\tau_k^2 \tag{1.5}$$

не удовлетворяется.

Суммируя, наконец, усилия в плечах m_k, получим последнее уравнение

$$\boldsymbol{\sigma}=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\sigma}_k \tag{1.6}$$

Покажем, что если значения всех m_k одинаковы и равны m, то из системы записанных уравнений можно получить уравнения той же структуры, что и в [1].

Для этого введем средние напряжения и пластические деформации [1]:

$$\langle\sigma_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k N^{-1}, \quad \langle\varepsilon_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k N^{-1} \tag{1.7}$$

где N — число пластических элементов модели.

Сложением правых и левых частей вторых уравнений (1.2) получаем равенство

$$\langle\sigma_k\rangle = m(\varepsilon - \langle\varepsilon_k\rangle)$$

Вычитая отсюда второе уравнение (1.2), находим

$$\langle\sigma_k\rangle - \sigma_k = m(\varepsilon_k - \langle\varepsilon_k\rangle) \tag{1.8}$$

Равенства (1.1), (1.4) и (1.8) в точности совпадают с соответствующими уравнениями из [1]. Уравнение же (1.3) отличается от принятого в [1] соотношения

$$s_k = \sum_{r=1}^{N} C_{kr}\varepsilon_r \quad (C_{kr} = C_{rk}) \tag{1.9}$$

но имеет такую же структуру.

В представленной модели ее параметры m_k, n, A_k и A_{kr} интерпретируются как некоторые жесткости и, следовательно, не могут иметь отрицательных значений.

2. Нетрудно понять, что реологической модели более сложного вида будут соответствовать реологические уравнения более общего вида. Какова их структура?

Чтобы ответить на этот вопрос, вообразим реологическую модель с конечным числом N идеально пластических элементов, произвольно соединенных некоторым числом упругих элементов. Обозначим, как и выше, ε_k и τ_k — девиатор пластической деформации и девиатор напряжений, соответствующие k-му пластическому элементу. Уравнения деформирования этого элемента имеют вид (1.4).

Понятно, что уравнения деформирования всех упругих элементов модели могут быть приведены к форме конечных соотношений между напряжениями и деформациями

$$\sigma = B_{00}\mathbf{e} + \sum_{r=1}^{N} B_{r0}\varepsilon_r, \quad -\tau_k = B_{0k}\mathbf{e} + \sum_{r=1}^{N} B_{rk}\varepsilon_r \tag{2.1}$$

где B_{rk} — матрица постоянных коэффициентов, а $\mathbf{e}$ и σ — девиаторы полной деформации и напряжения; знак минус во второй группе уравнений введен для упрощения записи последующих вычислений.

Соотношения (2.1) и (1.4) образуют искомую систему уравнений деформирования материала.

Выясним, какие ограничения должны быть наложены на модули B_{rk} из термодинамических соображений. Для этого рассмотрим изотермический процесс и вычислим работу напряжений при формоизменении

$$d'A = \sigma\cdot\cdot d\mathbf{e} \tag{2.2}$$

В соответствии с первым законом термодинамики эта работа должна допускать представление [4]:

$$d'A = dF + d'\psi \tag{2.3}$$

где dF — дифференциал плотности свободной энергии формоизменения F, а $d'\psi$ — работа диссипативных сил.

Требование второго закона термодинамики сводится к условию неотрицательности работы диссипации [4]: $d'\psi \geqslant 0$.

В рассматриваемом случае работа диссипативных сил должна быть отождествлена с работой деформирования всех пластических элементов модели

$$d'\psi = \sum_{k=1}^{N} \tau_k\cdot\cdot d\varepsilon_k \tag{2.4}$$

В силу уравнений (1.4) и условия $d\varepsilon_k = \varepsilon_k^{\boldsymbol\cdot} dt$ каждое слагаемое в (2.4) неотрицательно; следовательно, требование второго закона термодинамики выполнено.

Соотношение первого закона (2.3) дает уравнение для определения плотности свободной энергии F

$$dF=\sigma\cdot\cdot d\mathbf{e}-\sum_{k=1}^{N}\tau_k\cdot\cdot d\varepsilon_k$$

С использованием выражений σ и τ_k по (2.1) оно преобразуется к следующему виду:

$$dF=B_{00}\mathbf{e}\cdot\cdot d\mathbf{e}+\sum_{r=1}^{N}B_{r0}\varepsilon_r\cdot\cdot d\mathbf{e}+\sum_{k=1}^{N}B_{0k}\mathbf{e}\cdot\cdot d\varepsilon_k+\sum_{r,\,k=1}^{N}B_{rk}\varepsilon_r\cdot\cdot d\varepsilon_k$$

Отсюда видно, что условие существования F сводится к требованию симметрии матрицы коэффициентов $B_{rk}=B_{kr}$ $(r,\,k=0,\,1,\,\ldots,\,N)$. При выполнении этого ограничения плотность свободной энергии имеет выражение

$$F=\frac{1}{2}\left[B_{00}\mathbf{e}\cdot\cdot\mathbf{e}+2\sum_{k=1}^{N}B_{0k}\mathbf{e}\cdot\cdot\varepsilon_k+\sum_{r,\,k=1}^{N}B_{rk}\varepsilon_r\cdot\cdot\varepsilon_k\right]$$

Целесообразно потребовать, чтобы F не могла принимать отрицательные значения, ибо это будет согласовываться с физическим представлением о способности материала накапливать энергию при деформировании. Поскольку F — однородная квадратичная форма компонент тензоров деформаций $\mathbf{e}$ и ε_k, это требование приводит к условию неотрицательности всех главных миноров матрицы B_{rk} [5].

Указанные условия автоматически выполняются, если уравнения (2.1) не просто записаны, а выведены из рассмотрения некоторой реологической модели. Действительно, в этом случае F будет суммой свободных энергий всех упругих элементов модели и, значит, будет существовать и будет знакопостоянной положительной квадратичной формой. В других случаях требуется специальная проверка как условия существования свободной энергии F, так и условия ее неотрицательности.

3. Проведем термодинамический анализ общих уравнений [1]. Это, во-первых, уравнения (1.1), (1.9) и соотношение

$$\langle\sigma_k\rangle-\sigma_k=m_k(\varepsilon_k-\langle\varepsilon_k\rangle)$$

более общее чем (1.8). Эти равенства следует дополнить законом для упругой деформации

$$\sigma=N\langle\sigma_k\rangle=NC(\mathbf{e}-\langle\varepsilon_k\rangle)$$

где $\mathbf{e}$ и σ — внешние деформация и напряжение, а C — некоторый модуль.

Указанная система преобразуется к виду уравнений (2.1):

$$\sigma=CN\mathbf{e}-C\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r$$

$$-\tau_k=-C\mathbf{e}+\sum_{r=1}^{N}\left[C_{kr}+m_k\delta_{kr}+(C-m_k)N^{-1}\right]\varepsilon_r \tag{3.1}$$

Отсюда можно заключить, что при выполнении принятого в [1] ограничения $C_{kr}=C_{rk}$ условие существования плотности свободной энергии выполняется только в одном случае $m_k=\mathrm{const}$.

В частном случае $N=2$ и $m_k=0$; как видно из уравнений (3.1), матрица B имеет вид

$$B=\begin{Vmatrix}2C & -C & -C\\ -C & C_{11}+C/2 & C_{12}+C/2\\ -C & C_{21}+C/2 & C_{22}+C/2\end{Vmatrix}$$

Требование неотрицательности ее главных миноров дает следующие условия [5]:

$$C\geqslant0,\quad C_{11}+C/2\geqslant0,\quad C_{22}+C/2\geqslant0,\quad 2CC_{11}\geqslant0,\quad 2CC_{22}\geqslant0$$

$$2C(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)\geqslant0,\quad (C_{11}+C/2)(C_{22}+C/2)-(C_{12}+C/2)^2\geqslant0$$

Нетрудно показать, что они эквивалентны следующей системе неравенств:

$$C\geqslant0,\quad C_{11}\geqslant0,\quad C_{22}\geqslant0,\quad C_{11}C_{22}-C_{12}^2\geqslant0$$

Поступила 18 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Об учете микронапряжений в теории пластичности. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
2. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
3. *Пальмов В. А.* Колебания упругопластических тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.
4. *Рейнер М.* Реология. М., «Наука», 1965.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 543 : 061.3

IV ВСЕСОЮЗНАЯ НАУЧНАЯ ШКОЛА ПО МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Научный Совет по проблеме прочности и пластичности АН СССР и Куйбышевский государственный университет провели в Куйбышеве IV Всесоюзную школу по механике деформируемого твердого тела (26 июня — 5 июля 1977 г.). В ее работе приняли участие 144 ученых из 23 городов страны, в том числе 10 докторов наук, 42 кандидата наук. Было заслушано 8 пленарных заказных докладов, 32 секционных доклада и 65 секционных сообщений.

Во вступительном слове председатель Оргкомитета С. И. Мешков остановился на задачах, стоящих перед наукой, в свете решений XXV съезда КПСС.

В докладах Ю. В. Немировского, В. Е. Миренкова рассматривалось оптимальное проектирование оболочек по абсолютному минимуму веса и задачи для тел, ослабленных трещиной. Ю. И. Кадашевич предложил вариант ползучести, учитывающий микропластические деформации. Б. А. Друянов исследовал установившееся течение упрочняющейся среды. А. Д. Чернышов построил определяющие уравнения для термоупругой среды при больших деформациях с учетом конечной скорости распространения тепла. В. В. Дудукаленко, С. И. Мешков выступили с докладом «О фазовых превращениях и свойстве запоминания формы». Обзор результатов по оптимальному проектированию и созданию композитов сделал Г. И. Брызгалин. О состоянии вопроса по моделированию поведения эластомеров докладывал К. Ф. Черных.

С. Ю. Хазанов предложил динамическую модель композиционного материала. Расчету колебаний оболочек с заполнителем при различных моделях их взаимодействия было посвящено сообщение А. Е. Богдановича и Л. А. Столяровой. Моделям, расчетам петель гистерезиса амортизаторов из материала «металло-резина» посвящен доклад В. Н. Бузицкого, Г. В. Лазуткина, В. Н. Трубина, А. А. Тройникова, А. Г. Притуллина. Об анализе неизотермического пластического деформирования конструкционного материала на основе структурной модели сообщил М. А. Кузьмин. Экспериментальным исследованиям сплава Д-16-Т при простом и сложном нагружении было посвящено сообщение О. Я. Никитина. Экспериментальные результаты по релаксации напряжений в полиэтилене при одно- и двуосном деформировании доложил М. Р. Килевиц. Ряд утверждений был доказан Б. Л. Сидоровым для модели вязкоупругой пьезоэлектрической среды. Доклад Л. Т. Черного был посвящен задачам магнитоупругости и электризации упругого тела. В. В. Дудукаленко, Н. Н. Лысач сообщили об измерении многоточечных моментов композитных структур. В. И. Горелов исследовал закономерности деформирования диссипативных систем. Ю. П. Зезин остановился на материалах с незатухающей памятью при сложном напряженном состоянии. Л. А. Мержиевский использовал дислокационные представления о пластическом деформировании в модели вязкоупругой среды. М. Н. Осипов исследовал распределение напряжений методом голографической фотоупругости.

Было сообщено о решении ряда технических задач: о колебательном процессе при вибрационном прессовании порошковых материалов (К. В. Беликов, В. М. Большаков, Ю. П. Самарин), о напряжениях при вибрационном шнековании в глухую матрицу (В. А. Белкин, В. В. Гнеденко, В. В. Калашников, Б. В. Мацеевич), об управлении течением металла при метании оболочки вращения сферической детонационной волной, об импульсной технологии создания композиционных материалов (В. Н. Карпов, В. А. Котов, С. Д. Копейкин), о формообразовании деталей (Б. А. Горлач, Н. Н. Орлов), о волочении полосы через матрицу (А. И. Хромов), о снижении остаточных напряжений в горячекатанных профилях и об их температурных полях (Ю. И. Няшин, П. В. Трусов, А. А. Селянинов, Ю. В. Акулич), о пористом массиве, ослабленном горизонтальной выработкой (Ю. И. Савков).