Доказательство. Для любого вектора u_i, принимающего на Γ_w те же значения, что и $\overset{*}{u}_i$, имеет место тождество

$$E\,(u_i - \overset{*}{u}_i) = I_0\,(u_i) - I_0\,(\overset{*}{u}_i) \tag{20}$$

Тождество (20) проверяется непосредственной подстановкой. Полагая в (20) $u_i = \overset{**}{u}_i$ и используя (14) и (16), придем к неравенству (19).

Неравенство (19) доказывает асимптотическую точность построенной выше безмоментной теории анизотропных упругих оболочек. Подчеркнем, что в доказательстве использовано предположение о существовании решения задачи по безмоментной теории. Нетрудно привести примеры, показывающие, что это предположение существенно. Ограничение на выбор функций ψ_Γ^i можно ослабить. При произвольном выборе ψ_Γ^i (ψ_Γ^i не зависят от h) можно показать, что для функционала c (17) будет иметь место оценка $c \leqslant c'h^{-1}$, где c' не зависит от h. В связи с этим несколько ухудшается оценка (19), однако безмоментная теория по-прежнему остается асимптотически точной.

Поступила 25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morgenstern D.* Mathematische Begründung des Scheiben-theorie. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, Bd 3, Nr 1.
2. *Бердичевский В. Л.* О некоторых формах уравнений теории оболочек. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 5.
3. *Бердичевский В. Л.* Динамические уравнения теории анизотропных пластин. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 1.
4. *Бердичевский В. Л.* Уравнения моментной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 4.
5. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.

УДК 539.214; 539.374

ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ НАГРУЗКИ ВО ВРЕМЕНИ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ МЕТАЛЛОВ

О. Г. РЫБАКИНА

(Ленинград)

Как показывает эксперимент, одной и той же нагрузке, приложенной к упрочняющемуся материалу, соответствует различная величина пластической деформации в зависимости от закона изменения нагрузки во времени, а именно: от скорости нагружения, формы цикла нагружения, наличия выдержек во времени в процессе нагружения. В данной работе исследованы некоторые вопросы влияния указанных факторов на накопление пластической деформации.

Для описания поведения материала с учетом влияния фактора времени воспользуемся уравнением, предложенным в [1], основывающимся на представлениях о нелинейно-наследственном характере деформирования материала. Это уравнение имеет вид

$$\varphi\,(p) = \sigma + \int_0^t K\,(t - \tau)\,\sigma\,(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

где $\sigma = \varphi(p)$ — уравнение мгновенной кривой деформирования, p — пластическая деформация, $K(t-\tau)$ — ядро интегрального уравнения, определяющее наследственные свойства материала.

Для описания конкретного материала необходимо знать ядро $K(t-\tau)$ и функцию $\varphi(p)$. Обычно $K(t-\tau)$ выбирается в виде некоторой конкретной функции, параметры которой определяются из эксперимента.

Функция $\varphi(p)$ также должна быть определена из эксперимента. В [1] для $\varphi(p)$ принята кусочно-линейная аппроксимация.

Ниже приводится иной подход для случая, когда закон изменения $\sigma(t)$ определяется кусочно-линейной функцией, в частности, будет рассмотрено чередование нагружения по линейному закону с произвольной скоростью и произвольных выдержек во времени при постоянном напряжении. Нагружения такого вида часто встречаются на практике. Для полного описания процесса оказывается достаточным знания зависимости предела текучести материала от скорости нагружения в достаточно широком диапазоне изменения скоростей и диаграммы «напряжение — деформация» при какой-либо одной постоянной скорости увеличения напряжения.

Рассмотрим сначала нагружение с постоянной скоростью увеличения напряжения $\sigma=vt$. Уравнение (1) запишем в виде

$$\varphi(p)=vt+vI(t) \tag{2}$$

где введено обозначение

$$I(t)=\int_0^t K(t-\tau)\,\tau\,d\tau \tag{3}$$

Обозначим через σ_1 предел текучести материала, соответствующий данной скорости v, и через t_1 момент времени, соответствующий достижению этого предела, тогда

$$\sigma_1=vt_1 \tag{4}$$

Таким образом, при $0<t\leqslant t_1$, $p=0$; при $t>t_1$, $p>0$. Очевидно, при сопоставлении с экспериментальными данными под $p=0$ следует понимать некоторую малую величину, соответствующую допуску на пластическую деформацию при определении предела текучести.

Подставляя в (2) $p=0$, $t=t_1$ и обозначая $\varphi(p)=\sigma_0$, где σ_0 — динамический предел текучести, получим

$$\varphi(0)=\sigma_0=\sigma_1+vI(t_1) \tag{5}$$

Отсюда

$$I(t_1)=\sigma_0/v(t_1)-\sigma_1(t_1)/v(t_1) \tag{6}$$

или в силу (4)

$$I(t_1)=\sigma_0/v(t_1)-t_1, \qquad v(t_1)=\sigma_1/t_1 \tag{7}$$

причем σ_1 есть функция t_1.

Таким образом, для того чтобы определить функцию $I(t_1)$, необходимо знать постоянную величину σ_0 и функцию $v(t_1)$, т. е. зависимость скорости нагружения от времени достижения предела текучести при нагружении с постоянной скоростью увеличения напряжения. Обозначим

$$1/v(t_1)=f(t_1) \tag{8}$$

и будем считать, что указанная зависимость известна из эксперимента в широком диапазоне изменения t_1.

Тогда уравнение (2) можно записать в форме

$$\varphi(p)/\sigma_0=vf(t) \tag{9}$$

Таким образом, при известной функции $f(t)$ один опыт на нагружение с постоянной скоростью увеличения напряжения v, в процессе которого фиксируется $p(t)$, дает возможность построить функцию $\varphi(p)/\sigma_0$.

Считая $\varphi(p)/\sigma_0$ и $f(t)$ известными, вернемся к уравнению (1).

Очевидно, что при нагружении с постоянной скоростью увеличения напряжения уравнение (1) переходит в (9) и дает возможность при любом v получить зависимость $p(t)$ и, следовательно, $p(\sigma)$.

Рассмотрим далее нагружение следующего вида: увеличение напряжения с постоянной скоростью v до момента времени t_1^* и напряжения $\sigma_1^*=vt_1^*$, а затем выдержка при этом напряжении до момента времени t.

Уравнение (1) при $t\geqslant t_1^*$ будет иметь вид

$$\varphi(p)=vt_1^*+v\int_0^{t_1^*} K(t-s)\,s\,ds+vt_1^*\int_{t_1^*}^{t} K(t-s)\,ds \tag{10}$$

Уравнение (10) преобразуется к виду

$$\varphi(p)=vt_1^*+v\int_0^{t} K(t-s)\,s\,ds+v\int_{t_1^*}^{t} K(t-s)(t_1^*-s)\,ds \tag{11}$$

Преобразуя последний интеграл в (11) и используя (3), получим

$$\varphi(p)=vt_1^*+vI(t)-vI(t-t_1^*) \tag{12}$$

С учетом (7) и (8) уравнение (12) запишется в форме

$$\varphi(p)/\sigma_0=v[f(t)-f(t-t_1^*)] \quad (t\geqslant t_1^*) \tag{13}$$

По формуле (13) можно определить пластическую деформацию в любой момент t, соответствующий периоду выдержки при постоянном напряжении $\sigma_1^*=vt_1^*$.

Аналогичным образом легко показать, что при нагружении со скоростью v до напряжения $\sigma=vt_1^*$, выдержке до момента $t=t_2$ $(t_2>t_1^*)$ и последующем нагружении с той же скоростью v до момента t $(t\geqslant t_2)$ функция $\varphi(p)/\sigma_0$ запишется в виде

$$\varphi(p)/\sigma_0=v[f(t)-f(t-t_1^*)+f(t-t_2)] \tag{14}$$

Таким образом может быть описано любое нагружение, состоящее из линейного увеличения напряжения с одной и той же скоростью и выдержек при постоянном напряжении.

При нагружении в течение времени t_1^*, со скоростью v_1, а затем со скоростью v_2 в момент $t\geqslant t_1^*$ функция $\varphi(p)/\sigma_0$ будет удовлетворять следующей зависимости:

$$\varphi(p)/\sigma_0=v_1f(t)+(v_2-v_1)f(t-t_1^*) \tag{15}$$

Очевидно уравнения (9), (13) – частные случаи уравнения (15) при $v_1=v_2=v$ и $v_1=v$; $v_2=0$ соответственно.

Формула (15) обобщается на случай n участков с $v=\text{const}$ и принимает вид

$$\frac{\varphi(p)}{\sigma_0}=v_1f(t)+\sum_{i=1}^{n}(v_{i+1}-v_i)f(t-t_i^*) \quad (t\geqslant t_n^*)$$

Изучение конкретных данных для различных материалов, касающихся зависимости между пределом текучести и скоростью нагружения, показывает, что функция $f(t)$ в широком диапазоне изменения t может быть аппроксимирована зависимостью

$$f(t)=At^{1+\mu} \tag{16}$$

где $t=\sigma_1/v$ — предел текучести, соответствующий скорости v; A и μ — постоянные, $0<\mu<1$.

Рассмотрим нагружение со скоростью v_* до предела текучести, соответствующего этой скорости, и последующую выдержку в течение времени $t-t_*$. Тогда v_* и t_* удовлетворяют уравнению

$$1/v_*=At_*^{1+\mu} \tag{17}$$

Подстановка (16) в (13) дает

$$\varphi(p)/\sigma_0=Av_*[t^{1+\mu}-(t-t_*)^{1+\mu}]$$

С учетом соотношения (17) получим

$$\varphi(p)/\sigma_0=(t/t_*)^{1+\mu}-(t/t_*-1)^{1+\mu} \tag{18}$$

При нагружении со скоростью v_* до напряжения $\sigma=v_*t_0$ $(t_0\geqslant t_*)$ будем иметь

$$\varphi(p)/\sigma_0=(t/t_*)^{1+\mu}-[(t-t_0)/t_*]^{1+\mu} \tag{19}$$

где $t-t_0$ — время выдержки.

Отметим, что при нагружении до напряжения $k\sigma_1$ $(k>1)$ со скоростью $v=kv_*$ будем иметь по-прежнему $t_*=\sigma_1/v_*$. В этом случае

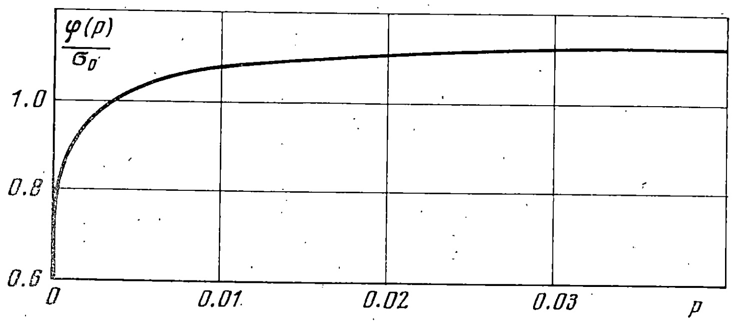
$$\varphi(p)/\sigma_0=kv_*f(\sigma_1/v_*)=k \tag{20}$$

Рассмотрим нагружения со скоростью v_0 до напряжения $\sigma^\vee$ и со скоростью v до напряжения $k\sigma^\vee$. Определим величину v, при которой в обоих случаях возникают одинаковые пластические деформации. Так как $\varphi(p)/\sigma_0$ принимает одинаковые значения, то будем иметь

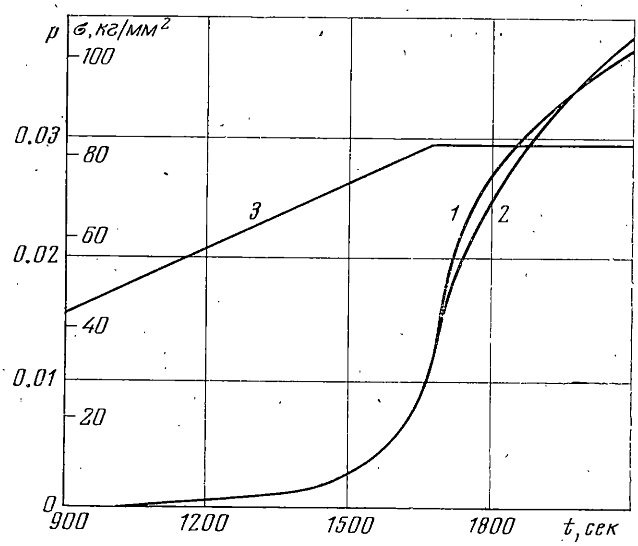
$$v_0f(\sigma^\vee/v_0)=vf(k\sigma^\vee/v)$$

откуда с учетом (16) получим

$$v=v_0k^{1+1/\mu} \tag{21}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Приведем приложение полученных результатов к конкретному материалу — сплаву A.

Параметры, входящие в зависимость (16), имеют следующие значения: $\mu=0.017$, $A=0.0125$ *мм²* / *кг·сек*$^{\mu}$.

На фиг. 1 приведена зависимость $\varphi(p)/\sigma_0$ от p, полученная из диаграммы «напряжение — деформация» образца при простом растяжении и построенная в соответствии с (9).

Применим уравнение (13) к нагружению вида: увеличение напряжения с постоянной скоростью 0.0477 *кг* / *мм²* / *сек* в течение 1680 *сек* и последующая выдержка при достигнутом напряжении 80.1 *кг* / *мм²* в течение 300 *сек*.

На фиг. 2 приведена полученная экспериментально зависимость $p(t)$ (кривая *1*) и расчетная зависимость, вычисленная по (13) (кривая *2*), кривая *3* соответствует $\sigma(t)$.

Формулы (16) — (21) позволяют сделать ряд практических выводов.

Представим (19) в виде

$$\varphi(p)/\sigma_0=Av_*[t^{1+\mu}-(t-\sigma/v_*)^{1+\mu}] \qquad (t\geqslant\sigma/v_*) \tag{22}$$

Дифференцируя выражение (22) по v_* при фиксированных t и σ, получим

$$\left[\frac{\varphi(p)}{\sigma_0}\right]'_{v_*}=A\left[t^{1+\mu}-\left(t-\frac{\sigma}{v_*}\right)^{\mu}\left(t+\mu\,\frac{\sigma}{v_*}\right)\right]$$

t/t^*	$\varphi(p)/\sigma_0$	k	v/v^*
2	1.02	1.01	1.81
3	1.03	1.02	3.26
4	1.04	1.03	5.83
5	1.04	1.04	10.4
6	1.05	1.05	18.4
7	1.05	1.06	32.3
8	1.05	1.07	56.6
9	1.05	1.08	98.6
10	1.06	1.09	170
20	1.07	1.10	295
60	1.09	1.11	506
100	1.10	1.12	863
200	1.11	1.13	1467
400	1.13	1.14	2482
600	1.13	1.15	4179
800	1.14		
1000	1.14		
2000	1.16		

Принимая во внимание, что $0<\mu<1$, будем иметь

$$[\varphi(p)/\sigma_0]_{v_*}'>0$$

т. е. $\varphi(p)/\sigma_0$ — возрастающая функция v_*.

Таким образом, чем быстрее происходит нагружение до напряжения σ и больше времени занимает выдержка (общее время t фиксировано), тем больше величина накопленной пластической деформации. Наиболее опасным является прямоугольный цикл нагружения.

В таблице приведены значения $\varphi(p)/\sigma_0$ для t/t_*, меняющегося в диапазоне 0—2000 при значении $\mu=0.017$. Из данных таблицы и формулы (18) следует, что в смысле накопления пластической деформации выдержка во времени равносильна увеличению уровня напряжения без выдержки, в частности, для рассматриваемого сплава выдержка в течение 100 t_* соответствует увеличению уровня нагрузки на 10%.

В этой же таблице приведены значения v/v_* и k, соответствующие (21). В частности, видно, что уменьшение скорости нагружения в 300 раз равносильно увеличению уровня напряжения на 10% (т. е. при этом получаются одинаковые пластические деформации).

Из изложенного следует, что при рассмотрении вопроса о влиянии скорости нагружения на накопление пластических деформаций необходимо в первую очередь изучить два фактора: зависимость предела текучести от скорости нагружения (функция $f(t)$) и зависимость $\varphi(p)/\sigma_0$, характеризующую степень упрочнения материала.

Наибольшая зависимость поведения материала от временных факторов имеет место при существенной зависимости предела текучести от скорости и малом упрочнении материала. При рассмотрении нагружений кусочно-линейного типа влияние изменения скорости нагружения и выдержек во времени может быть сведено к изменению уровня напряжений при некоторой фиксированной скорости нагружения.

Поступила 20 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В.* О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.