Необходимо отметить, что указанный метод пригоден также в случае переменных по длине E и ρ, при наличии разрывов первого рода в $F(x)$, $J(x)$, $\rho(x)$ и $E(x)$.

Применение метода степенных рядов дает возможность исследовать более широкий класс дифференциальных уравнений в частных производных (учет внутреннего трения, влияние внешней среды и т. д.) и даже нелинейные уравнения, причем применение его к последним выгодно с той точки зрения, что интегрирование степенного ряда не представляет особых трудностей.

Метод допускает создание единого вычислительного алгоритма и универсальной программы расчета частот и форм собственных колебаний сложных упругих систем на ЭВМ и может быть распространен на колебания пластин и оболочек.

Поступила 28 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Серия «Механика твердых деформируемых тел», т. 5. М., ВИНИТИ, 1973.
2. *Челомей В. Н.* Об упругих колебаниях изгиба. Тр. Киевск. авиац. ин-та, 1936, вып. 6.
3. *Челомей В. Н.* Применение рядов к исследованию устойчивости стержней. Тр. Киевск. авиац. ин-та, 1938, вып. 10.
4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.

УДК 539.3

К ОБОСНОВАНИЮ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ

(Москва)

Получено неравенство, оценивающее снизу упругую энергию оболочки постоянной вертикальной толщины по трехмерной теории через упругую энергию по безмоментной теории. Это неравенство обобщает неравенство Моргенштерна в теории пластин [1]. С его помощью для некоторого класса задач выведена энергетическая оценка погрешности решения по безмоментной теории оболочек, показывающая, что при уменьшении толщины оболочки h погрешность стремится к нулю.

Рассмотрим в декартовой системе координат $x\equiv x^\circ$, x^α (греческие индексы пробегают значения 1, 2, латинские — 0, 1, 2) оболочку — линейно-упругое анизотропное тело, ограниченное поверхностями Ω_+ и Ω_- с уравнениями $x=f(x^\alpha)+h/2$ и $x=f(x^\alpha)-$ $-h/_2$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси x. Величину h назовем вертикальной толщиной оболочки. Обычно толщиной оболочки называют длину отрезка, перпендикулярного срединной поверхности и заключенного между Ω_+ и Ω_-. Определенная так нормальная толщина h_n совпадает в первом приближении с $h\varkappa^{-1}$, $\varkappa^2=1+(\partial f/\partial x^1)^2+(\partial f/\partial x^2)^2$. Оболочка постоянной нормальной толщины имеет переменную вертикальную толщину, и, наоборот, оболочка постоянной вертикальной толщины — переменную нормальную толщину. Дальше рассмотрим оболочки постоянной вертикальной толщины. Уравнения теории оболочек постоянной вертикальной толщины, выведенные в [2], а также данное ниже обобщение на такие оболочки неравенства Моргенштерна для пластин показывают, что оболочки постоянной вертикальной толщины представляют более естественное расширение понятия о пластинах, чем оболочки постоянной нормальной толщины.

Цилиндрическая поверхность вырезает в плоскости $x=0$ ограниченную область Ω с кусочно-дифференцируемой границей Γ. Линию Γ разобьем на две части Γ_w и $\Gamma_p(\Gamma=\Gamma_w+\Gamma_p)$. На частях границы тела, проектирующихся на Γ_w и Γ_p, зададим соответственно перемещения w_Γ^i и поверхностные силы p_Γ^i. Поверхности Ω_+ и Ω_- будем считать свободными от нагрузок. Требуется при малых h заменить решение этой трехмерной задачи приближенно решением некоторой двумерной задачи и оценить погрешность приближенного решения.

Рассмотрим функционал

$$I(w^i)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{f-h/2}^{f+h/2} U\,dx^1dx^2\,dx-\int\limits_{\Gamma_p}\int\limits_{f-h/2}^{f+h/2} p_\Gamma^i w_i\,ds\,dx,\qquad 2U=A^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl},\qquad \varepsilon_{ij}=\partial_{(i}w_{j)}\tag{1}$$

$$\partial_i\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Здесь U — упругая энергия единицы объема, w_i — компоненты вектора перемещений, круглыми скобками в индексах отмечается операция симметрирования. Будем считать, что компоненты тензора упругих модулей не зависят от x, хотя могут вообще меняться в направлениях осей x^α.

Истинные перемещения доставляют минимум функционалу (1) среди всех перемещений, удовлетворяющих на Γ_w условию

$$w^i=w_\Gamma^i\tag{2}$$

Примем дополнительно, что заданные на краю оболочки функции w_Γ^i и p_Γ^i имеют вид

$$w_\Gamma^i=u_\Gamma^i(s)+\psi_\Gamma^i(s)(x-f);\qquad p_\Gamma^i=N^i(s)\tag{3}$$

где u_Γ^i, N^i — заданные вообще произвольно функции длины дуги s, функции ψ_Γ^i будут выбраны позже.

Преобразуем выражение для упругой энергии [3, 4]. Наряду с исходной системой координат рассмотрим в области, занятой телом, криволинейную систему координат ξ, ξ^α:

$$\xi=x-f(x^\alpha),\quad \xi^\alpha=x^\alpha,\quad \xi^\alpha\in\Omega,\quad -h/2\leqslant\xi\leqslant h/2$$

Введем проекции тензора деформаций на касательную плоскость и нормаль к срединной поверхности

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}&=\varepsilon_{ij}x_\alpha^i x_\beta^j=x_{(\alpha}^i w_{i,\beta)}\\ \varepsilon_\alpha^{\wedge}&=\varepsilon_{ij}x_\alpha^i n^j={}^1/_2\,(\varkappa x_\alpha^i\partial w_i/\partial\xi+x_\alpha^i n^\sigma w_{i,\sigma}+n^i w_{i,\alpha})\\ \varepsilon^{\wedge}&=\varepsilon_{ij}n^i n^j=\varkappa n^i\partial w_i/\partial\xi+n^i n^\sigma w_{i,\sigma}\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь $x_\alpha^i\equiv\partial x^i/\partial\xi^\alpha$, n^i — компоненты вектора единичной нормали к срединной поверхности $x=f(x^\alpha)$; запятой перед греческими индексами обозначается дифференцирование по ξ^α при постоянном ξ.

Компоненты тензора деформаций в исходной системе координат связаны с величинами (4) соотношением

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}\xi_i^\alpha\xi_j^\beta+\varepsilon_\alpha^{\wedge}\xi_i^\alpha n_j+\varepsilon_\alpha^{\wedge}\xi_j^\alpha n_i+\varepsilon^{\wedge}n_in_j,\qquad \xi_i^\alpha=a^{\alpha\beta}x_{i\beta},\qquad a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}=\delta_\gamma^\alpha$$
$$a_{\beta\gamma}=\delta_{\beta\gamma}+f_{,\beta}f_{,\gamma}\tag{5}$$

Подстановка (5) в выражение для упругой энергии приводит к равенству

$$2U=E^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}\varepsilon_{\gamma\delta}^{\wedge}+E\varepsilon^{\wedge}\varepsilon^{\wedge}+G^{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha^{\wedge}\varepsilon_\beta^{\wedge}+2E^\alpha\varepsilon_\alpha^{\wedge}\varepsilon^{\wedge}+2E^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}\varepsilon^{\wedge}+2E^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_\alpha^{\wedge}\varepsilon_{\beta\gamma}^{\wedge}$$
$$E^{\alpha\beta\gamma\delta}=A^{ijkl}\xi_i^\alpha\xi_j^\beta\xi_k^\gamma\xi_l^\delta,\qquad E=A^{ijkl}n_in_jn_kn_l,\qquad G^{\alpha\beta}=4A^{ijkl}\xi_i^\alpha n_j\xi_k^\beta n_l$$
$$E^{\alpha\beta}=A^{ijkl}\xi_i^\alpha\xi_j^\beta n_kn_l,\qquad E^\alpha=2A^{ijkl}\xi_i^\alpha n_jn_kn_l,\qquad E^{\alpha\beta\gamma}=2A^{ijkl}\xi_i^\alpha n_j\xi_k^\beta\xi_l^\gamma$$

Выделяя в упругой энергии продольную и поперечную составляющие, окончательно получим

$$U=U_\parallel+U_\perp,\qquad 2U_\parallel=E_\parallel^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}\varepsilon_{\gamma\delta}^{\wedge}\tag{6}$$
$$2U_\perp=E(\varepsilon^{\wedge}+E^{-1}E^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{\wedge}+E^{-1}E^\alpha\varepsilon_\alpha^{\wedge})^2+(G^{\alpha\beta}-E^{-1}E^\alpha E^\beta)(\varepsilon_\alpha^{\wedge}+H_{\alpha\gamma}E'^{\gamma\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}^{\wedge})\ (\alpha\to\beta)$$
$$E_\parallel^{\alpha\beta\gamma\delta}=E^{\alpha\beta\gamma\delta}-E^{-1}E^{\alpha\beta}E^{\gamma\delta}-H_{\mu\nu}E'^{\mu\alpha\beta}E'^{\nu\gamma\delta},\qquad H_{\alpha\beta}(G^{\beta\gamma}-E^{-1}E^\beta E^\gamma)=\delta_\alpha^\gamma$$
$$E'^{\alpha\beta\gamma}=E^{\alpha\beta\gamma}-E^{-1}E^\alpha E^{\beta\gamma}$$

Символом $\alpha\to\beta$ отмечается выражение, совпадающее с выражением в предыдущей скобке после замены индекса α на индекс β.

Замечание. Обычно рассматривают оболочки [5], упругие свойства которых инвариантны при отражениях относительно плоскости, параллельной срединной. Для таких оболочек

$$E^{\alpha}=0,\quad E^{\alpha\beta\gamma}=E'^{\alpha\beta\gamma}=0 \tag{7}$$

Равенству (7) можно удовлетворить либо в случае изотропных оболочек, либо в случае анизотропных оболочек, упругие модули которых A^{ijkl} зависят от x^{α}. Если материал однороден и анизотропен, то равенство (7) не выполняется. Гипотезы Кирхгофа при этом не применимы [3].

Утверждение 1. Для произвольного дифференцируемого поля перемещения имеет место неравенство

$$\int_{\Omega}\Phi\,dx^1dx^2\leqslant\int_{\Omega}\int_{-h/2}^{h/2}U\,dx^1dx^2d\xi,\quad \Phi=\frac{1}{2}hE_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta},\quad A_{\alpha\beta}=x^i_{(\alpha}u_{i,\beta)}, \tag{8}$$

$$u^i=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}w^i d\xi$$

Доказательство. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$\int_{-h/2}^{h/2}E_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\hat{\varepsilon}_{\gamma\beta}d\xi \tag{9}$$

по всем функциям $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, удовлетворяющим ограничениям ($A_{\alpha\beta}$ — некоторые заданные функции ξ^{α})

$$\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}d\xi=A_{\alpha\beta}$$

Выписывая уравнения Эйлера соответствующей вариационной задачи, убеждаемся, что значения $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, минимизирующие интеграл (9), не зависят от ξ. Поэтому минимальное значение интеграла (9) равно $hE_{\|}^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta}$.

Из определения (4) следует связь между $A_{\alpha\beta}$ и средними значениями по толщине компонент вектора перемещений u_i:

$$A_{\alpha\beta}=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}x^i_{(\alpha}w_{i,\beta)}d\xi=x^i_{(\alpha}\left(\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}w_i d\xi\right)_{,\beta)}=x^i_{(\alpha}u_{i,\beta)}$$

Уменьшая упругую энергию за счет отбрасывания поперечной составляющей $U_{\perp}$ и учитывая полученные выше соотношения, придем к (8), (9).

Замечание. Неравенство (8) справедливо при любом значении h. Оно имеет место и для оболочек ($h\ll l$, l — диаметр области Ω), и для прямых стержней с параллельными, но не обязательно плоскими торцами ($h\gg l$). При $f(x^{\alpha})=0$ оно переходит в неравенство Моргенштерна.

Под уравнениями безмоментной теории оболочек будем понимать уравнения Эйлера функционала

$$I_0(u^i)=E(u^i)-\int_{\Gamma_p}N_iu^ids,\quad E(u^i)=\int_{\Omega}\Phi\,dx^1dx^2 \tag{10}$$

Предположим, что решение задачи о минимуме функционала (10) по всем функциям u^i, удовлетворяющим на Γ_w условиям

$$u^i=u^i_{\Gamma}\quad\text{на}\quad\Gamma_w \tag{11}$$

существует и единственно.

Замечание. В задаче о минимуме функционала (10) не все три краевых условия (11) существенны. Например, записывая $A_{\alpha\beta}$ в форме $A_{\alpha\beta}=\partial_{(\alpha}u_{\beta)}-u\partial_\alpha\partial_\beta f$, убеждаемся, что подынтегральное количество не содержит производных от проекции перемещений u на вертикальную ось x, и функционал (10) «не чувствует» конечных изменений u в малой области, в частности, в малой окрестности участка границы Γ_w. Поэтому отбрасывание или добавление краевого условия для u не изменит решения.

Утверждение 2. Минимальное значение I_0^* функционала (10) не превосходит минимального значения I^* функционала (1)

$$I_0^* \leqslant I^* \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим через w_i^* минимизирующий элемент функционала (1), через u_i^* — минимизирующий элемент функционала (10). Функции

$$u_i^{**} = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} w_i^* d\xi$$

удовлетворяют на Γ_w условиям (11) и являются, следовательно, допустимыми функциями в вариационной задаче (10), (11). Поэтому

$$I_0(u_i^*) \leqslant I_0(u_i^{**}) \tag{13}$$

С другой стороны, в силу (1), (3), (8) и (10)

$$I_0(u_i^{**}) \leqslant I^* \tag{14}$$

Из неравенств (14) и (13) вытекает (12).

Зададим ψ_Γ^i в краевом условии для перемещений равными значениями на Γ_w функций ψ^{*i}

$$\begin{gathered} -\varkappa\psi^{*i} = n^k\xi_i^\sigma u_{k,\sigma}^* + n^\sigma u_{i,\sigma}^* + (E^{-1}E'^{\alpha\beta}n_i + H_{\mu\nu}E'^{\mu\alpha\beta}\xi_i^\nu)x_\alpha^k u_{k,\beta}^* \\ E'^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta} - E^\gamma H_{\gamma\mu}E'^{\mu\alpha\beta} \end{gathered} \tag{15}$$

Утверждение 3. Имеет место неравенство

$$I^* \leqslant I_0^* + ch^3 \tag{16}$$

$$\begin{gathered} c = \frac{1}{24}\int\limits_\Omega [E_\parallel^{\alpha\beta\gamma\delta}x_\alpha^i\psi_{i,\beta}^* x_\gamma^j\psi_{j,\delta}^* + E(n^i n^\sigma\psi_{i,\sigma}^* + E^{-1}E^{\alpha\beta}x_\alpha^i\psi_{i,\beta}^* + \\ + \frac{1}{2}E^{-1}E^\alpha(x_\alpha^i n^\sigma\psi_{i,\sigma}^* + n^i\psi_{i,\alpha}^*))^2 + (G^{\alpha\beta} - E^{-1}E^\alpha E^\beta)(x_\alpha^i n^\sigma\psi_{i,\sigma}^* + n^i\psi_{i,\alpha}^* + \\ + 2H_{\alpha\gamma}E'^{\gamma\mu\nu}x_\mu^i\psi_{i,\nu}^*)(\alpha\to\beta)]\,dx^1\,dx^2 \end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство. Функции $w_i = u_i^* + \psi_i^*\xi$, где ψ_i^* определены по формулам (15), являются допустимыми в вариационной задаче (1), (2), поэтому их подстановка в (1) дает оценку I^* сверху. Вычисление соответствующего значения функционала I приводит к (16), (17).

Утверждение 4. Пусть N_i и u_Γ^i не зависят от h. Тогда $h^{-1}I_0^*$ и функционал c (17) не зависят от h и

$$|I^* - I_0^*| \leqslant ch^3 \tag{18}$$

Доказательство. Из (10), (11) видно, что u_i^* не зависит от h. Поэтому от h не зависят $h^{-1}I_0^*$ и функционал c (17). Из (12) и (16) следует (18).

Утверждение 5. Имеет место неравенство

$$E(u_i^* - u_i^{**}) \leqslant ch^3 \tag{19}$$

Доказательство. Для любого вектора u_i, принимающего на Γ_w те же значения, что и $\overset{*}{u}_i$, имеет место тождество

$$E(u_i - \overset{*}{u}_i) = I_0(u_i) - I_0(\overset{*}{u}_i) \tag{20}$$

Тождество (20) проверяется непосредственной подстановкой. Полагая в (20) $u_i = \overset{**}{u}_i$ и используя (14) и (16), придем к неравенству (19).

Неравенство (19) доказывает асимптотическую точность построенной выше безмоментной теории анизотропных упругих оболочек. Подчеркнем, что в доказательстве использовано предположение о существовании решения задачи по безмоментной теории. Нетрудно привести примеры, показывающие, что это предположение существенно. Ограничение на выбор функций ψ_Γ^i можно ослабить. При произвольном выборе ψ_Γ^i (ψ_Γ^i не зависят от h) можно показать, что для функционала c (17) будет иметь место оценка $c \leqslant c'h^{-1}$, где c' не зависит от h. В связи с этим несколько ухудшается оценка (19), однако безмоментная теория по-прежнему остается асимптотически точной.

Поступила 25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morgenstern D.* Mathematische Begründung des Scheiben-theorie. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, Bd 3, Nr 1.
2. *Бердичевский В. Л.* О некоторых формах уравнений теории оболочек. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 5.
3. *Бердичевский В. Л.* Динамические уравнения теории анизотропных пластин. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 1.
4. *Бердичевский В. Л.* Уравнения моментной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 4.
5. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.

УДК 539.214; 539.374

ВЛИЯНИЕ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ НАГРУЗКИ ВО ВРЕМЕНИ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ МЕТАЛЛОВ

О. Г. РЫБАКИНА

(Ленинград)

Как показывает эксперимент, одной и той же нагрузке, приложенной к упрочняющемуся материалу, соответствует различная величина пластической деформации в зависимости от закона изменения нагрузки во времени, а именно: от скорости нагружения, формы цикла нагружения, наличия выдержек во времени в процессе нагружения. В данной работе исследованы некоторые вопросы влияния указанных факторов на накопление пластической деформации.

Для описания поведения материала с учетом влияния фактора времени воспользуемся уравнением, предложенным в [1], основывающимся на представлениях о нелинейно-наследственном характере деформирования материала. Это уравнение имеет вид

$$\varphi(p) = \sigma + \int_0^t K(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau \tag{1}$$

где $\sigma = \varphi(p)$ — уравнение мгновенной кривой деформирования, p — пластическая деформация, $K(t-\tau)$ — ядро интегрального уравнения, определяющее наследственные свойства материала.

Для описания конкретного материала необходимо знать ядро $K(t-\tau)$ и функцию $\varphi(p)$. Обычно $K(t-\tau)$ выбирается в виде некоторой конкретной функции, параметры которой определяются из эксперимента.

Функция $\varphi(p)$ также должна быть определена из эксперимента. В [1] для $\varphi(p)$ принята кусочно-линейная аппроксимация.