УДК 624.07:534.1

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

С. В. ЧЕЛОМЕЙ

*(Москва)*

Предлагается приближенный метод определения частот собственных колебаний прямых стержней переменного поперечного сечения, основанный на использовании степенных рядов при представлении формы колебаний стержня по его продольной координате. Даны примеры применения этого метода при различных условиях закрепления стержня и проведено сравнение метода степенных рядов по точности и времени счета с методом Бубнова и методом конечных разностей. Показано, что метод степенных рядов по сравнению с указанными методами имеет ряд преимуществ. В частном случае стержня постоянного сечения метод степенных рядов дает точное решение.

Обращается внимание на то, что изложенный метод степенных рядов удобен для расчетов с использованием ЭВМ и допускает создание единого вычислительного алгоритма.

Как известно, поперечные колебания прямых стержней переменного поперечного сечения описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями. Точное решение этого уравнения может быть получено только в некоторых частных случаях. В большинстве же случаев интегрирование уравнения поперечных колебаний выполняется при помощи различных приближенных методов, таких, как метод Бубнова, метод конечных разностей и др. Использование этих методов приводит к довольно трудоемким вычислениям, требующим больших затрат времени, или к необходимости заранее задавать форму колебаний стержня, что в конечном счете сказывается на точности результата.

Здесь предлагается метод определения частот собственных колебаний, основанный на использовании степенных рядов и позволяющий до некоторой степени устранить перечисленные выше недостатки.

Метод степенных рядов ведет свое начало от работ Коши и Пуассона. Этот метод является основным математическим методом построения различных приближенных моделей динамических задач теории стержней, пластин и оболочек. При этом разложение в степенные ряды ведется по поперечной координате. Подробное обсуждение этого вопроса и обширная литература представлены в [1].

Предлагаемый метод основан на разложении решения в степенной ряд по продольной координате, что позволяет свести интегрирование исходных дифференциальных уравнений колебаний к дифференцированию известных функций.

Впервые такие степенные ряды были применены в [2, 3] для решения задачи устойчивости сжатого стержня.

Метод степенных рядов пригоден для широкого класса упругих систем и значительно облегчает вычислительную работу. Он легко допускает применение ЭВМ, причем по сравнению с известными методами требует меньшего времени счета.

Рассмотрим осесимметричный стержень длины $l$ с переменным по длине сечением. Граничные условия на концах стержня предполагаются известными. Дифференциальное уравнение, описывающее поперечные колебания такого стержня, имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]+\rho F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

Здесь $u(x,\ t)$ – поперечное смещение стержня, $x$ – координата вдоль стержня, $t$ – время, $E$ и $\rho$ – соответственно модуль упругости и плотность материала стержня, $J(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня, $F(x)$ – площадь поперечного сечения стержня.

Предположим, что $J(x)$ и $F(x)$ – непрерывные дифференцируемые функции. Отметим, что это условие может быть расширено на случай разрывов первого ряда. В этом случае в точке разрыва необходимо использовать определенные граничные условия. Тогда, представляя решение в виде

$$u(x,\ t)=y(x)\sin(pt+\alpha) \qquad (2)$$

и проводя в уравнении (1) разделение переменных, получим для функции $y(x)$, характеризующей форму колебаний, следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]-\rho F(x)p^2y=0 \tag{3}$$

где $p$ — искомая частота собственных колебаний.

Представим форму колебаний стержня $y(x)$ в виде разложения в степенной ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}y^{(n)}(0) \tag{4}$$

Здесь и далее верхний индекс в скобках обозначает порядок производной функции $y(x)$. Используя уравнение (3) и дифференцируя его последовательно $n$ раз, находим выражение для всех производных $y^n(x)$ в точке $x=0$, а именно ($n=4$, 5, 6,...)

$$y^{(4)}(0)=p^2\frac{\rho F_0}{EJ_0}y(0)-\frac{J_0^{(2)}}{J_0}y^{(2)}(0)-2\frac{J_0^{(1)}}{J_0}y^{(3)}(0)$$

$$y^{(5)}(0)=p^2\frac{\rho F_0^{(1)}}{EJ_0}y(0)+p^2\frac{\rho F_0}{EJ_0}y^{(1)}(0)-\frac{J_0^{(3)}}{J_0}y^{(2)}(0)-3\frac{J_0^{(2)}}{J_0}y^{(3)}(0)-3\frac{J_0^{(1)}}{J_0}y^{(4)}(0) \tag{5}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Здесь $F$ (0) и $J$ (0) и их производные обозначены через $F_0$ и $J_0$, $F_0^{(1)}$, $J_0^{(1)}$ и т. д.

Очевидно, что в системе (5) каждая производная $y^{(n)}(0)$ определяется через производные более низкого порядка. Заметим, что любая $y^{(n)}(0)$ $(n\geqslant4)$ может быть выражена через четыре неизвестные $y^n(0)$ ($n=0$, 1, 2, 3), т. е. через граничные условия на левом конце стержня.

Используя систему (5), решение для $y(x)$, данное уравнением (4), можно записать с любой степенью точности, зависящей от числа учитываемых членов ряда Тейлора в виде

$$y(x)=L_1(x)y(0)+L_2(x)y^{(1)}(0)+L_3(x)y^{(2)}(0)+L_4(x)y^{(3)}(0) \tag{6}$$

где функции $L_i(x)$ ($i=1$, 2, 3, 4) зависят от величин $\rho$, $E$, $F$ (0), $J$ (0) и их производных и включают в себя искомую частоту $p$. Вид этих функций с точностью, например, до $x^5/5!$ включительно, следующий ($n=5$):

$$L_1(x)=1+p^2\frac{\rho F_0}{EJ_0}\frac{x^4}{4!}+\left[p^2\frac{\rho F_0^{(1)}}{EJ_0}-3p^2\frac{\rho F_0J_0^{(1)}}{J_0^2}\right]\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$L_2(x)=x+p^2\frac{\rho F_0}{EJ_0}\frac{x^5}{5!}+\ldots \tag{7}$$

$$L_3(x)=\frac{x^2}{2!}-\frac{J_0^{(2)}}{J_0}\frac{x^4}{4!}-\left[\frac{J_0^{(3)2}}{J_0}-3\frac{J_0^{(1)}J_0^{(2)}}{J_0^2}\right]\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$L_4(x)=\frac{x^3}{3!}-2\frac{J_0^{(1)}}{J_0}\frac{x^4}{4!}-\left[3\frac{J_0^{(2)}}{J_0}-6\frac{J_0^{(1)2}}{J_0^2}\right]\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

Используя решение для $y(x)$ в виде (6), уравнения (7) и граничные условия в точке $x=l$, получим систему двух однородных алгебраических уравнений. Из равенства нулю определителя этой системы получим характеристическое уравнение, позволяющее с любой степенью точности, зависящей от числа $n$, определить весь спектр собственных частот поперечных колебаний стержня $p_1$, $p_2$, $p_3$, ... .

Например, если концы стержня шарнирно закреплены, то $y(0)=y^{(2)}(0)=0$, а характеристическое уравнение получается из следующей системы: $y(l)=0$, $y^{(2)}(l)=0$.

Если один конец стержня ($x=0$) жестко закреплен, а второй свободен, то $y(0)=y^{(1)}(0)=0$ и частотное уравнение получается из системы $y^{(2)}(l)=0$, $y^{(3)}(l)=0$.

Аналогично можно рассмотреть и другие возможные случаи закрепления стержня.

Таким образом, задача определения спектра частот собственных поперечных колебаний прямого стержня с переменным по длине поперечным сечением может быть решена для произвольных краевых условий.

Аналогично можно провести расчет частот продольных и крутильных собственных колебаний стержней, причем в этих случаях сразу получается характеристическое уравнение при использовании граничного условия на втором конце стержня.

Быстрая сходимость изложенного выше метода и малые затраты времени при использовании ЭВМ по сравнению с методом конечных разностей может быть показана на примере задачи о поперечных колебаниях стержня, у которого $J(x)$ и $F(x)$ меняются по закону $J(x)=F(x)=1-x/l$, а граничные условия имеют вид

$$y(0)=y^{(1)}(0)=0, \qquad y^{(2)}(l)=y^{(3)}(l)=0$$

При помощи метода степенных рядов основная частота поперечных колебаний такого стержня при использовании двенадцати членов ряда Тейлора ($n=11$) получалась равной $(7.15/l^2)\sqrt{E/\rho}$, что отличается от точного значения [4] на 0.13%. Время счета на ЭВМ составило 20 *сек*. Поскольку размер определителя постоянен ($2\times2$) для всех задач такого рода, то практически можно решать его, не прибегая к ЭВМ.

При помощи метода конечных разностей при использовании аппроксимации производных второго порядка точности получено значение основной частоты $(7.34/l^2)\sqrt{E/\rho}$ с ошибкой 2.51%. При этом стержень разбивался на 50 участков, а затраты времени ЭВМ составили 122 *сек*, что в шесть раз больше, чем в методе степенных рядов. Отметим, что без применения ЭВМ решение такой задачи методом конечных разностей практически невозможно.

По сравнению с методом Бубнова существенное преимущество метода степенных рядов заключается в том, что, во-первых, форма колебаний получается автоматически, и, во-вторых, операция интегрирования полностью заменена операцией дифференцирования, что дает существенное облегчение при вычислениях сложных зависимостей для функций $J(x)$ и $F(x)$. Однако если вид этих функций допускает интегрирование и форма колебаний выбрана достаточно точно, то метод Бубнова по затратам времени счета не уступает методу степенных рядов.

Ниже приведены данные ($\delta$ – относительная ошибка в процентах), иллюстрирующие сходимость решения по методу степенных рядов для основной частоты поперечных колебаний консольно-закрепленного клина длины $l$ единичной ширины, у которого

$$F(x)=-[2b(x-l)]/l, \qquad J(x)=-[2b^3(x-l)^3]/3l^3$$

| $n$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p\frac{b}{l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}$ | 16.73 | 11.42 | 9.41 | 8.34 | 7.69 | 7.21 | 6.97 | 6.71 | 4.84 | 4.9 | 5.04 | 5.16 |
| $\delta$, % | 214.76 | 114.86 | 77.04 | 56.91 | 44.68 | 35.65 | 31.13 | 26.24 | 8.93 | 7.80 | 5.17 | 2,91 |

Точное решение [4] для основной частоты поперечных колебаний консольно-закрепленного клина получено с применением функций Бесселя и равно $p=(5.315/l^2)\cdot\sqrt{E/(3\rho)}$.

Даже при $n=17$ вычисление частоты методом степенных рядов не представляло особых трудностей и выполнялось без обращения к ЭВМ.

Следует отметить, что в случае стержня с постоянным поперечным сечением метод степенных рядов дает точное решение задачи, а именно

$$y(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} z+\cos z)\,y(0)+\frac{1}{2k^{1/4}}(\operatorname{sh} z+\sin z)\,y^{(1)}(0)+$$
$$+\frac{1}{2k^{1/2}}(\operatorname{ch} z-\cos z)\,y^{(2)}(0)+\frac{1}{2k^{3/4}}(\operatorname{sh} z-\sin z)\,y^{(3)}(0)$$
$$z=k^{1/4}x, \qquad k=p^2\rho F/(EJ)$$

Необходимо отметить, что указанный метод пригоден также в случае переменных по длине $E$ и $\rho$, при наличии разрывов первого рода в $F(x)$, $J(x)$, $\rho(x)$ и $E(x)$.

Применение метода степенных рядов дает возможность исследовать более широкий класс дифференциальных уравнений в частных производных (учет внутреннего трения, влияние внешней среды и т. д.) и даже нелинейные уравнения, причем применение его к последним выгодно с той точки зрения, что интегрирование степенного ряда не представляет особых трудностей.

Метод допускает создание единого вычислительного алгоритма и универсальной программы расчета частот и форм собственных колебаний сложных упругих систем на ЭВМ и может быть распространен на колебания пластин и оболочек.

Поступила 28 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Серия «Механика твердых деформируемых тел», т. 5. М., ВИНИТИ, 1973.
2. *Челомей В. Н.* Об упругих колебаниях изгиба. Тр. Киевск. авиац. ин-та, 1936, вып. 6.
3. *Челомей В. Н.* Применение рядов к исследованию устойчивости стержней. Тр. Киевск. авиац. ин-та, 1938, вып. 10.
4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.

---

УДК 539.3

## К ОБОСНОВАНИЮ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ

*(Москва)*

Получено неравенство, оценивающее снизу упругую энергию оболочки постоянной вертикальной толщины по трехмерной теории через упругую энергию по безмоментной теории. Это неравенство обобщает неравенство Моргенштерна в теории пластин [1]. С его помощью для некоторого класса задач выведена энергетическая оценка погрешности решения по безмоментной теории оболочек, показывающая, что при уменьшении толщины оболочки $h$ погрешность стремится к нулю.

Рассмотрим в декартовой системе координат $x\equiv x^0$, $x^\alpha$ (греческие индексы пробегают значения 1, 2, латинские — 0, 1, 2) оболочку — линейно-упругое анизотропное тело, ограниченное поверхностями $\Omega_+$ и $\Omega_-$ с уравнениями $x=f(x^\alpha)+h/2$ и $x=f(x^\alpha)-h/2$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $x$. Величину $h$ назовем вертикальной толщиной оболочки. Обычно толщиной оболочки называют длину отрезка, перпендикулярного срединной поверхности и заключенного между $\Omega_+$ и $\Omega_-$. Определенная так нормальная толщина $h_n$ совпадает в первом приближении с $h\varkappa^{-1}$, $\varkappa^2=1+(\partial f/\partial x^1)^2+(\partial f/\partial x^2)^2$. Оболочка постоянной нормальной толщины имеет переменную вертикальную толщину, и, наоборот, оболочка постоянной вертикальной толщины — переменную нормальную толщину. Дальше рассмотрим оболочки постоянной вертикальной толщины. Уравнения теории оболочек постоянной вертикальной толщины, выведенные в [2], а также данное ниже обобщение на такие оболочки неравенства Моргенштерна для пластин показывают, что оболочки постоянной вертикальной толщины представляют более естественное расширение понятия о пластинах, чем оболочки постоянной нормальной толщины.

Цилиндрическая поверхность вырезает в плоскости $x=0$ ограниченную область $\Omega$ с кусочно-дифференцируемой границей $\Gamma$. Линию $\Gamma$ разобьем на две части $\Gamma_w$ и $\Gamma_p$ ($\Gamma=\Gamma_w+\Gamma_p$). На частях границы тела, проектирующихся на $\Gamma_w$ и $\Gamma_p$, зададим соответственно перемещения $w^i_\Gamma$ и поверхностные силы $p^i_\Gamma$. Поверхности $\Omega_+$ и $\Omega_-$ будем считать свободными от нагрузок. Требуется при малых $h$ заменить решение этой трехмерной задачи приближенно решением некоторой двумерной задачи и оценить погрешность приближенного решения.