

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ С ИСТОЧНИКОМ

Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

(Москва)

Рассматриваются малые колебания тонкой упругой оболочки, частично заполненной идеальной сжимаемой жидкостью, внутри которой или на смоченной поверхности оболочки имеется источник — сток сравнительно малых размеров (газовый пузырь, отверстие в стенке, расходный трубопровод и пр.).

В работах С. А. Рыбака и Е. А. Самойлова [1-4] рассматривалась задача об осесимметричных колебаниях безмоментной полусферической и сферической оболочек, полностью заполненных несжимаемой жидкостью, внутри которой находится точечный источник или малый сферический пузырь. Полученные в этих работах решения являются неверными, поскольку с самого начала при использовании известного разложения потенциала точечного источника в бесконечный ряд, в последнем необоснованно были опущены все члены, содержащие нечетные полиномы Лежандра.

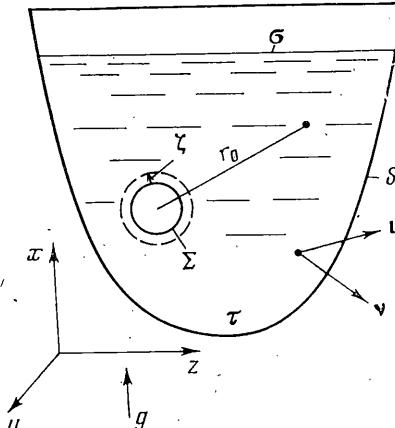
В работе [5] те же авторы привели формальное решение для произвольной оболочки, содержащей несжимаемую жидкость с малым пузырем, используя разложение потенциала точечного источника (функции Грина) в ряд по собственным функциям уравнения Гельмгольца в области, занятой жидкостью. В этом решении также допущена ошибка — значение потенциала на поверхности сферического пузыря заменяется его значением в центре без учета того факта, что в центре пузыря потенциал обращается в бесконечность, и соответствующий ряд для функции Грина расходится. Этого авторы работы не заметили и при вычислениях, когда в качестве примера рассматривали осесимметричные колебания жидкости с пузырем в упругой цилиндрической оболочке, численно «просуммировали» расходящийся ряд.

1. Уравнения возмущенного движения. Рассмотрим тонкую упругую оболочку, которая частично заполнена тяжелой идеальной сжимаемой жидкостью. Внутри жидкости или на смоченной поверхности оболочки имеется источник — сток, ограниченный поверхностью Σ , размеры которой считаются достаточно малыми (фиг. 1).

Обозначим через $q\xi$ перемещения частиц жидкости, протекающей через поверхность Σ вдоль ее нормали внутрь объема жидкости τ , где $q(t)$ — расход жидкости (приращение объема τ), ξ — заданная на Σ функция, характеризующая форму истечения, не зависящую от времени и нормированную так, что

$$\iint_x \xi d\Sigma = 1$$

Движение системы описывается потенциалом малых перемещений жидкости Φ и вектором перемещений срединной поверхности оболочки u .



Фиг. 1

Используя вариационный принцип Лагранжа для оболочки со сжимаемой жидкостью [6], получим

$$\delta\Pi + \iint_S \rho_0 h u'' \delta u \, dS + \rho \iiint_{\tau} \nabla \Phi'' \delta \nabla \Phi \, d\tau - \delta A = 0 \quad (1.1)$$

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\rho g}{2} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 \, d\sigma + \frac{\rho c^2}{2} \iiint_{\tau} (\Delta \Phi)^2 \, d\tau \quad (1.2)$$

При этом должны выполняться кинематические граничные условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = uv \text{ на } S_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -q\zeta \text{ на } \Sigma \quad (1.3)$$

Здесь S , S_0 и σ – полная поверхность оболочки, смоченная поверхность оболочки и свободная поверхность жидкости; v – внешняя единичная нормаль к поверхности $S_0 + \sigma + \Sigma$, ограничивающей объем жидкости τ ; ρ_0 , h – плотность и толщина оболочки; ρ , c – плотность и скорость звука в жидкости; g – ускорение поля массовых сил.

Величина Π_0 в (1.1) представляет потенциальную энергию деформации оболочки с учетом предварительного напряженного состояния.

Кроме того, в Π_0 включена часть потенциальной энергии массовых сил жидкости, зависящая только от перемещений оболочки [6]. Второй и третий члены в выражении (1.2) представляют потенциальную энергию массовых сил жидкости за счет перемещений ее свободной поверхности и потенциальную энергию сжатия жидкости в акустическом приближении.

Расход жидкости $q(t)$ в общем случае будем считать неизвестным. Пусть изнутри источника на поверхность Σ действует приращение давления p_* , тогда

$$\delta A = Q \delta q, \quad Q = \iint_{\Sigma} p_* \zeta \, d\Sigma \quad (1.4)$$

Потенциал перемещений жидкости и перемещение оболочки в возмущенном движении представим в виде разложений

$$\Phi = q\psi + \sum_n q_n \Phi_n, \quad u = \sum_n q_n u_n \quad (1.5)$$

где функцию ψ подчиним условиям

$$\Delta\psi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = 0 \text{ на } S_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = -\zeta \text{ на } \Sigma \quad (1.6)$$

считая ее произвольной на σ .

Обобщенные координаты $q_n(t)$ характеризуют движение по собственным формам колебаний оболочки с жидкостью без источника u_n , Φ_n . Потенциалы Φ_n удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Phi_n + \frac{\omega_n^2}{c^2} \Phi_n = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_n}{\partial v} = u_n v \text{ на } S_0, \quad g \frac{\partial\Phi_n}{\partial v} = \omega_n^2 \Phi_n \text{ на } \sigma \quad (1.7)$$

где ω_n – собственные частоты колебаний оболочки с жидкостью. В силу малости размеров поверхности Σ условию $\partial\Phi_n/\partial v = 0$ на Σ можно не удовлетворять.

Выполняются условия ортогональности собственных форм колебаний [6]:

$$\iint_S \rho_0 h u_m u_n \, dS + \rho \iiint_{\tau} \nabla \Phi_m \nabla \Phi_n \, d\tau = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ m_n, & m = n \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\iint_S L(u_m) u_n dS + \rho g \iint_{\sigma} \frac{\partial \Phi_m}{\partial v} \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} d\sigma + \rho c^2 \iiint_{\tau} \Delta \Phi_m \Delta \Phi_n d\tau = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ m_n \omega_n^2, & m = n \end{cases}$$

где $L(\dots)$ — самосопряженный линейный дифференциальный тензор-оператор уравнений оболочки, соответствующий потенциальной энергии Π_0 :

$$\iint_S L(u_n) u_n dS = 2\Pi_0[u_n] \quad (1.9)$$

Подставим разложения (1.5) в уравнение (1.1) с учетом (1.2), (1.4), (1.6)–(1.8). В результате получим систему уравнений

$$m_n q_n'' + m_n \omega_n^2 q_n + m_{*n} q'' + k_{*n} q = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$m_{*n} q'' + k_* q + \sum_n (m_{*n} q_n'' + k_{*n} q_n) = Q \quad (1.40)$$

$$m_* = \rho \iiint_{\tau} (\nabla \psi)^2 d\tau = \rho \iint_{\sigma} \psi \frac{\partial \psi}{\partial v} d\sigma - \rho \iint_{\Sigma} \psi \xi d\Sigma$$

$$m_{*n} = \rho \iiint_{\tau} \nabla \psi \nabla \Phi_n d\tau = \rho \iint_{\sigma} \Phi_n \frac{\partial \psi}{\partial v} d\sigma - \rho \iint_{\Sigma} \Phi_n \xi d\Sigma$$

$$k_* = \rho g \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 d\sigma, \quad k_{*n} = \rho g \iint_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} d\sigma \quad (1.41)$$

Если функцию ψ на свободной поверхности подчинить условиям

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{1}{S_1}, \quad \iint_{\sigma} \psi d\sigma = 0 \text{ на } \sigma, \quad S_1 = \iint_{\sigma} d\sigma \quad (1.42)$$

что возможно на основании (1.6), то уравнения (1.40) приводятся к виду

$$m_n (q_n'' + \omega_n^2 q_n) + c_n (q'' + \omega_n^2 q) + m_{*n}^{\circ} q'' = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.43)$$

$$m_{*n} q'' + \frac{\rho g}{S_1} q + \sum_n [c_n (q_n'' + \omega_n^2 q_n) + m_{*n}^{\circ} q_n''] = Q$$

$$c_n = \frac{\rho}{S_1} \iint_{\sigma} \Phi_n d\sigma = \frac{\rho g}{\omega_n^2 S_1} \iint_{\sigma} \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} d\sigma$$

$$m_* = -\rho \iint_{\Sigma} \psi \xi d\Sigma, \quad m_{*n}^{\circ} = -\rho \iint_{\Sigma} \Phi_n \xi d\Sigma \quad (1.44)$$

Если оболочка недеформируема ($u_n = 0$), а жидкость несжимаема ($c \rightarrow \infty$), то $c_n = 0$. Кроме того, $c_n = 0$ при $g = 0$. В этих случаях уравнения (1.43) упрощаются.

Для высокочастотных колебаний (преимущественно упругих или акустических) влиянием гравитации можно пренебречь. При этом высшие собственные формы удовлетворяют условию $\Phi_n = 0$ на σ .

В этом случае функцию ψ также удобно подчинить условию $\psi = 0$ на σ . Тогда уравнения (1.40) принимают вид ($g = 0$)

$$m_n q_n'' + m_n \omega_n^2 q_n + m_{*n}^{\circ} q'' = 0, \quad m_{*n} q'' + \sum_n m_{*n}^{\circ} q_n'' = Q \quad (1.45)$$

При использовании уравнений (1.45) в разложениях (1.5) можно не учитывать обобщенные координаты q_n , соответствующие преимущественно гравитационным колебаниям свободной поверхности, поскольку для таких форм $u_n \approx 0$ и $m_{*n}^{\circ} \approx 0$, если $\psi = 0$ на σ .

Уравнения (1.13) при $g=0$ также приводятся к виду (1.15), однако в этом случае необходимо учитывать формы гравитационных колебаний, чтобы снять связь, наложенную кинематическим условием (1.12), и удовлетворить на σ естественное динамическое граничное условие $\Phi=0$ при $g=0$.

Если расход жидкости $q(t)$ задан, то в системах (1.10), (1.13), (1.15) следует опустить последнее уравнение. Из оставшихся уравнений нетрудно определить обобщенные координаты $q_n(t)$, характеризующие реакцию оболочки и давление в жидкости, например, при гидравлическом ударе в результате внезапного прекращения истечения из источника (стока) или схлопывания кавитационного пузыря.

Первое уравнение (1.13) в этом случае удобно использовать в виде

$$m_n(f_n'' + \omega_n^2 f_n) + m_{*n}^\circ q'' = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \quad f_n = q_n + (c_n/m_n) q \quad (1.16)$$

В случае, если пузырь является сферическим и совершает сферически симметричные радиальные колебания ($\zeta=\text{const}$), а жидкость считается несжимаемой ($c \rightarrow \infty$), на основании теоремы о среднем значении гармонической функции получим

$$m_{*n}^\circ = -\rho \Phi_n(x_*, y_*, z_*) \quad (1.17)$$

где x_* , y_* , z_* — координаты центра сферического пузыря.

Как следует из уравнений (1.16) с учетом выражения (1.14) для коэффициента m_{*n}° , при решении задачи о вынужденных колебаниях оболочки с жидкостью, возбуждаемых переменным расходом источника, находящегося в жидкости, нет необходимости определять потенциал Φ .

Это обстоятельство осталось незамеченным в работе [7] при рассмотрении вынужденных колебаний оболочки, содержащей несжимаемую жидкость с точечным источником без учета гравитации, где в уравнениях типа (1.16) коэффициенты m_{*n}° определялись по формуле

$$m_{*n}^\circ = \rho \iint_{S_0} \psi u_n v \, dS \quad (1.18)$$

Для рассмотренного в [7] случая тождественность выражений (1.17) и (1.18) следует из принципа взаимности и может быть показана при помощи формулы Грина.

2. Собственные колебания. Если источник является линейной консервативной системой, то при свободных гармонических колебаниях с частотой ω обобщенная сила давления на поверхность источника связана с расходом жидкости соотношением

$$Q = -K(\omega) q \quad (2.1)$$

где $K(\omega)$ — действительная мероморфная функция, представляющая частотную характеристику источника (коэффициент динамической жесткости). Нули этой функции являются собственными частотами свободного источника, не взаимодействующего с окружающей жидкостью ($Q=0$), а полюсы являются собственными частотами «закрытого» источника ($q=0$).

Исключая обобщенные координаты q_n и обобщенную силу Q и считая $q \neq 0$, получим частотное уравнение связанной системы (оболочка с жидкостью — источник), которое при использовании, например уравнений (1.15), имеет вид

$$\omega^2 \sum_n \frac{(m_{*n})^2 / m_n}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{K(\omega)}{\omega^2} - m_* \quad (2.2)$$

3. Определение потенциала ψ . Потенциал ψ , удовлетворяющий уравнениям (1.6), будем искать в форме

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (3.1)$$

$$\Delta\psi_0 = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = -\zeta \quad \text{на } \Sigma, \quad \psi_0 = 0 \quad \text{при } r_0 \rightarrow \infty$$

$$\Delta\psi_1 = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} = -\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} \quad \text{на } S_0$$

где r_0 — расстояние от центра источника; ψ_0 — потенциал перемещений, возбуждаемых источником в бесграничной несжимаемой жидкости; ψ_1 — потенциал перемещений частиц жидкости, отраженных от поверхности недеформируемой оболочки. В силу малости размеров Σ граничному условию $\partial\psi_1/\partial\nu=0$ на Σ можно не удовлетворять, так же как для потенциалов Φ_n .

Потенциал ψ_0 вблизи источника зависит от формы поверхности Σ и формы источника ζ . В общем случае произвольной поверхности Σ потенциал ψ_0 в ближнем поле источника может быть определен вариационным методом или методом источников неизвестной интенсивности, распределенных на Σ .

На достаточном удалении от Σ потенциал ψ_0 может быть заменен его асимптотическим разложением по обратным степеням расстояния r_0 до центра источника (аналогично разложению ньютона потенциала); например, для источника, находящегося внутри жидкости

$$\psi_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_0} + O\left(\frac{1}{r_0^2}\right) \quad (3.2)$$

Для точек поверхностей S_0 и σ , достаточно удаленных от такого источника, получим

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} \approx -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_0^2} \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}) \quad \text{на } S_0 + \sigma \quad (3.3)$$

Потенциал ψ_1 затем находится любым из известных методов. Для упрощения коэффициентов (1.11) далее будем требовать, чтобы потенциал ψ_1 удовлетворял на свободной поверхности σ граничным условиям (1.12)

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} = \frac{1}{S_1}, \quad \iint_{\sigma} \psi_0 d\sigma + \iint_{\sigma} \psi_1 d\sigma = 0 \quad (3.4)$$

или условию

$$\psi_0 + \psi_1 = 0 \quad (3.5)$$

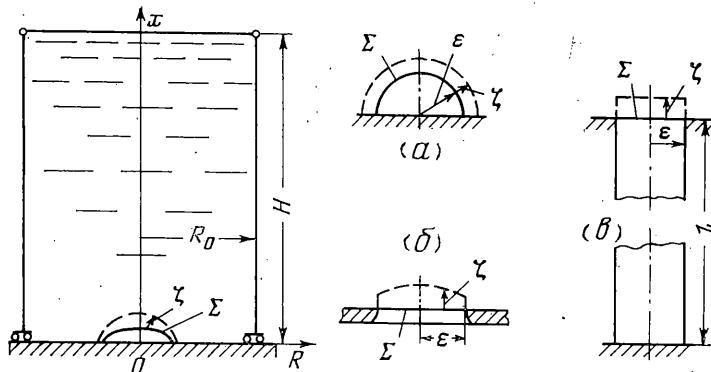
В соответствии с (3.1) и граничными условиями (3.4), (3.5) коэффициент обобщенной массы m_* запишем в виде

$$m_* = m_*^0 + m_*^1, \quad m_*^0 = -\rho \iint_{\Sigma} \psi_0 \xi d\Sigma, \quad m_*^1 = -\rho \iint_{\Sigma} \psi_1 \xi d\Sigma \quad (3.6)$$

При малых размерах источника и небольших глубинах его погружения m_*^0 может значительно превосходить m_*^1 . Поэтому в таких случаях нет необходимости вычислять потенциал ψ_1 с большой точностью.

4. Цилиндрическая оболочка. Рассмотрим осесимметричные колебания сжимаемой жидкости в цилиндрической оболочке с плоским жестким дном, в центре которого расположен источник (фиг. 2).

Нижний край оболочки $x=0$ считаем защемленным по углу поворота и свободным по радиальному смещению, верхний край $x=H$ считаем свободно опертым. Примем следующие параметры для дюралевой оболочки, заполненной водой: $R_0/h=100$, $\mu=0.3$, $\rho_0/\rho=2.7$, $E/\rho c^2=31.2$, $\eta=H/R_0=4$.



Фиг. 2

Пренебрегаем влиянием гравитации ($g=0$) и тангенциальных сил инерции оболочки.

Для этого случая имеется точное решение задачи о собственных колебаниях оболочки без источника [8]:

$$\begin{aligned} W_n = \mathbf{u}_n \mathbf{v} &= \cos \lambda_n \frac{x}{R_0}, \quad \Phi_n = R_0 \frac{I_0(\lambda_n^\circ R/R_0)}{\lambda_n^\circ I_1(\lambda_n^\circ)} \cos \lambda_n \frac{x}{R_0} \\ \lambda_n &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\eta}, \quad \eta = \frac{H}{R_0} \\ \lambda_n^\circ &= (\lambda_n^2 - \beta \Omega_n^2)^{1/2}, \quad \beta = Eh/\rho c^2 R_0, \quad \Omega_n^2 = \omega_n^2 \rho R_0^3/Eh, \quad m_n = \pi \rho R_0^3 \eta \mu_n \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\mu_n = \frac{\rho_0 h}{\rho R_0} + \frac{I_0(\lambda_n^\circ)}{\lambda_n^\circ I_1(\lambda_n^\circ)} + \frac{\beta \Omega_n^2}{2(\lambda_n^\circ)^2} \left[\frac{I_0^2(\lambda_n^\circ)}{I_1^2(\lambda_n^\circ)} - 1 \right]$$

Безразмерная собственная частота Ω_n определяется из частотного уравнения

$$\left[1 + \frac{\lambda_n^4}{12(1-\mu^2)} \frac{h^2}{R_0^2} \right] - \Omega_n^2 \left[\frac{\rho_0 h}{\rho R_0} + \frac{I_0(\lambda_n^\circ)}{\lambda_n^\circ I_1(\lambda_n^\circ)} \right] = 0 \quad (4.2)$$

При достаточно малых размерах поверхности источника Σ функции Φ_n для некоторого числа низших форм можно считать постоянными на Σ . Коэффициенты m_{*n} для них можно приближенно представить в виде

$$m_{*n} = -\rho \Phi_n(0, 0) = -\rho R_0 [\lambda_n^\circ I_1(\lambda_n^\circ)]^{-1} \quad (4.3)$$

Потенциал ψ_0 в безграничном полупространстве на достаточном удалении от источника, центр которого расположен в точке $x=R=0$, равен

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \quad (4.4)$$

Поэтому на поверхности оболочки при $R=R_0$

$$W_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{R_0}{(x^2+R_0^2)^{1/2}} \quad (4.5)$$

На поверхности дна при $x=0$, $\partial \psi_0 / \partial x = 0$.

Для цилиндра нетрудно получить точное решение для потенциала ψ_0 методом разделения переменных. Здесь приведем точное решение в иной форме, которое получено вариационным методом Власова — Канторовича

при использовании ортогональных функций Бесселя [9]:

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \alpha) = & -2R_0 \left\{ \int_0^\eta \int_0^\xi W_0(\xi) d\xi d\xi + \frac{1}{4} W_0(\xi) \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} \right) + s_0 + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{ch} k_m \xi}{k_m \operatorname{ch} k_m \eta} \int_0^\eta W_0(\xi_1) \operatorname{sh} k_m(\eta - \xi_1) d\xi_1 - \frac{1}{k_m^2} W_0(\xi) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{k_m} \int_0^\xi W_0(\xi_1) \operatorname{sh} k_m(\xi - \xi_1) d\xi_1 + s_m \frac{\operatorname{ch} k_m \xi}{\operatorname{ch} k_m \eta} \right] \varphi_m(\alpha) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\xi = x/R_0, \quad \alpha = R/R_0, \quad \varphi_m(\alpha) = J_0(k_m \alpha)/J_0(k_m)$$

где k_m — корни уравнения $J_1(k)=0$.

Коэффициенты s_m выбираются так, чтобы удовлетворить заданному граничному условию (3.4) или (3.5) на свободной поверхности при $\xi=\eta$; при $s_m=0, m=0, 1, \dots$ выполняется условие $\psi_1(\eta, \alpha)=0$. Удовлетворяя граничному условию (3.5), найдем

$$s_m = \frac{1}{R_0} \int_0^1 \psi_0 \varphi_m \alpha d\alpha = -\frac{1}{2\pi R_0^2} \int_0^1 \frac{\varphi_m(\alpha)}{\sqrt{\eta^2 + \alpha^2}} \alpha d\alpha \quad (m=0, 1, \dots) \quad (4.7)$$

В выражении (4.6) первые три члена, стоящие вне бесконечной суммы по m , описывают движение жидкости, подчиняющееся гипотезе плоских сечений [9]. Они дают хорошее приближение для ψ_1 при больших глубинах заполнения ($\eta>1$). При этом члены ряда при $m=1, 2, \dots$ дают незначительные поправки, очень быстро затухающие при возрастании m .

Решение (4.6) можно преобразовать и представить в другом виде, считая $k_0=0$ и $\varphi_0(\alpha)=1$

$$\psi_1(\xi, \alpha) = -2R_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^\eta G_m(\xi, \xi_1) W_0(\xi_1) d\xi_1 + s_m \frac{\operatorname{ch} k_m \xi}{\operatorname{ch} k_m \eta} \right] \varphi_m(\alpha) \quad (4.8)$$

$$G_0(\xi, \xi_1) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} k_m(\eta - \xi) \operatorname{ch} k_m \xi_1}{k_m \operatorname{ch} k_m \eta} & (0 \leq \xi_1 \leq \xi) \\ \frac{\operatorname{ch} k_m \xi \operatorname{sh} k_m(\eta - \xi_1)}{k_m \operatorname{ch} k_m \eta} & (\xi \leq \xi_1 \leq \eta) \end{cases}$$

Сходимость рядов здесь ухудшается по сравнению с разложением (4.6). На основании (4.6) с учетом (4.5) приближенное значение потенциала ψ_1 в центре источника при $x=R=0$ равно

$$\psi_1(0, 0) = -\frac{1}{\pi R_0} \left[\eta - \frac{9}{8} + O(\eta^{-5}) \right] \quad (4.9)$$

По формуле (3.6) с учетом малости размеров источника получим

$$m_*^1 = \frac{\rho}{\pi R_0} \left(\eta - \frac{9}{8} \right) \quad (\eta>1) \quad (4.10)$$

Рассмотрим следующие три типа источников в дне.

Полусферический пузырь (фиг. 2, а). При колебаниях пузыря по форме $\xi=1/(2\pi r^2)$ найдем

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi r_0}, \quad m_*^0 = \frac{\rho}{2\pi \epsilon}, \quad Q = p_* = -\frac{p_0 \gamma}{V_0} q \quad (4.11)$$

где ε — радиус пузыря, p_* — изменение давления газа в пузыре при увеличении его объема на величину q , p_0 — равновесное давление в пузыре при объеме $V_0 = (\frac{2}{3})\pi\varepsilon^3$, γ — показатель адиабаты газа; $r_0 = \sqrt{x^2 + R^2}$, $q/V_0 \ll 1$. В этом случае $K(\omega) = p_0\gamma/V_0$.

Разделим обе части частотного уравнения (2.2) на $\rho\eta/\pi R_0$ и запишем его в виде

$$\kappa_0(\omega) = \kappa_1(\omega) \quad (4.12)$$

$$\kappa_0(\omega) = \frac{1}{\eta^2} \sum_n \frac{1}{(\lambda_n)^2 \mu_n I_1(\lambda_n)} \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (4.13)$$

$$\kappa_1(\omega) = \frac{1}{2\eta} \frac{R_0}{\varepsilon} \frac{\omega_\infty^2}{\omega^2} - \left[1 + \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} \frac{R_0}{\varepsilon} - \frac{9}{8} \right) \right], \quad \omega_\infty^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho\varepsilon^2} \quad (4.14)$$

где ω_∞ — частота колебаний полусферического пузыря в полупространстве, заполненном жидкостью. Частота колебаний пузыря внутри абсолютно жесткой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью ω_0 , определяется из уравнения $\kappa_1(\omega) = 0$.

При $R_0/\varepsilon = 10$ и глубине заполнения $\eta = 4$ найдем $\omega_0 = 0.7969\omega_\infty$.

Функция $\kappa_0(\Omega)$ показана на фиг. 3; $\Omega = \omega \sqrt{\rho R_0^3/Eh}$ — безразмерная частота. Три низших собственных частоты оболочки с жидкостью без пузыря (полюсы функции $\kappa_0(\Omega)$, отмеченные на фиг. 3 пунктирными стрелками) равны: $\Omega_1 = -0.2562$, $\Omega_2 = 0.7255$, $\Omega_3 = 1.4027$; если жидкость считать несжимаемой ($\beta = 0$), то $\Omega_1 = -0.2748$, $\Omega_2 = 0.7659$, $\Omega_3 = 1.1447$.

Пусть давление в пузыре p_0 таково, что его частота в случае абсолютно жесткой оболочки при $R_0/\varepsilon = 10$ равна четверти низшей частоты оболочки без пузыря, т. е. $\Omega_0 = \Omega_1/4 = 0.0640$. Частоты колебаний оболочки с пузырем определяются как точки пересечения кривых $\kappa_0(\Omega)$ и $\kappa_1(\Omega)$ (см. фиг. 3). Две низших частоты равны: $\Omega_0^* = 0.0632$, $\Omega_1^* = 0.3355$.

Как видно, упругость оболочки весьма незначительно снижает частоту колебаний пузыря ($\Omega_0 = 0.0640$), в то время как пузырь существенно увеличивает низшую частоту колебаний оболочки ($\Omega_1 = -0.2562$). При уменьшении размеров пузыря и глубины заполнения это взаимное влияние быстро снижается.

Отверстие (фиг. 2, б). Форму истечения из круглого отверстия радиуса ε зададим в виде

$$\xi = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \left[1 + a \left(1 - 2 \frac{R^2}{\varepsilon^2} \right) \right] \quad (R \leq \varepsilon) \quad \iint_{\Sigma} \xi d\Sigma = 1 \quad (4.15)$$

где a — некоторый коэффициент.

Потенциал ψ_0 для полупространства $x \geq 0$, занятого жидкостью, можно определить с помощью интегрального преобразования Ханкеля [10]:

$$\psi_0(x, R) = - \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left[\int_0^\varepsilon \xi(R_1) J_0(\lambda R_1) R_1 dR_1 \right] J_0(\lambda R) d\lambda \quad (4.16)$$

Найдем обобщенную массу

$$m_* = -2\pi\rho \int_0^\varepsilon \psi_0(0, R) \xi(R) R dR = \frac{8\rho}{3\pi^2\varepsilon} \left(1 - \frac{22}{15} a + \frac{177}{105} a^2 \right) \quad (4.17)$$

Запишем, кроме того, асимптотическое представление потенциала на некотором удалении от источника при $r_0 = \sqrt{x^2 + R^2} > \varepsilon$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\zeta(R)}{r} d\Sigma \approx -\frac{1}{2\pi r_0} \left[1 + \frac{R^2 - 2x^2}{4r_0^4} \iint_{\Sigma} \zeta R^2 d\Sigma \right] \quad (4.18)$$

В случае малого отверстия ($\varepsilon/R_0 \ll 1$) второй член в квадратных скобках на поверхности оболочки при $R=R_0$ дает незначительную поправку, что подтверждает возможность использования приближенных формул (4.4) и (4.5).

Коэффициент a можно определить как циклическую координату из условия минимума кинетической энергии жидкости. Тогда получим

$$\frac{\partial m_*}{\partial a} \approx \frac{\partial m_*^\circ}{\partial a} = 0, \quad a = \frac{77}{177}, \quad m_*^\circ = \frac{8\rho}{3\pi^2\varepsilon} 0.681$$

Для отверстия со свободной поверхностью Σ $K(\omega)=0$, и частотное уравнение (2.2) по аналогии с (4.12) запишем в виде (исключая «нулевую» частоту $\omega_0^*=0$)

$$\chi_0(\Omega) = \chi_2, \quad \chi_2 = - \left[1 + \frac{1}{\eta} \left(0.577 \frac{R_0}{\varepsilon} - \frac{9}{8} \right) \right] \quad (4.19)$$

Безразмерные частоты Ω_n^* бака с отверстием в дне при $R_0/\varepsilon=10$ показаны на фиг. 3 как точки пересечения $\chi_0(\Omega)$ и $\chi_2=-2.164$. Низшая частота равна $\Omega_1^*=0.3217$; без отверстия — $\Omega_1=0.2562$.

Трубопровод (фиг. 2, в). Форму течения при входе в упругий трубопровод можно принять в виде (4.15), однако в этой задаче влияние второго члена мало, поэтому будем считать $a=0$ и $\zeta=1/(\pi\varepsilon^2)$. Тогда $m_*^\circ=8\rho/(3\pi^2\varepsilon)$. Коэффициент обобщенной массы $m_* = m_*^\circ + m_*^1$ запишем в виде

$$m_* = \frac{\rho\eta}{\pi R_0} (1+d_0), \quad d_0 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{8}{3\pi} \frac{R_0}{\varepsilon} - \frac{9}{8} \right) \quad (4.20)$$

Коэффициент d_0 как функция от ε/R_0 хорошо согласуется с точным решением, полученным в рядах по функциям Бесселя в [11].

Для заданной формы течения $\zeta=1/(\pi\varepsilon^2)$ величина Q представляет собой среднее давление на входе в трубопровод. Считая нижний конец упругого трубопровода закрытым и неподвижным, получим

$$K(\omega) = \frac{\rho\omega c_t}{\pi\varepsilon^2} \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c_t}, \quad \frac{E}{pc_t^2} = \frac{E}{\rho c^2} + 2 \frac{\varepsilon}{h_t}$$

где l — длина трубопровода, c_t — эффективная скорость звука в упругом трубопроводе со сжимаемой жидкостью, h_t — толщина стенки трубопровода.

Частотное уравнение (2.2) для этого случая запишем в форме

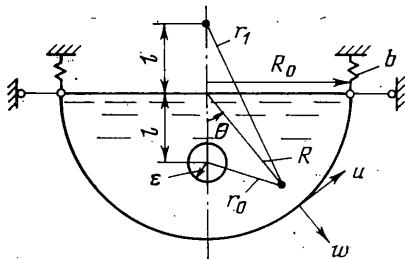
$$\chi_0(\Omega) = \chi_3(\Omega), \quad \chi_3(\Omega) = \frac{1}{\eta} \frac{R_0^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\rho c_t^2}{E} \frac{R_0}{h}} \frac{1}{\Omega} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{E}{\rho c_t^2} \frac{h}{R_0}} \frac{l}{R_0} \Omega \right) - (1+d_0) \quad (4.21)$$

Примем следующие параметры дюралевого трубопровода с водой: $\varepsilon/h_t=100$, $R_0/\varepsilon=10$, $l/R_0=6$, $E/\rho c^2=31.2$. Низшая безразмерная частота продольных колебаний жидкости в упругом трубопроводе со свободным верхним краем ($Q=0$) при заданных значениях параметров равна $\Omega_0^\circ=0.1722$. Если цилиндрическую оболочку считать абсолютно жесткой, то частоты определяются из уравнения $\chi_3(\Omega)=0$, которое дает низшую частоту $\Omega_0^*=0.1697$. В случае упругой оболочки частоты определяются как точки пересечения кривых $\chi_0(\Omega)$ и $\chi_3(\Omega)$ (фиг. 3). В этом случае низшая частота равна $\Omega_1^*=0.1643$ — она относится к низшей форме преимущественно продольных колебаний жидкости в трубопроводе. Вторая частота относится к низшей форме колебаний оболочки с жидкостью и равна $\Omega_1^*=0.2578$; без трубопровода — $\Omega_1=0.2562$.

Эти результаты показывают, что частотное взаимодействие между оболочкой и трубопроводом слабое. То же самое относится и к случаю, когда на нижнем конце трубопровода имеется сосредоточенная упругость.

5. Полусферическая оболочка. Рассмотрим осесимметричные колебания полусферической оболочки, полностью заполненной несжимаемой жидкостью ($c \rightarrow \infty$), внутри которой имеется сферический газовый пузырь

(фиг. 4). Влиянием гравитации пренебрегаем ($g=0$). Шарнирно опертый край оболочки считается упругозакрепленным по тангенциальному смещению.



Фиг. 4

В невозмущенном равновесном состоянии газовый пузырь в мягкой упругой оболочке радиуса ϵ при помощи тонкой нити удерживается на глубине l , $\epsilon \leq l \leq R_0 - \epsilon$; R_0 — радиус полусферы. Считаем, что эластичная безынерционная оболочка пузыря сопротивляется только изменению его объема и не сопротивляется изменению формы. Нить, удерживающую пузырь, считаем весьма податливой.

В этом случае кинематическое граничное условие на поверхности пузыря Σ будет иметь вид

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial v} d\Sigma = -q \quad (5.1)$$

Чтобы это условие выполнялось при использовании разложения потенциала в виде (1.5) в случае несжимаемой жидкости, функцию ψ необходимо подчинить условию

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial v} d\Sigma = -1, \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} d\Sigma = 0 \quad (5.2)$$

Потенциал ψ представим в виде

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (5.3)$$

где r_0 — расстояние от рассматриваемой точки до центра пузыря, r_1 — расстояние до точки, лежащей вне жидкости и являющейся зеркальным отображением центра пузыря относительно свободной поверхности σ (фиг. 4); a_n — неизвестные коэффициенты.

Потенциал (5.3) удовлетворяет уравнению $\Delta\psi=0$ в τ , условию (5.2) на Σ и условию $\psi=0$ на σ .

Коэффициенты a_n найдем, удовлетворяя кинематическому граничному условию на неподвижной полусфере $\partial\psi/\partial R=0$ при $R=R_0$. Для этого используем разложение

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l}{R} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (R > l)$$

Тогда получим

$$a_n = -\frac{1}{\pi R_0} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{l}{R_0} \right)^{2n+1} \quad (5.4)$$

Определим собственные частоты и формы колебаний свободно опертой оболочки с жидкостью без пузыря. Воспользуемся уравнениями общей технической теории В. З. Власова [12], которые для осесимметричных колебаний сферической оболочки с учетом гидродинамического давления $p=-\rho\Phi''$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (Lu) + (1-\mu)u + (1+\mu)\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1-\mu^2}{E} R_0^2 \rho_0 u'' = 0 \quad (5.5)$$

$$(1+\mu)Lu + 2(1+\mu)w + c_0^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 2)w + \frac{1-\mu^2}{E} R_0^2 \rho_0 \left(w'' + \frac{\rho}{\rho_0 h} \Phi''|_{R=R_0} \right) = 0$$

$$Lu = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u), \quad \nabla^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad c_0^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}$$

Для случая свободного опирания полусферической оболочки на краю $\theta=\pi/2$ ($w=N_\theta=M_\theta=0$) нетрудно получить точное решение задачи о собственных колебаниях

$$\begin{aligned} W_{ni} &= P_{2n+1}(\cos \theta), \quad U_{ni} = A_{ni} \frac{dP_{2n+1}(\cos \theta)}{d\theta} \\ \Phi_{ni} &= \frac{R_0}{2n+1} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \\ \omega_{ni}^2 &= \frac{E}{(1-\mu^2)R_0^2 \rho_0} \lambda_{ni}, \quad A_{ni} = \frac{1+\mu}{\kappa_n - 1 + \mu - \lambda_{ni}} \quad (i=1,2) \quad (5.6) \\ \lambda_{n1} &= \frac{1}{2\alpha_n} (\beta_n - \sqrt{\beta_n^2 - 4\alpha_n \gamma_n}), \quad \lambda_{n2} = \frac{1}{2\alpha_n} (\beta_n + \sqrt{\beta_n^2 - 4\alpha_n \gamma_n}) \\ \beta_n &= \alpha_n (\kappa_n - 1 + \mu) + 2(1+\mu) + c_0^2 \kappa_n (\kappa_n - 2) \\ \gamma_n &= (\kappa_n - 2) [1 - \mu^2 + c_0^2 \kappa_n (\kappa_n - 1 + \mu)] \\ \alpha_n &= 1 + \frac{\rho R_0}{\rho_0 h} \frac{1}{2n+1}, \quad \kappa_n = 2(n+1)(2n+1) \quad (n=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

где $i=1$ относится к формам преимущественно нормальных перемещений, а $i=2$ — к формам преимущественно тангенциальных перемещений оболочки.

В случае упругозакрепленной оболочки (фиг. 4) действие упругой подвески заменим неизвестной продольной реакцией $P(t)=2\pi R_0 N_\theta (\pi/2, t)$, приложенной на краю оболочки, и запишем кинематическое граничное условие для тангенциального перемещения края при $\theta=\pi/2$

$$u = -P/b \quad (5.7)$$

где b — коэффициент жесткости опорного контура для осевого смещения.

В этом случае при использовании разложений (1.5) по собственным формам колебаний свободно опертой оболочки с жидкостью (5.6) в уравнения для обобщенных координат q_{ni} необходимо включить обобщенные силы $Q_{ni}=PU_{ni}(\pi/2)$. Тогда уравнения (1.15) с учетом Q_{ni} и условий (2.1), (5.7) запишутся в виде

$$m_{ni}(q_{ni}'' + \omega_{ni}^2 q_{ni}) + m_{*ni}^\circ q'' = PU_{ni}(\pi/2) \quad (5.8)$$

$$m_* q'' + Kq + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_{*ni}^\circ q_{ni}'' = 0 \quad (n=0,1,2,\dots,\infty; i=1,2)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} q_{ni} U_{ni} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{P}{b} = 0$$

Эти уравнения можно также получить, используя метод неопределенных множителей Лагранжа [8].

Коэффициент жесткости пузыря равен

$$K = \frac{3p_0\gamma}{4\pi\varepsilon^3} + \frac{2}{1-\mu_0} \frac{E_0 h_0}{4\pi\varepsilon^4} \quad (5.9)$$

где p_0 и γ — равновесное давление и показатель адиабаты газа в пузыре; E_0 , h_0 , μ_0 — модуль упругости, толщина и коэффициент Пуассона оболочки пузыря.

Коэффициенты обобщенных масс определим по формулам (1.8), (1.11) с учетом (5.3), (5.4), (5.6), полагая $\zeta = \partial\psi/\partial r_0$ при $r_0 = \varepsilon$. При вычислении коэффициента m_* для удобства интегрирования по поверхности пузыря Σ потенциал ψ выразим через шаровые функции для шара, центр которого совпадает с центром пузыря. Для этого используем разложения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{2l} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{2l} \right)^k P_k(\cos \theta) \quad (r_0 < 2l) \\ R^m P_m(\cos \theta) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} l^{m-k} r_0^k P_k(\cos \theta) \end{aligned}$$

где θ — угол между осью оболочки, направленной вверх, и радиусом r_0 (фиг. 4).

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} m_{ni} &= \frac{2\pi\rho R_0^3}{4n+1} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{\rho_0 h}{\rho R_0} (1 + A_{ni}^2 \chi_n) \right] \\ m_{ni}^o &= -\rho \iint_{\Sigma} \Phi_{ni} \frac{\partial \psi}{\partial r_0} d\Sigma = \rho \iint_{S_0} \psi W_{ni} dS = -\frac{\rho R_0}{2n+1} \delta^{2n+1} \\ m_* &= -\rho \iint_{\Sigma} \psi \frac{\partial \psi}{\partial r_0} d\Sigma = \mu_* - \frac{\rho}{\pi R_0} \left[\frac{1}{16\delta} \left(\frac{z}{1-z^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1} (2z)^k F_k \left(\frac{\varepsilon}{R_0} (2z)^k F_k + (-z)^{k+1} \right) \right] \\ \mu_* &= \frac{\rho}{4\pi R_0} \left[\frac{R_0}{\varepsilon} - \frac{1}{2\delta} + \frac{2\delta^2}{1-\delta^4} + \ln \frac{1+\delta^2}{1-\delta^2} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$F_k = \frac{1}{k!} \sum_{m=p_k}^{\infty} \frac{(2m-k)\dots2m}{2m-1} \delta^{2(2m-1)}, \quad \delta = \frac{l}{R_0}, \quad z = \frac{1}{2\delta} \frac{\varepsilon}{R_0}$$

где $p_k = (k+1)/2$ для нечетного k и $p_k = (k+2)/2$ для четного k ; $k=1, 2, \dots$

При малых размерах пузыря ($\varepsilon \ll R_0$) в сумме по k в выражении m_* достаточно удержать только первый член при $k=1$, поскольку последующие члены близки к нулю. В этом случае получим

$$\begin{aligned} m_* &= \mu_* - \frac{\rho}{\pi R_0} \left[\frac{1}{16\delta} \left(\frac{z}{1-z^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{R_0} \right)^3 \frac{1}{(1-\delta^4)^2} \left(\frac{4\delta^2}{(1-\delta^4)^2} + \frac{1}{2\delta} \right) \right], \quad F_1 = \frac{2\delta^2}{(1-\delta^4)^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Оценки, выполненные с использованием формулы (5.11), показывают, что при $\varepsilon \ll R_0$ и при любых глубинах погружения ($\varepsilon/R_0 \leq \delta \leq 1 - \varepsilon/R_0$) с достаточной точностью можно считать $m_* \approx \mu_*$. При этом $m_* < \mu_*$. Наибольшая разница между μ_* и m_* возникает, когда пузырь находится вблизи дна ($\delta = 1 - \varepsilon/R_0$) и вблизи свободной поверхности ($\delta = \varepsilon/R_0$). Например, при $\varepsilon/R_0 = 0.1$ разница между μ_* и m_* равна 1.9% при $\delta = 0.9$, 6.4% при $\delta = 0.1$ и 0.08% при $\delta = 0.5$.

Если рассматривать радиальные колебания пузыря по форме $\zeta = 1/(4\pi\varepsilon^2)$ при условии, что центр его остается неподвижным, то при $\varepsilon \ll R_0$ также получим $m_* \approx \mu_*$. Однако в этом случае $m_* > \mu_*$ и различие между m_* и μ_* меньше, чем в случае свободного пузыря в мягкой оболочке. Коэффициенты m_{ni}^* в этих двух случаях одинаковы.

При гармонических колебаниях с частотой ω из уравнений (5.8) исключим q_{ni} , q , P и получим частотное уравнение для упругоподвешенной оболочки, содержащей жидкость с пузырем

$$D(\omega) - \frac{E^2(\omega)}{F(\omega)} + \frac{1}{b} = 0 \quad (5.12)$$

$$D(\omega) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{ni}^2(\pi/2)}{m_{ni}(\omega_{ni}^2 - \omega^2)}, \quad E(\omega) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_{ni}^* U_{ni}(\pi/2)}{m_{ni}(\omega_{ni}^2 - \omega^2)}$$

$$F(\omega) = \frac{m_*}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_{ni}^*)^2}{m_{ni}(\omega_{ni}^2 - \omega^2)}, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m_*}$$

Здесь ω_0 представляет частоту колебаний пузыря в жидкости, заполняющей неподвижную полусферическую полость. При глубине погружения $l = 0.493R_0$ свободная поверхность жидкости и неподвижная полусферическая стенка компенсируют взаимовлияние на присоединенную массу пузыря ($m_* \approx \mu_* = \rho/(4\pi\varepsilon)$ при $\delta = 0.493$), и его частота ω_0 равна частоте колебаний пузыря в безграничной жидкости $\omega_\infty = \sqrt{4\pi\varepsilon K/\rho}$.

В частных случаях уравнения

$$D(\omega) + 1/b = 0, \quad F(\omega) = 0 \quad (5.13)$$

являются частотными уравнениями для упругоподвешенной оболочки с жидкостью без пузыря ($\varepsilon \rightarrow 0$) и для свободно опертой оболочки ($b \rightarrow 0$) с жидкостью, содержащей пузырь. При $b \rightarrow \infty$ оболочка становится неподвижно опертой.

Определим квадраты безразмерных собственных частот колебаний $\lambda = \omega^2 \rho R_0^3 / Eh$ неподвижно опертой сферической оболочки с жидкостью, в которую погружен пузырь, при следующих значениях параметров: $R_0/h = 200$, $\mu = 0.3$, $\rho_0/\rho = 2.7$, $R_0/\varepsilon = 10$, $b = \infty$. При этом для квадрата собственной частоты пузыря в безграничной жидкости ω_∞^2 примем $\lambda_\infty = 0.5$.

Для трех низших частот колебаний оболочки без пузыря из уравнения $D(\omega) = 0$ находим $\lambda_1 = 1.418$, $\lambda_2 = 3.241$, $\lambda_3 = 4.929$.

Следует отметить, что в рассматриваемом случае, когда оболочка нагружается тангенциальной нагрузкой (реакцией P на краю), учет собственных форм преимущественно тангенциальных колебаний оболочки необходим. Без них система собственных форм является неполной, что приводит к ошибочным результатам (например, без учета тангенциальных форм — $\lambda_1 = 2.031$, $\lambda_2 = 4.076$, $\lambda_3 = 5.937$).

Ниже приведены результаты для неподвижной полусферической полости (λ_0) и для упругой оболочки (λ_j^* , $j = 0, 1, 2, 3$), содержащих жидкость с пузырем, при некоторых глубинах его погружения

δ	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9
λ_0	1.055	0.654	0.575	0.498	0.430	0.384	0.311
λ_0^*	1.029	0.641	0.557	0.466	0.389	0.344	0.280
λ_1^*	1.465	1.479	1.535	1.736	2.105	2.276	2.210
λ_2^*	3.251	3.260	3.271	3.273	3.242	3.302	3.431
λ_3^*	4.934	4.940	4.950	4.993	5.212	5.676	5.967

Коэффициент присоединенной массы пузыря m_* определялся по формуле (5.11). Сравнение λ_j^* с λ_j при $j=0, 1, 2, 3$ показывает, что упругость оболочки незначительно снижает частоту пузыря, в то время как введение пузыря в жидкость может существенно увеличить частоты колебаний оболочки, особенно при больших глубинах его погружения.

Результаты, полученные в [8], являются неверными и не согласуются с приведенными выше результатами.

Поступила 10 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбак С. А., Самойлов Е. А. Колебания сферической оболочки с жидкостью, имеющей малую полость, заполненную газом. Тр. VI Всес. акуст. конф. М., Акуст. ин-т АН СССР, 1968.
2. Рыбак С. А., Самойлов Е. А. Динамические характеристики полусферической оболочки с жидкостью, имеющей источник. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин, М., «Наука», 1970.
3. Рыбак С. А., Самойлов Е. А. Колебания полусферической оболочки с жидкостью, имеющей малую полость, заполненную газом. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
4. Самойлов Е. А. Некоторые задачи колебаний сферических оболочек с жидкостью. В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосиб. электротехн. ин-т, 1973.
5. Рыбак С. А., Самойлов Е. А. Частотный спектр колебаний произвольной оболочки, частично заполненной жидкостью с пузырем. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5.
6. Григорьев Э. И., Шкларчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
7. Рыбак С. А., Самойлов Е. А. Колебания оболочки, частично заполненной жидкостью, имеющей источники. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
8. Шкларчук Ф. Н. О влиянии скимаемости жидкости при продольных колебаниях цилиндрического бака. В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосиб. электротехн. ин-т, 1973.
9. Шкларчук Ф. Н. О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
10. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
11. Мукишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение», 1971.
12. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.