МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1977

УДК 539.3

ОСЕССИМЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОНЕЧНОГО ШТАМПА

М. Б. ГЕНЕРАЛОВ, Б. А. КУДРЯВЦЕВ, В. З. ПАРТОН

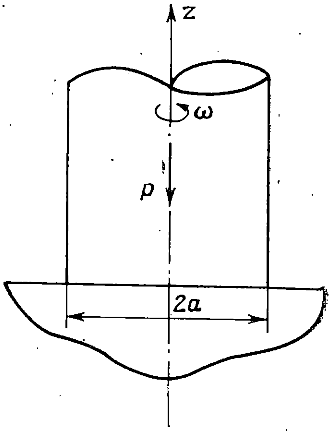
(Москва)

Рассматривается осесимметричная контактная задача для жесткого цилиндрического штампа с плоским основанием, который вдавливается в изотропное упругое полупространство и вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω. Предполагается, что на площадке контакта выделяется количество тепла, пропорциональное коэффициенту трения, скорости вращения и контактному напряжению.

Считается, что коэффициенты теплопроводности материалов штампа и полупространства различны и тепловые потоки, направленные внутрь полупространства и цилиндрического штампа, приводят к возникновению температурного поля, которое определяется из условия теплоизолированности боковой поверхности цилиндрического штампа и поверхности полупространства вне площадки контакта. Для определения контактного напряжения и температуры на площадке контакта получена система интегральных уравнений, решение которой представлено в виде рядов.

Аналогичная контактная задача для двух вращающихся полубесконечных тел была исследована в [1]. Приближенное решение задачи о вдавливании вращающейся жесткой сферы в упругое полупространство получено в [2].

1. Рассмотрим жесткий цилиндрический штамп радиуса a с плоским основанием, который вдавливается в упругое полупространство $0\leqslant r<\infty$, $z\leqslant 0$ силой P и вращается с постоянной угловой скоростью ω (фиг. 1). За счет трения на площадке контакта $z=0$, $0\leqslant r\leqslant a$ выделяется количество тепла, пропорциональное скорости ωr, коэффициенту трения k_0 и контактному напряжению $\sigma_0(r)$. Тепловыделение на площадке контакта приводит к появлению тепловых потоков, направленных внутрь полупространства и штампа.



Фиг. 1

Обозначив через $T(r, z)$, $T^*(r, z)$ температуры полупространства и цилиндрического штампа, запишем уравнение теплового баланса в виде

$$q+q^*=\omega k_0 r\sigma_0(r),\quad 0\leqslant r\leqslant a,\quad q=\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$q^*=-\lambda^*\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{1.1}$$

Здесь q, q^* – тепловые потоки, направленные внутрь упругого полупространства и штампа; λ, λ^* – коэффициенты теплопроводности материалов полупространства и штампа.

Рассматриваемое термоупругое напряженное состояние полупространства будем полагать таким, что касательные напряжения $\sigma_{rz}=0$ всюду на границе $z=0$, а касательные напряжения $\tau_{z\theta}$ пропорциональны компоненте σ_z на площадке контакта.

В этом случае задача сводится к определению осесимметричных компонентов $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ вектора смещений в полупространстве $z<0$ и функций температур полупространства и цилиндрического штампа.

Полученные результаты затем можно использовать для решения известной задачи [3] о кручении полупространства касательными напряжениями $\tau_{z\theta}$, распределенными на круговой площадке контакта границы $z=0$. Очевидно, что полное напряженное состояние полупространства, в которое вдавливается вращающийся жесткий цилиндрический штамп, может быть представлено в виде суммы осесимметричного термоупругого состояния и напряжений, возникающих при кручении полупространства. Так как наибольший интерес представляет решение осесимметричной задачи, то ниже рассматриваются только осесимметричные уравнения термоупругости.

Используя интегральные преобразования Бесселя, представим стационарное температурное поле полупространства $z<0$ в форме интеграла

$$T(r, z)=\int_0^\infty A(\xi) e^{\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi \tag{1.2}$$

Тогда решение осесимметричных уравнений термоупругости для упругого полупространства $z<0$ будет иметь вид

$$\begin{gathered}
u_r=\int_0^\infty [C_1(\xi)+\xi z C_2(\xi)] e^{\xi z} J_1(\xi r)\, d\xi+\alpha(1+\nu) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} A(\xi) e^{\xi z} J_1(\xi r)\, d\xi \\
u_z=\int_0^\infty [-C_1(\xi)+(3-4\nu-\xi z) C_2(\xi)] e^{\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi+\alpha(1+\nu) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} A(\xi) e^{\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi
\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_z(r, z)=2\mu \int_0^\infty \xi[-C_1(\xi)+(2-2\nu-\xi z) C_2(\xi)] e^{\xi z} J_0(\xi r)\, d\xi \\
\tau_{rz}(r, z)=2\mu \int_0^\infty \xi[C_1(\xi)-(1-2\nu-\xi z) C_2(\xi)] e^{\xi z} J_1(\xi r)\, d\xi
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь u_r, u_z, σ_z, τ_{rz} — компоненты смещений и напряжения в упругом полупространстве; μ, ν, α — модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного расширения материала полупространства.

Полагая, что касательные напряжения равны нулю всюду на границе $z=0$, из (1.4) получим $C_1(\xi)=(1-2\nu) C_2(\xi)$.

С учетом последнего равенства выражения для нормальных смещений и напряжений на границе $z=0$ принимает вид

$$u_z(r, 0)=2(1-\nu) \int_0^\infty C_2(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi+\alpha(1+\nu) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} A(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi \tag{1.5}$$

$$\sigma_z(r, 0)=2\mu \int_0^\infty C_2(\xi)\, \xi J_0(\xi r)\, d\xi \tag{1.6}$$

Считая, что боковая поверхность цилиндрического штампа теплоизолирована, представим температуру $T^*(r, z)$ в форме ряда

$$T^*(r, z)=\sum_{j=1}^\infty B_j e^{-\alpha_j z/a} J_0\left(\frac{\alpha_j r}{a}\right) \tag{1.7}$$

где α_j — корни уравнения $J_1(\alpha_j)=0$.

Если принять, что поверхность полупространства вне площадки контакта теплоизолирована, то граничные условия данной задачи можно записать в виде

$$u_z(r,0)=0,\ T(r,0)=T^*(r,0),\ q+q^*=\omega k_0 r\sigma_0(r)\ (0\leqslant r<a) \tag{1.8}$$

$$\sigma_z(r,0)=0,\quad \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0\quad (a<r<\infty),\quad \sigma_0(r)=2\mu\int_0^\infty C_2(\xi)\,\xi J_0(\xi r)\,d\xi \tag{1.9}$$

С учетом (1.2), (1.5)—(1.7) условия (1.8), (1.9) приводятся к следующей системе уравнений:

$$\int_0^\infty \xi C_2(\xi)J_1(\xi r)\,d\xi+\frac{\alpha(1+\nu)}{2(1-\nu)}\int_0^\infty A(\xi)J_1(\xi r)\,d\xi=0 \tag{1.10}$$

$$\int_0^\infty A(\xi)J_0(\xi r)\,d\xi=\sum_{j=1}^\infty B_jJ_0\left(\alpha_j\frac{r}{a}\right) \tag{1.11}$$

$$\lambda\int_0^\infty \xi A(\xi)J_0(\xi r)\,d\xi+\frac{\lambda^*}{a}\sum_{j=1}^\infty \alpha_jB_jJ_0\left(\alpha_j\frac{r}{a}\right)=\omega k_0 r\sigma_0(r)\quad (0\leqslant r<a) \tag{1.12}$$

$$\int_0^\infty \xi C_2(\xi)J_0(\xi r)\,d\xi=0,\quad \int_0^\infty \xi A(\xi)J_0(\xi r)\,d\xi=0\quad (a<r<\infty) \tag{1.13}$$

2. Можно показать, что равенства (1.13) удовлетворяются тождественно, если принять

$$A(\xi)=\int_0^a f(t)\cos\xi t\,d\xi=f(a)\frac{\sin\xi a}{\xi}-\frac{1}{\xi}\int_0^a f'(t)\sin\xi t\,dt \tag{2.1}$$

$$2\mu C_2(\xi)=\int_0^a \varphi(t)\cos\xi t\,dt=\varphi(a)\frac{\sin\xi a}{\xi}-\frac{1}{\xi}\int_0^a \varphi'(t)\sin\xi t\,dt \tag{2.2}$$

Тогда из уравнений (1.11), (1.12) получим

$$\int_0^r \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}=\sum_{j=1}^\infty B_jJ_0\left(\alpha_j\frac{r}{a}\right) \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}\alpha_jB_jJ_0\left(\alpha_j\frac{r}{a}\right)=-a\frac{\lambda}{\lambda^*}\left[\frac{f(a)}{\sqrt{a^2-r^2}}-\int_0^a\frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]+\frac{\omega a}{\lambda^*}k_0r\sigma_0(r) \tag{2.4}$$

Разрешая (2.3) относительно функции $f(t)$, найдем

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^\infty B_j\cos\left(\alpha_j\frac{t}{a}\right) \tag{2.5}$$

Учитывая формулы для коэффициентов ряда Фурье — Бесселя из равенства (2.4), определим B_j $(j=1, 2, \ldots)$:

$$\alpha_j B_j = -\frac{2\lambda}{a\lambda^* J_0^2(\alpha_j)} \int_0^a f(t)\cos\left(\alpha_j \frac{t}{a}\right) dt + \frac{2\omega k_0}{a\lambda^* J_0^2(\alpha_j)} \int_0^{a'} \rho^2 \sigma_0(\rho) J_0\left(\alpha_j \frac{\rho}{a}\right) d\rho . \tag{2.6}$$

Подстановка (2.6) в (2.5) приводит после ряда преобразований к уравнению

$$f(t) = \frac{\lambda}{\lambda^* a} \int_0^a f(u) K\left(\frac{u}{a}, \frac{t}{a}\right) du +$$
$$+ \frac{2\omega k_0}{\pi\lambda^*}\left[\int_t^a \frac{\rho^2\sigma_0(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}} - \frac{1}{a}\int_0^a \rho^2\sigma_0(\rho) L\left(\frac{t}{a}, \frac{\rho}{a}\right) d\rho\right] \tag{2.7}$$

Здесь использованы известные разложения [4]

$$2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j\rho/a)\cos(\alpha_j t/a)}{\alpha_j J_0^2(\alpha_j)} = -L\left(\frac{t}{a}, \frac{\rho}{a}\right) + \begin{cases} 0 & (\rho<t) \\ a(\rho^2-t^2)^{-1/2} & (\rho>t) \end{cases} \tag{2.8}$$

$$L\left(\frac{t}{a}, \frac{\rho}{a}\right) = 2\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2} +$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{yI_1(y)}\left[2I_1(y) - yI_0\left(y\frac{\rho}{a}\right)\right] \operatorname{ch}\left(y\frac{t}{a}\right) dy \tag{2.9}$$

$$K\left(\frac{u}{a}, \frac{t}{a}\right) = -\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_j t/a)\cos(\alpha_j u/a)}{\alpha_j J_0^2(\alpha_j)} =$$
$$= \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{K_1(y)}{yI_1(y)}\left[2I_1(y) - y\operatorname{ch}\left(\frac{t}{a}y\right)\operatorname{ch}\left(\frac{u}{a}y\right)\right] dy \tag{2.10}$$

из которых с учетом равенства

$$\frac{d}{du}\int_0^u \frac{\rho J_0(\alpha_j\rho/a)\,d\rho}{\sqrt{u^2-\rho^2}} = \cos\left(\alpha_j \frac{u}{a}\right)$$

получаем связь между ядрами $K(u/a,\, t/a)$ и $L(t/a,\, \rho/a)$

$$K\left(\frac{u}{a}, \frac{t}{a}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^u \frac{\rho L(t/a, \rho/a)\,d\rho}{\sqrt{u^2-\rho^2}} \tag{2.11}$$

Используя соотношения (2.9), (2.10) и принимая во внимание формулы [5]:

$$\int_0^u E\left(\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{u}\right)^2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\tau y}{a}\right) d\tau = \frac{\pi^2}{8} u\left[I_0^2\left(\frac{yu}{2a}\right) + I_1^2\left(\frac{yu}{2a}\right)\right]$$

$$\int_0^u E\left(\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{u}\right)^2}\right)d\tau=\frac{\pi^2 u}{8}$$

где $E(...)$ — полный эллиптический интеграл второго рода; $I_0(...)$, $I_1(...)$ — модифицированные функции Бесселя, можно показать, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{u}\int_0^u \frac{\rho^2 L(t/a,\rho/a)}{\sqrt{u^2-\rho^2}}d\rho=\int_0^u E\left(\sqrt{1-\frac{\tau^2}{a^2}}\right)K\left(\frac{t}{a},\frac{\tau}{a}\right)d\tau \qquad (2.12)$$

С учетом (2.2) выражение для контактного давления $\sigma_0(r)$ представим в виде

$$\sigma_0(r)=2\mu\int_0^\infty \xi C_2(\xi)J_0(\xi r)d\xi=\frac{\varphi(a)}{\sqrt{a^2-r^2}}-\int_r^a\frac{\varphi'(u)\,du}{\sqrt{u^2-r^2}} \qquad (0\leqslant r<a) \qquad (2.13)$$

Тогда после подстановки (2.13) в правую часть уравнения (2.7) и некоторых преобразований с учетом (2.12) получим интегральное уравнение относительно искомых функций $f(t)$, $\varphi(t)$:

$$f(t)-\frac{\lambda}{\lambda^* a}\int_0^a f(u)K\left(\frac{u}{a},\frac{t}{a}\right)du=$$

$$=\frac{2\omega k_0 a}{\pi\lambda^*}\left\{\varphi(a)\left[E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\right)-\frac{1}{a}K_1\left(1,\frac{t}{a}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\int_t^a u\varphi'(u)E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{u^2}}\right)du+\frac{1}{a^2}\int_0^a u\varphi'(u)K_1\left(\frac{u}{a},\frac{t}{a}\right)du\right\} \qquad (2.14)$$

$$K_1\left(\frac{u}{a},\frac{t}{a}\right)=\int_0^u E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{u^2}}\right)K\left(\frac{\tau}{a},\frac{t}{a}\right)d\tau \qquad (2.15)$$

В результате подстановки (2.1) и (2.2) в (1.10) получаем второе интегральное уравнение относительно $\varphi(t)$, $f(t)$:

$$\Omega(r)\equiv\int_0^r\frac{u\varphi'(u)\,du}{\sqrt{r^2-u^2}}-\frac{\alpha\mu(1+\nu)}{1-\nu}\left[\int_0^a f(t)\,dt-\int_r^a\frac{tf(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]=0 \qquad (0\leqslant r<a)$$

которое после применения оператора

$$L[\Omega(r)]=\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{r\Omega(r)\,dr}{\sqrt{\tau^2-r^2}}$$

примет вид

$$\tau\varphi'(\tau)-\frac{\alpha\mu(1+\nu)}{1-\nu}\frac{2}{\pi}\tau^2\int_0^a\frac{f(t)\,dt}{\tau^2-t^2}=0 \qquad (0\leqslant\tau<a) \qquad (2.16)$$

Таким образом, задача определения напряженного состояния и температурного поля сводится к решению уравнений (2.14) и (2.16).

3. Переходя к решению системы (2.14), (2.16), будем искать функцию $f(t)$ в виде степенного ряда

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}\left(\frac{t}{a}\right)^{2k}. \tag{3.1}$$

Тогда из уравнения (2.16) получим

$$\tau\varphi'(\tau)=\frac{\mu\alpha(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\tau}{\pi}\left\{F_0\ln\left(\frac{a+\tau}{a-\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}F_{2k}\left[\left(\frac{\tau}{a}\right)^{2k}\ln\left(\frac{a+\tau}{a-\tau}\right)-2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}\left(\frac{\tau}{a}\right)^{2k-2j+1}\right]\right\} \tag{3.2}$$

Интегрируя (3.2), находим

$$\varphi(a)=\frac{\mu\alpha(1+\nu)}{1-\nu}\frac{a}{\pi}\left\{2F_0\ln 2+\sum_{k=1}^{\infty}F_{2k}\left[\frac{1}{2k+1}\left(2\ln 2+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(2j-1)(k-j+1)}\right]\right\}+\varphi_0 \tag{3.3}$$

Для определения постоянной φ_0 используем условие

$$P=2\pi\int_0^a \sigma_0(r)r\,dr=2\pi\int_0^u \varphi(u)\,du \tag{3.4}$$

где P — сила, действующая на штамп.

Вычислив значение φ_0 из уравнения (3.4) и подставив в (3.3), получим

$$\varphi(a)=\frac{P}{2\pi a}+\frac{\mu\alpha(1+\nu)}{1-\nu}\frac{a}{\pi}\left[F_0-\sum_{k=2}^{\infty}F_{2k}\frac{1}{(k+1)}\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{(2k-2j+3)}\right] \tag{3.5}$$

Для того, чтобы представить правую часть уравнения (2.14) в виде степенного ряда, используем известное разложение [6]:

$$K\left(\frac{u}{a},\frac{t}{a}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^{2k} \tag{3.6}$$

$$b_0\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{4}{\pi^2}(\pi+M^*)-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{u}{a}\right)^{2k}$$

$$b_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_{2k+2j-2}}{(2k)!(2j-2)!}\left(\frac{u}{a}\right)^{2j-2} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

$$M^*=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2s}}{2^{2s}s!(s+1)!},\qquad M_{2s}=\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{I_1(y)}y^{2s}\,dy$$

Тогда с учетом (2.15) имеем

$$K_1\left(\frac{u}{a}, \frac{t}{a}\right) = \frac{\pi a}{2}\sum_{k=0}^{\infty} D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^{2k} \tag{3.7}$$

$$D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right) = \left(\frac{u}{a}\right)\frac{2}{\pi a}\int_0^a b_{2k}\left(\frac{ut}{a^2}\right)E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\right)dt \tag{3.8}$$

Вводя обозначения

$$e_{2j} = \frac{2}{\pi a}\int_0^a \left(\frac{\tau}{a}\right)^{2j} E\left(\sqrt{1-\frac{\tau^2}{a^2}}\right)d\tau \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

на основании (3.8) получим формулы для функции $D_{2k}(u/a)$:

$$D_0\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{u}{a}\right)e_0 + \frac{4}{\pi^2}\left[e_0 M^* \frac{u}{a} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_{2j}e_{2j}}{(2j)!}\left(\frac{u}{a}\right)^{2j+1}\right]$$

$$D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_{2k+2j-2}e_{2j-2}}{(2k)!\,(2j-2)!}\left(\frac{u}{a}\right)^{2j-1} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3.9}$$

Подстановка (3.1), (3.6) и (3.7) в (2.14) приводит к следующему равенству:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[F_{2k} - \frac{\lambda}{\lambda^*}\sum_{j=0}^{\infty}F_{2j}c_{2j,2k}\right]\left(\frac{t}{a}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{\omega k_0}{\lambda^*}a\varphi(a)\left[\frac{2}{\pi}E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}D_{2k}(1)\left(\frac{t}{a}\right)^{2k}\right] -$$

$$-\frac{\omega k_0}{\lambda^*}\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_{2k}\left(\frac{t}{a}\right)^{2k} - \frac{\omega k_0}{\lambda^*}\frac{2}{\pi}\int_t^a u\varphi'(u)E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{u^2}}\right)du \tag{3.10}$$

$$c_{2j,2k} = \frac{1}{a}\int_0^a b_{2k}\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^{2j}dt = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2k+2s-2}}{(2k)!\,(2s-2)!\,(2s+2j-1)}$$

$$(j=0,1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$$

$$c_{2j,0} = \frac{1}{a}\int_0^a b_0\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^{2j}dt = \frac{4(\pi+M^*)}{\pi^2(2j+1)} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2s}}{(2s)!\,(2s+2j-1)}$$

$$(j=0,1,2,\ldots)$$

$$\Phi_{2k} = \int_0^a u\varphi'(u)D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)du \tag{3.11}$$

Умножая обе части равенства (3.10) на $(1/a)b_{2n}(t/a)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ и интегрируя по t в пределах от 0 до a, получим

$$\frac{\omega k_0}{\lambda^*}\Phi_{2n} + \sum_{k=0}^{\infty}F_{2k}\left(c_{2k,2n} - \frac{\lambda}{\lambda^*}\sum_{p=0}^{\infty}c_{2k,2p}c_{2p,2n}\right) - \frac{\omega k_0}{\lambda^*}\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_{2k}c_{2k,2n} =$$

$$=\frac{\omega k_0}{\lambda^*}a\varphi(a)\left[D_{2n}(1)-\sum_{k=0}^{\infty}D_{2k}(1)c_{2k,2n}\right]\quad (n=0,1,2,\ldots)\qquad(3.12)$$

Для того, чтобы найти связь между коэффициентами Φ_{2k}, F_{2k}, умножим уравнения (3.2) на $D_{2k}(\tau/a)$ и проинтегрируем по τ; тогда найдем

$$\Phi_{2k}=\frac{\mu\alpha(1+\nu)a^2}{(1-\nu)}\sum_{j=0}^{\infty}F_{2j}g_{2j,2k}\quad (k=0,1,2,\ldots)\qquad(3.13)$$

$$g_{2j,2k}=\frac{1}{\pi a}\int_0^a\left(\frac{u}{a}\right)^{2j+1}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)du-$$

$$-2\sum_{s=1}^{j}\frac{(2s-1)}{\pi a}\int_0^a D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)\left(\frac{u}{a}\right)^{2k-2s+2}du$$

$$g_{0,2k}=\frac{1}{\pi a}\int_0^a\left(\frac{u}{a}\right)\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)D_{2k}\left(\frac{u}{a}\right)du$$

С учетом (3.9) формулы для коэффициентов $g_{2j,2k}$ принимают вид

$$g_{0,0}=\frac{4e_0}{3\pi^3}(\pi+M^*)(2\ln 2-1)-\frac{4}{\pi^3}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2s}e_{2s}}{(2s)!(2s+3)}\left(2\ln 2+\sum_{m=1}^{s+1}\frac{1}{m}\right)$$

$$g_{0,2k}=-\frac{4}{\pi^3}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2k+2s-2}e_{2s-2}}{(2k)!(2s-2)!(2s+1)}\left(2\ln 2+\sum_{m=1}^{s}\frac{1}{m}\right)\quad (k=1,2,\ldots)$$

$$g_{2j,0}=\frac{4e_0}{\pi^3}(\pi+M^*)\left[\frac{1}{(2j+3)}\left(2\ln 2+\sum_{m=1}^{j+1}\frac{1}{m}\right)-\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{(2m-1)(j-m+2)}\right]-$$

$$-\frac{4}{\pi^3}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2s}e_{2s}}{(2s)!}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(2j+2s+3)}\left(2\ln 2+\sum_{m=1}^{j+s+1}\frac{1}{m}\right)-\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{(2m-1)(j-m+s+2)}\right]\quad (j=1,2,\ldots)$$

$$g_{2j,2k}=-\frac{4}{\pi^3}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{M_{2k+2s-2}e_{2s-2}}{(2k)!(2s-2)!}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(2j+2s+1)}\left(2\ln 2+\sum_{m=1}^{j+s}\frac{1}{m}\right)-\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{(2m-1)(s+j-m+1)}\right]\quad (j,k=1,2,\ldots)$$

Таким образом, решение систем интегральных уравнений (2.14), (2.16) сводится к определению коэффициентов F_{2k}, Φ_{2k} из бесконечной системы алгебраических уравнений (3.10), (3.13).

Вводя обозначения

$$F_{2k}=\frac{\omega k_0}{\lambda^*}\frac{P}{2\pi}F_{2k}^*,\qquad \Phi_{2k}=\frac{P}{2\pi}\Phi_{2k}^*$$

и подставляя (3.13) в (3.10), запишем уравнения (3.10), (3.13) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k}^* \left(c_{2k,2n} - \frac{\lambda}{\lambda^*} \sum_{p=0}^{\infty} c_{2k,2p} c_{2p,2n} + \Lambda g_{2k,2n} - \Lambda \sum_{p=0}^{\infty} g_{2k,2p} c_{2p,2n} \right) =$$

$$= \varphi^*(a) \left(D_{2n}(1) - \sum_{k=0}^{\infty} D_{2k}(1) c_{2k,2n} \right) \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{3.14}$$

$$\Phi_{2k}^* = \Lambda \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j}^* g_{2j,2k}, \quad \Lambda = \frac{\omega k_0 \mu \alpha (1+\nu) a^2}{\lambda^* (1-\nu)} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$\varphi^*(a) = \frac{2\pi a}{P} \varphi(a) = 1 + \frac{\Lambda}{\pi} \left[F_0^* - \sum_{j=2}^{\infty} F_{2j}^* \frac{1}{1+j} \sum_{s=2}^{j} \frac{1}{2j+2s+3} \right] \tag{3.15}$$

Из уравнений (3.14) и (3.15) следует, что решение задачи зависит от отношения коэффициентов теплопроводности и параметра Λ.

Для определения температуры на площадке контакта воспользуемся следующим выражением:

$$T(r,0) = \int_0^r \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + T_н \quad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

которое после подстановки (3.1) примет вид ($T_н$— некоторая постоянная)

$$T(r,0) = \frac{\omega k_0 P}{4\lambda^*} \left[F_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^* \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{r}{a} \right)^{2k} \right] + T_н \tag{3.16}$$

На фиг. 2 представлен график зависимости

$$T^* = \frac{4\mu\alpha a^2 (1+\nu)}{P(1-\nu)} [T(r,0) - T_н]$$

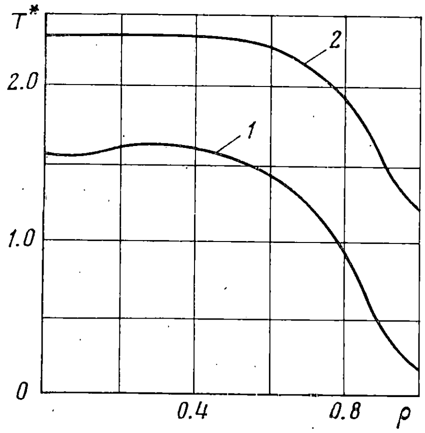
от $\rho = r/a$ для $\lambda/\lambda^* = 0.01$, $\Lambda = 10$ (кривая *1*) и $\Lambda = 20$ (кривая *2*).

Определим контактное давление $\sigma_0(r)$. Рассмотрим функцию

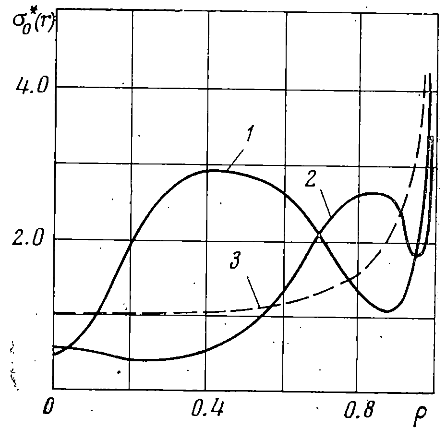
$$\Psi\left(\frac{t}{a}\right) = \int_t^a u\varphi'(u) E\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{u^2}}\right) du = \int_t^a \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2-t^2}} \int_\rho^a \frac{\varphi'(u)\,du}{\sqrt{u^2-\rho^2}}\, d\rho \tag{3.17}$$

которую представим в виде ряда

$$\Psi\left(\frac{t}{a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{2k} \left(\frac{t}{a}\right)^{2k} \tag{3.18}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда из равенства (3.17) получим (где C_k^j— биномиальные коэффициенты)

$$r^2\int\limits_r^a \frac{\varphi'(u)\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}=\frac{2}{\pi}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\left[\Psi_0+\sum_{k=1}\frac{\Psi_{2k}}{2k-1}\right]+$$

$$+\frac{4r^3}{\pi a^2\sqrt{a^2-r^2}}\left[\Psi_2-\sum_{k=2}^{\infty}\Psi_{2k}q_{2k}\left(\frac{r}{a}\right)\right]$$

$$q_{2k}\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{k}{2k-1}\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^k-1\right]\left(\frac{r^2}{a^2}\right)^{-1}+ \qquad (3.19)$$

$$+k\sum_{j=1}^{k-1}C_{k-1}^j\frac{(1-r^2/a^2)^{k-j}}{(2k-2j-1)}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)^{j-1}\qquad (k=2,3,\ldots)$$

Учитывая тождество

$$\Psi_0=\Psi(0)=\int\limits_0^a u\varphi'(u)\,du$$

на основании (3.17), (3.18) можно показать, что

$$\Psi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2k}}{2k-1}=0$$

Подставляя разложение (3.18) в левую часть (3.17) и умножая обе части на $({}^1/a)\ b_{2n}\ (t/a)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, после интегрирования по t в пределах от 0 до a получим следующие равенства:

$$\Phi_{2n}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_{2k}c_{2k,2n}\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

Таким образом, формула (2.13) для контактного давления $\sigma_0(r)$ с учетом (3.19) принимает вид

$$\sigma_0(r)=\frac{P}{2\pi a^2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2/a^2}}\left[\varphi^*(a)-2\frac{r}{a}\Psi_2^*+2\frac{r}{a}\sum_{k=2}^{\infty}\Psi_{2k}^*q_{2k}\left(\frac{r}{a}\right)\right]$$

где коэффициенты Ψ_{2k} $(k=1, 2,\ldots)$ будут определяться из решения системы уравнений

$$\Phi_{2n}^*=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_{2k}^*\left(\frac{c_{0,2n}}{2k-1}+c_{2k,2n}\right)\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

На фиг. 3 показана зависимость величины $\sigma_0^*(r)=2\pi a^2\sigma_0(r)/P$ от $\rho=r/a$ для $\lambda/\lambda^*=0.1$, $\Lambda=10$ (кривая *1*) и $\Lambda=5$ (кривая *2*). Эти зависимости существенно отличаются от аналогичных для невращающегося штампа (пунктирная кривая *3* на фиг. 3). Таким образом, учет температурных напряжений, обусловленных тепловыделением на площадке контакта, приводит к значительному перераспределению контактного давления.

Поступила 25 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генералов М. Б., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Контактная задача термоупругости для вращающихся тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
2. *Barber J. R.* Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space. «Wear», 1975, vol. 35, No. 2.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Srivastav R. P.* Dual series relations II, Dual relations involving Dini —series. Pros. Roy. Soc. Edinburgh A, 1962–1963, vol. 66, No. 3, p. 161–172.
5. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 2. М., «Наука», 1970.
6. *Sneddon I. N., Tait R. J.* The effect of penny — shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder. Internat. J. Engng Sci., 1963, vol. 1, No. 3.